

# 耦合非线性系统的时空动力学与合作行为

# Spatiotemporal Dynamics and Collective Behaviors in Coupled Nonlinear Systems

郑志刚



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

ISBN 7-04-013100-5



定价 53.00 元



# 耦合非线性系统的时空动力学与合作行为

# Spatiotemporal Dynamics and Collective Behaviors in Coupled Nonlinear Systems

郑志刚 著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

## 内容提要

时空非线性系统的自组织与合作行为是近几十年来非线性科学及其诸多交叉领域研究的热点。本书系统介绍了与合作现象有关的同步、时空随机共振、时空斑图、非线性波与耦合分子马达等行为，并探讨了这些现象之间的联系。全书共分为五章。第一章介绍了非线性科学的有关基本知识；第二章集中研究了耦合非线性系统的同步问题，分析了耦合极限环和混沌振子的同步，系统分析了完全混沌同步、广义同步、相同步、滞后同步、测度同步等不同类型和层次的混沌同步；第三章探讨了时空非线性系统的随机共振、相干共振、可激发介质中波传播、时空斑图等问题；第四章讨论了描写时空尺度竞争的 Frenkel - Kontorova 系统的基态公度——非公度相变与时空动力学行为，探讨了热传导的微观动力学机制；第五章集中研究了合作定向输运问题，总结了单个分子马达输运的一般性结果，讨论了时空系统的合作定向输运问题。

本书系统地反映了有关时空非线性系统的合作动力学研究现状，可供从事非线性科学与统计物理研究的工作者、理工科大学的教师、大学高年级学生和研究生阅读，对与非线性科学研究有关的交叉领域的研究人员也有一定的参考价值。

**图书在版编目(CIP)数据**

耦合非线性系统的时空动力学与合作行为 / 郑志刚.
—北京:高等教育出版社,2004.3
ISBN 7-04-013100-5

Ⅰ.耦... Ⅱ.郑... Ⅲ.①耦合-随机非线性系统-研究②时空-随机非线性系统-研究. Ⅳ.O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 099613 号

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 购书热线 | 010-64054588 |
| 社　　址 | 北京市西城区德外大街4号 | 免费咨询 | 800-810-0598 |
| 邮政编码 | 100011 | 网　　址 | http://www.hep.edu.cn |
| 总　　机 | 010-82028899 | | http://www.hep.com.cn |
| 经　　销 | 新华书店北京发行所 | | |
| 印　　刷 | 高等教育出版社印刷厂 | | |
| 开　　本 | 787×960　1/16 | | |
| 印　　张 | 25.5 | 版　　次 | 2004年3月第1版 |
| 字　　数 | 470 000 | 印　　次 | 2004年3月第1次印刷 |
| 插　　页 | 1 | 定　　价 | 53.00元 |

# 作 者 简 介



郑志刚,1969年8月生,北京师范大学物理系教授,博士生导师,1998年获理学博士学位,师从胡岗教授。1996年及1998年在香港浸会大学物理系和非线性研究中心做博士后。1997年7月至今在北京师范大学物理系工作,2001年破格晋升教授。2001—2002年在美国加州理工学院做高级访问学者。现任Communications in Theoretical Physics,中国物理快报、物理学报、Chinese Physics等杂志特约审稿人。目前主要从事统计物理与非线性科学等方面的理论研究工作,近几年在国际刊物上发表学术论文50余篇,内容涉及随机非线性系统的输运过程、统计物理基本问题、耦合非线性系统的时空动力学、混沌的控制与混沌同步、分子马达等方面,在Phys. Rev. Lett.和Phys. Rev.上发表论文20余篇,并有关于混沌控制与同步的专著1部。2001年获得第三届全国百篇优秀博士学位论文奖;同年获教育部高校青年教师奖;2003年获得教育部首批优秀骨干教师称号。目前主持国家自然科学基金、教育部骨干教师、霍英东基金、全国优秀博士论文专项、青年教师奖励资助计划、博士点基金等国家项目,并是973国家重点基础研究规划项目成员、混沌子课题负责人之一。

# 导师简介



胡岗,1944年12月生,比利时布鲁塞尔自由大学博士,北京师范大学物理系教授,博士生导师,国家有突出贡献专家(1997年1月授予)。现任Communications in Theoretical Physics、物理学报、Chinese Physics、Chinese Physics Letters、物理学进展等杂志编委。从事统计物理及非线性科学领域的科研工作,在随机共振、混沌与时空混沌的结构、控制与同步、混沌保密通讯等方面做出了有影响的工作,在国内外有影响的物理期刊上发表100多篇论文,其中在Phys. Rev. Lett. 上已发表10多篇论文,并在非线性科学丛书中出版了两本著作。有关研究成果获1998年教育部科技进步一等奖,1999年国家自然科学奖三等奖。曾主持多个国家自然科学基金项目,并主持一项自然科学基金重点项目。目前是973国家重点基础研究规划项目成员和混沌子课题负责人。

# Abstract

Self - organizations and collective behaviors have been extensively studied in recent years in relation to nonlinear science and other interdisciplinary subjects. In this book, we explore synchronization dynamics, spatiotemporal stochastic resonance, spatiotemporal patterns, nonlinear waves and coupled molecular motors. The relations among these different collective phenomena are discussed.

The monograph is composed of five chapters. In Chapter Ⅰ, we introduce some fundamental knowledge and concepts in nonlinear science. Synchronizations in coupled nonlinear systems are explored in detail in Chapter Ⅱ. Synchronizations in coupled limit cycles and chaotic oscillators are analyzed, and different levels of chaos synchronizations such as complete synchronization, generalized synchronization, phase synchronization, lag synchronization, and measure synchronization are discussed in a systematic way. We study some noise - induced collective behaviors in spatiotemporal systems, such as spatiotemporal stochastic resonance, coherence resonance, wave propagation in excitable media, and spatiotemporal patterns. The Frenkel - Kontorova model, which well describes the spatial competitions, is introduced in Chapter Ⅳ. As for the ground state, we study the commensurate - incommensurate phase transitions (Aubry CI phase transitions). Spatiotemporal dynamics are also discussed for the dissipative and underdamped cases. The microscopic dynamical mechanism of heat conduction is explored in relating to the Frenkel - Kontorova lattices. We focus on the collective directional transport problem in Chapter Ⅴ. Basic physical concepts about directed transport and molecular motors are introduced, and collective directed motion of spatiotemporal systems can be induced by breaking the spatiotemporal symmetries.

The book systematically summarizes recent developments of collective phenomena in spatiotemporal dynamical systems. The readership includes researchers working in nonlinear science and statistical physics, teachers, students, and graduate students in universities and colleges. It should also be helpful for researchers working in interdisciplinary fields of nonlinear science.

# 前　言

20世纪下半叶，非线性科学形成和发展成为一门交叉科学。这门科学形成的动力来自多个方面。其一是对多体系统牛顿力学的探讨，这最早可上溯至19世纪末Poincaré关于三体问题的探讨，研究揭示了非线性系统内禀存在的随机性——混沌，从而打破了人们传统的决定论思想。第二个方面来自于流体力学中关于湍流的研究。湍流的复杂性形成存在着系统内部的原因。Lorenz在研究大气湍流时将Navier－Stokes方程约化为三自由度的非线性方程，并在研究中发现了混沌现象。与非线性研究有关的另一个方面来自于化学、生物等系统的探索，这直接联系着Prigogine所提出的耗散结构理论。它揭示出热力学系统在非平衡、非线性条件下，热力学分支可以失稳出现有序的结构。另外，统计物理基本问题（动力学与统计性的关系）研究也推动了非线性科学的形成。数学上关于孤立波等问题的研究都成为非线性科学的重要内容。总的来说，非线性科学所研究的是物理、化学、生物、生态等各类系统中与非线性有关的、共同的、本质的问题。

系统的复杂性往往来自于其大量的自由度。对非线性系统的研究表明：即使是非常简单的系统也可能由于非线性而表现出复杂的动力学行为；而大自由度的系统也可以由于非线性而表现出相干、简单的行为。因此，非线性系统的复杂行为不是毫无规律的复杂，简单亦非一般的简单。研究这些由于非线性而产生的简单或复杂的动力学行为及规律是非线性科学研究的重要课题。

相互作用是到处存在的。一个大的系统可由若干相互作用的小系统组成。小系统一般是非线性的，大量小系统耦合在一起可表现出简单或复杂的时空动力学行为。对耦合系统的研究以往由于计算条件所限而通常借助于理论近似和统计手段，近年来则由于计算机速度和容量的大大提高而得以广泛地研究，并揭示出丰富的现象。从目前的研究手段和模型系统来看，大致有以下几类：一是时空均连续化的偏微分方程（PDE）系统，它既可以是实际系统，也可以是连续化的近似，研究的主要问题是系统的时空特征与非线性波行为，如孤立子、扭结、呼吸

子以及时空斑图动力学;二是空间分立化的常微分方程组(ODE)系统,由于分立性效应,波波相互作用会导致复杂的行为,可能会有多种时空尺度竞争,产生模式相干、共振等现象;在某些情况下,我们不仅可以把系统的空间分立化,而且还可以把时间分立化,即所谓的耦合映像格子(CML)系统。这些不同方式一方面为了提高运算速度而作为研究问题的不同手段,另一方面也揭示了大量实际系统的时空动力学。

本书所讨论的内容集中于与耦合非线性系统的一系列合作行为有关的最近二三十年来的进展。在此期间,有关时空系统合作行为的研究取得了大量重要成果。主要原因在于:(1) 对于时空非线性系统的动力学研究是非线性科学研究到一定阶段的必然要求。在20世纪70年代以来,人们对于少自由度非线性系统的混沌动力学和复杂行为研究已经很深入,在大多数方面已经较为清楚,因而对大自由度系统的研究就显得尤为必要;(2) 计算机技术近几十年来飞速发展,计算机的容量和速度都大大提高,这为高维非线性系统时空动力学研究的开展提供了客观条件。特别是近十年,人们关于耦合非线性系统的合作行为研究取得了突破性进展,揭示了一系列与直观印象看似矛盾的现象。但直到现在为止,尚未发现一本系统地阐述这些进展的专著,人们只能通过阅读检索有关文献来零星地了解有关成果。本书正是在这种背景下写成的。

本书介绍了与合作现象有关的同步、时空随机共振、时空斑图、非线性波、耦合分子马达等行为。这些行为相互之间是息息相关的,在不同的物理条件下具有不同的表现形式。例如,同步既是物理、生物等许多学科中普遍存在的现象(基本概念),又是产生其他很多合作行为的机制。时空随机共振体现为时空同步,而这个过程又与能量的输运问题以及非线性波的传播密切相关。其他很多宏观集体行为也与同步的产生或破坏有密切的关系。这些内容在书中都有所体现。

为了使得本书有更好的可读性,考虑到各种不同的读者层次,第一章介绍了非线性科学的有关基本知识,如动力学系统、不动点及稳定性、分岔、混沌及其本质、混沌控制、哈密顿系统的混沌、动力学与统计的关系、随机过程与噪声等。这些知识是后面许多讨论的准备,也可以单独作为了解非线性动力学知识的学习内容。第二章集中研究了耦合非线性系统的同步问题。我们把同步问题作为一个基本物理问题来讨论,先分析了耦合极限环的同步问题。这一问题的讨论散见于各种学术期刊上,但没有见到有关中文专著对此进行系统的阐述。因此我们相信这一部分的讨论对有关的研究者具有一定的借鉴作用。我们在讨论耦合周期系统同步之后就讨论耦合混沌振子的同步。混沌同步有着更为丰富、复杂的内容。迄今为止,人们已经发现了完全混沌同步、广义同步、相同步、滞后同步、测度同步等不同类型和层次的混沌同步。这些在本章都有较为详细的论述。

我们还讨论了耦合时空非线性系统的同步问题。我们在第三章主要探讨了时空非线性系统的随机共振与相干共振问题。噪声对时空系统的合作行为有重要的作用。通常噪声对有序会产生破坏作用,因此系统的有序和无序的竞争会表现出复杂的行为。值得注意的是,随机力并不总是起着消极的作用,在非线性系统的分岔点附近,通过非线性与随机力的作用,无序的能量可能会转化为有序的动力,从而促进系统新序的建立。近年来讨论的噪声诱导相变、随机共振、相干共振、分子马达运动等就是典型的噪声对非线性系统正面作用的例子。我们还讨论了可激发介质中波传播问题。噪声在波的传播与时空斑图形成中会起重要作用。在第四章中,我们讨论了一个典型的描写时空尺度竞争的 Frenkel - Kontorova(FK)系统的动力学行为。尺度竞争是时空非线性系统研究的关键机制,尺度竞争有两种不同的类型:频率竞争和波矢竞争,由此导致了一系列非线性现象及复杂的输运行为。关于波矢竞争,最简单的模型是 1938 年由 Frenkel 和 Kontorova 提出的 FK 模型。本章从 FK 系统的基态研究出发,讨论了有关基态的一系列概念及其 Aubry 公度 - 非公度相变。FK 系统的动力学研究近年来被广泛应用于晶体位错、电荷密度波、纳米表面摩擦学、约瑟夫森结阵列和阶梯的 I - V 行为等具体问题中,因此我们专门讨论了 FK 链的时空动力学现象。结合近几年有关耦合链的热传导微观动力学机制的研究,我们进行了较为一般的论述,并讨论了用 FK 链作为模型系统讨论热传导的有关问题。这些问题至今没有专著进行系统的论述,所以本章对有关研究者应该会有一定的参考意义。我们在第五章集中研究了合作定向输运问题。输运过程一直是统计物理中最基本的研究课题之一,时空系统的合作定向输运则是一个非常有意义的问题。对非线性动力学与非平衡输运关系的研究近几十年一直受到物理学家的密切关注。最近对分子马达(棘齿)问题的探讨受到各领域的关注。这种物质输运现象与分子燃烧马达、肌肉组织收缩等生物细胞内的输运过程有着密切的关系。其基本思想还被应用到细小物质的分离等技术、光学分子马达等实验中。我们在本章着重从物理的角度对定向运动(分子马达)进行了讨论,先总结了单个分子马达输运的一般性结果,然后讨论了时空系统的合作定向输运问题。合作定向输运的讨论考虑了有相互作用系统在非对称外势场和对称势场中的两种定向输运情况,其中后者由于需要时空对称的破缺而更为有意义。

本书是在我的博士学位论文《从少体系统到多体系统:动力学和统计力学》的基础上写成的。考虑到近几年来在同步、时空动力学、合作输运等方面的一些研究成果,本书的很大部分内容反映的是有关这些领域的进展。我首先要深深感谢我的导师与合作者胡岗教授对我的言传身教。自 1992 年成为他的研究生到现在,我总是得到胡先生无私的帮助和认真的教诲,我进步的点点滴滴都与先生密不可分。他高尚的人格、严谨的学术作风和敏锐的洞察力永远是我默默学

习的榜样。我还要感谢我的另一位博士期间的导师、美国 Houston 大学教授胡斑比先生，他在 1996 年我的博士第三年期间接纳我以博士后的身份到他在香港浸会大学的非线性研究中心继续从事研究，学习并研究了 FK 系统的时空动力学。几年来，我数次往返于北京和香港，每次都在胡先生那里学到了新的东西，那里的中心有来自于世界各国的同行，每次的中心之行都是一次新的充电，与来自世界各地的同事的合作与讨论也是非常愉快的。

笔者要特别感谢加州理工学院的 Michael Cross 教授。本书很多材料的准备和手稿是我于 2001—2002 年以高级访问学者身份赴加州理工学院与 Cross 教授进行合作研究期间完成的。在此期间，Cross 教授为我提供了私人办公室和齐备的计算与通讯设备，使我在查阅文献和研究计算等方面非常便利。另外，他还为本书的选材提出自己的意见，与他的几次深入长谈更使笔者受益匪浅。我还要感谢在此期间与组内的 Mark Paul 博士后、K. Chiam 博士等人的数次深入讨论。在洛杉矶地区的很多朋友给予我不少生活上的帮助和便利，使得我在加州理工学院能够安心完成写作。

笔者还要感谢与刘宗华、周昌松、何岱海、占萌、王新刚博士等许多同行的合作。作者还与众多师兄弟与同行进行过有益讨论，无法一一列举，在此一并表示感谢。

我的研究生高建、张庭宪、敖宾、陈鸿斌、冯晓琴、袁晓萍、黄霞等承担了书稿的文字录入和部分制图工作，在此特别感谢。感谢高教出版社的陶铮、庞永江、薛春玲等编辑为本书所做的细致的工作，他们的耐心和高效率使得我可以更加认真地撰写、修改书稿。

谨以此书献给我的妻子李晓文女士、我的爱子郑念梓以及我远在家乡的父母。

# 第1章 非线性系统混沌动力学简介

在讨论耦合非线性系统的合作行为之前,考虑到不同读者的熟悉程度,我们有必要在此简要介绍有关非线性系统动力学与混沌的一些基本知识和概念.这些知识既可以作为后面进一步讨论的必要准备,也可以作为单独阅读的内容.欲更深一步了解相关知识的读者可以查阅后面列出的参考文献.

## 1.1 非线性动力学系统与分岔

### 1.1.1 动力学系统

贯穿本书,最基本的出发点就是所谓的动力学系统(dynamical systems)[1~9].它由一系列与时间有关的变量组成(相空间),设为 $N$ 维:$U(t)=\{u_i(t)\}=(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_N(t))$.其时间演化由相应的运动方程给出.对于时间连续的情况,系统演化可以由一系列常微分方程描述:

$$\frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t}=f(U;R), \tag{1.1.1}$$

其中 $f(U;R)$是一系列非线性函数,$R$ 为控制参量集,$R=(R_1,\cdots,R_m)$.在某一时刻 $t_0$与给定的 $R$,系统的状态由 $U(t_0)$决定;对于给定的 $R$,$U(t)$的演化构成 $N$ 维相空间中的一条轨迹.有时候时间变量 $t$ 可以是分立的,系统的演化由下述映像给出:

$$U(t+1)=f[U(t);R], \tag{1.1.2}$$

这里 $t$ 取整数.时间分立映像有时是自然给出的,有时则可以从时间连续系统分立化得出.

方程(1.1.1)中的非线性函数 $f$ 当其不显含时间变量时,相应的动力学系

统称为自治系统(autonomous systems).在很多情况下,非自治系统可以由引入新的变量(增加相空间维数)而变为自治系统,但是有时非自治系统无法通过这种方式变为自治系统(例如时间延迟系统).

当考虑动力学变量位形空间的依赖性时,动力学系统的演化由偏微分方程描述[10]:

$$\frac{\partial U(x;t)}{\partial t}=G\left(U,\frac{\partial U}{\partial x},\cdots;R\right),\tag{1.1.3}$$

这里右边的非线性函数 $G$ 是 $U$ 及 $U$ 对 $x$ 各阶导数的函数.此系统的相空间是无穷维的.

一类重要的动力学系统称为保守系统(conservative systems,哈密顿系统),其特点是相空间的体积随时间变化守恒(刘维定理).当我们跟随一个小体积 $\Delta V$ 内所有点的轨迹演化时,$\Delta V$ 形状会随时间改变,但其体积保持不变.另一类动力学系统就是所谓的耗散系统(dissipative systems),这类系统的特点是在 $N$ 维相空间中体积随着时间演化收缩,其中点的演化最后会收缩到一个低维空间集(称为吸引子,attractor)中.这个吸引子在 $N$ 维相空间中的体积为零.依赖于初始条件,耗散系统的演化结果可以落到不同的吸引子上.所有最后落到同一个吸引子上的出发点的集合称为吸引域(basin of attraction).保守系统由于相体积守恒的特点而不具有吸引子和吸引域.

耗散系统的吸引子本质上来讲有两类:一类是规则(regular)吸引子,它通常具有规则的几何形状,吸引子上的时间演化是规则的,如不动点(fixed point)、极限环(limit cycle)、环面(torus);第二类吸引子是不规则(irregular)吸引子,称为奇怪吸引子(strange attractor),其几何特点是不规则,具有分维(fractal)结构.通常奇怪吸引子对应着混沌运动.但近些年的研究表明,动力学系统的时间演化特征并不完全对应于其吸引子的几何特征.对于奇怪吸引子而言,其上面的运动可以是非混沌的(称为奇异非混沌吸引子,strange non-chaotic attractor).有兴趣的读者可以查阅有关文献[2].

### 1.1.2 稳定性与线性稳定性分析

给定运动方程(1.1.1)的一个解 $U_0(t)$,我们可以讨论它的稳定性.如果只关心其局域稳定性,我们可以用线性稳定性分析(linear stability analysis)的方法.在 $U_0(t)$ 解上加一个微扰:

$$U(t)=U_0(t)+\delta U(t),\tag{1.1.4}$$

将其代入(1.1.1)中并将方程对 $\delta U(t)$ 线性化(即将方程在 $U_0(t)$ 附近以 $\delta U(t)$ 做泰勒展开并只取其线性项),可以得到:

$$\frac{\partial \delta U}{\partial t}=\hat{D}f\delta U, \tag{1.1.5}$$

其中 $\hat{D}f$ 是在 $U_0(t)$ 处函数 $f$ 导数的雅可比矩阵：

$$[\hat{D}f]_{ij}=\partial f_i/\partial u_j|_{U=U_0}. \tag{1.1.6}$$

若 $\hat{D}f$ 矩阵所有本征值都是负的，则 $U_0(t)$ 解是线性稳定的，微扰 $\delta U(t)$ 长时间的演化是指数衰减的.

原则上 $\delta U(t)$ 对线性稳定性是无穷小的. 当 $\delta U(t)$ 有限大时，就涉及解的非线性稳定性. 一般的，如果从 $U_0(t)$ 解足够近的地方出发的解 $U(t)$ 随时间演化总是保持与 $U_0(t)$ 的距离在某一邻域，即存在 $\epsilon>0$，使得 $\|U(t)-U_0(t)\|\leqslant\epsilon$，我们就说解 $U_0(t)$ 是(非线性)稳定的. 这样的稳定解不要求 $U_0(t)$ 必须是一个吸引子. 如果长时间后 $U(t)\to U_0(t)$，则称 $U_0(t)$ 是渐近稳定的，$U_0(t)$ 是一个吸引子.

关于稳定性一般的讨论可以通过引入李雅普诺夫指数(Lyapunov exponent)来描述，我们将在后面讨论. 动力学系统的不动点及其稳定性是人们很感兴趣的问题之一. 以二变量常微分方程为例，我们来考虑不动点的类型及其稳定性. 设方程的一般形式为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}&=f_1(u_1,u_2),\\ \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}&=f_2(u_1,u_2),\end{aligned} \tag{1.1.7}$$

令 $\mathrm{d}u_{1,2}/\mathrm{d}t=0$，解联立方程 $f_{1,2}(u_1,u_2)=0$ 可得到不动点解(定态解)$(u_1^0, u_2^0)$. 在定态解中加入微扰 $(u_1,u_2)=(u_1^0+\delta u_1, u_2^0+\delta u_2)$，利用上面的线性稳定性分析可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\delta u_1\\ \delta u_2\end{pmatrix}=\hat{D}f\begin{pmatrix}\delta u_1\\ \delta u_2\end{pmatrix}. \tag{1.1.8}$$

这里的 2×2 雅可比矩阵为

$$(\hat{D}f)_{ij}=\partial f_i/\partial u_j|_{(u_1^0,u_2^0)},\quad i,j=1,2. \tag{1.1.9}$$

其本征值为

$$s_{1,2}=\frac{1}{2}[T\pm\sqrt{T^2-4\Delta}], \tag{1.1.10}$$

即 $s_1,s_2$ 为特征方程 $s^2-Ts+\Delta=0$ 的两个根. 这里

$$T=\mathrm{tr}(\hat{D}f)=(\hat{D}f)_{11}+(\hat{D}f)_{22}, \tag{1.1.11a}$$

$$\Delta=\det(\hat{D}f)=(\hat{D}f)_{11}(\hat{D}f)_{22}-(\hat{D}f)_{21}(\hat{D}f)_{12}. \tag{1.1.11b}$$

方程(1.1.8)的特征解为

$$\begin{pmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \exp(s_1 t) + c_2 \exp(s_2 t) \\ c_3 \exp(s_1 t) + c_4 \exp(s_2 t) \end{pmatrix}. \tag{1.1.12}$$

当 $T^2 - 4\Delta \geqslant 0$ 时，$s_1, s_2$ 为一对实数解. 在这种情况下(1.1.7)的不动点($u_1^0$, $u_2^0$)有三类：

(1) 当 $s_1 < 0, s_2 < 0$ 时，($u_1^0, u_2^0$)附近所有方向都局域稳定，不动点为稳定结点(stable node)，如图 1-1(a)所示；

(2) 当 $s_1 > 0, s_2 > 0$ 时，($u_1^0, u_2^0$)为不稳定结点(unstable node)，如图 1-1(b)所示；

(3) 当 $s_1 < 0, s_2 > 0$ 或 $s_1 > 0, s_2 < 0$ 时，不动点附近有一个不稳定方向，($u_1^0, u_2^0$)为鞍点(saddle point)，如图 1-1(c)所示.

当 $T^2 - 4\Delta < 0$ 时，$s_1, s_2$ 为一对共轭复根，此时不动点可以有三类：

(1) 当 $T = 2\mathrm{Re}(s_{1,2}) < 0$ 时，($u_1^0, u_2^0$)为稳定焦点(stable focus)，如图 1-1(d)；

(2) 当 $T > 0$ 时，($u_1^0, u_2^0$)为不稳定焦点(unstable focus)，如图 1-1(e)；

(3) 当 $T = 0$ 时，($u_1^0, u_2^0$)为中心点(center)，如图 1-1(f).

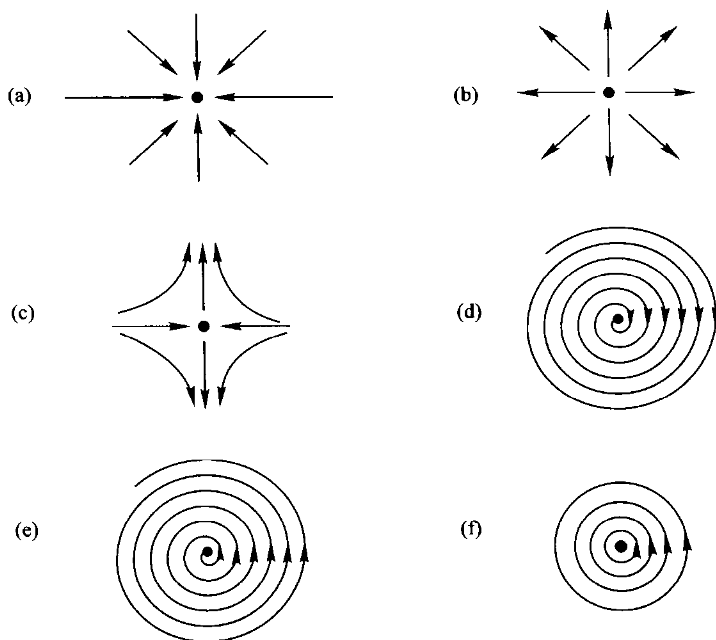



图 1-1 各种不动点及其附近的流型走向

图 1－2 给出了在 $T-\Delta$ 平面上的不动点分布总结图，显示出不同情况下不动点的类型．其中抛物线为临界线 $T^2=4\Delta$，UN、UF、SN、SF、Saddle 分别代表不稳定的结点和焦点、稳定的结点和焦点以及鞍点，两个箭头代表两种分岔方向，我们在下面会详细讨论．

高维情形的不动点类型及其稳定性则要复杂得多，这里不再详细讨论．

### 1.1.3 分岔

当改变系统参量 $R$ 时，系统解的稳定性会发生改变．当旧有的解失稳时，会有新的稳定解代替其出现．这种定性的结构变化称为**分岔**(bifurcation)，有关它的讨论包括研究系统解的数目及解的稳定性的变化．以双变量自治系统为例，如果改变控制参量使得系统的一个鞍点(不稳定)与一个稳定结点相碰，碰后两个不动点消失，则系统经历一个鞍结点分岔．此时对应于图 1－2 中箭头 1 的情形，即参数改变使得稳定结点失稳($\hat{D}f$ 的两个负特征根有一个由负变正)．若改变参量使方程的不动点由稳定焦点变为不稳定焦点($\hat{D}f$ 的两个复根实部由负变正)，系统可能会经历霍普夫分岔，出现极限环(时间振荡解)，如图 1－2 的箭头 2 所示．对高维情形，系统会出现更复杂的分岔情形．

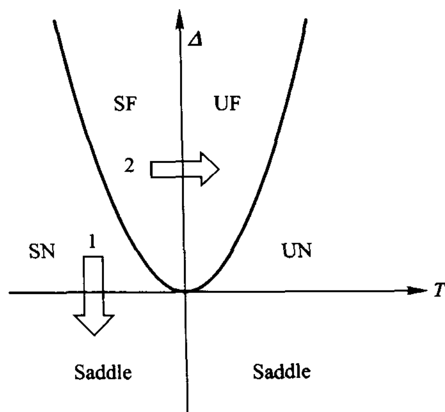



图 1－2 二维自治系统的不动点类型、分布及分岔

一般情况下，不动点解失稳的分岔(对于单控制参量情形)有以下几类普遍的分岔类型：

(1) **鞍结点**(saddle－node)**分岔**：最简单的例子是系统

$$\dot{u}=R-u^2, \tag{1.1.13}$$

当 $R$ 由负变正时，在 $R_c=0$ 处，系统出现稳定的结点 $u_0=\sqrt{R}$，另一个结点 $u_0=-\sqrt{R}$ 不稳定，如图 1－3(a)所示．

(2) **跨临界分岔**(transcritical bifurcation)：最简单的例子是

$$\dot{u}=Ru-u^2, \tag{1.1.14}$$

当 $R<0$ 变为 $R>0$ 时，原来稳定的解(结点)$u_0=0$ 失稳，原来不稳定的解 $u_0=R$ 变得稳定，取代 $u_0=0$ 的解．如图 1－3(b)所示．

(3) **叉型分岔**(pitch－fork bifurcation)：原来的单解当参量改变时失稳，出

现两支新解.例如典型的情形：

$$\dot{u} = Ru - gu^3 \ (g>0), \tag{1.1.15}$$

旧解 $u_0=0$ 在 $R=0$ 处失稳，$R>0$ 时代之以两支 $u_0=\pm\sqrt{R/g}$ 解.

当参数改变时，系统的解分支连续由一支变为另一支，我们称分岔为**跨临界的**(supercritical)；当系统只有分支的失稳，则称分岔为**亚临界的**(subcritical).以叉型分岔为例，在(1.1.15)中，当 $g>0$ 时，系统分岔为跨临界的，而当 $g<0$ 时为亚临界的.这两种情形可对应于相变理论中的二级(连续)相变以及一级(不连续)相变，如图1-3(c)，(d)所示.

(4) **霍普夫分岔**(Hopf bifurcation)：与前面不同，系统不是以一种定态解代替另一个定态解.这类分岔是在原来的不动点解失稳后出现的随时间振荡的解，称为**极限环**.代表性的最简单例子是二维(至少是二维)非线性系统

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -u_2 + Ru_1 - (u_1^2+u_2^2)u_1, \\ \dot{u}_2 &= u_1 + Ru_2 - (u_1^2+u_2^2)u_2, \end{aligned} \tag{1.1.16}$$

我们可以将这个方程的变量$(u_1,u_2)$变为极坐标$(r,\theta)$，即引入 $u_1=r\cos\theta, u_2=r\sin\theta$，则方程化为

$$\begin{aligned} \dot{r} &= Rr - r^3, \\ \dot{\theta} &= 1, \end{aligned} \tag{1.1.17}$$

其中相位 $\theta$ 随时间变化是单调增加的，$r$ 的方程形式则与情形(3)完全相同.但考虑到 $r\geqslant0$，则系统在 $R=0$ 处经历了从 $r=0$ 到 $r=\sqrt{R}$ 的分岔，即当 $R\geqslant0$ 时，系统解由不动点(0,0)变为半径为$\sqrt{R}$的振荡解，频率为1.这种分岔行为可以从图1-3(e)非常清楚地看到.

一般系统的分岔是上述几个基本类型的混合.另外，系统对同一参量可能会有多稳的情形发生，因此在参量改变时，系统的分岔经常会出现所谓的**滞后**现象(hysteresis)，如图1-3(f)所示.

上面分析基于线性稳定性分析.对一般系统，相空间的全局稳定性要通过寻

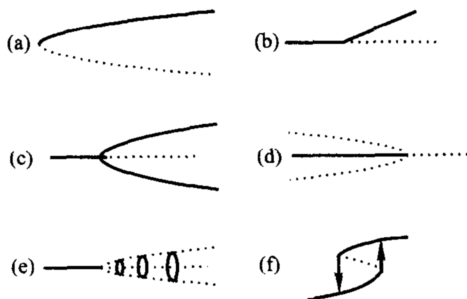



图1-3　几种常见的分岔

找系统的李雅普诺夫函数(势函数)来描述.但对一般非线性系统,要找到这样一个势函数通常非常困难.

## 1.2 低维非线性系统的混沌动力学

### 1.2.1 混沌与蝴蝶效应

对于二维非线性系统来说,其吸引子或者是不动点,或者是极限环,不会出现无规则运动.当相空间维数大于2时(注意,这里我们讨论的是时间连续的自治系统;对于映像,一维映像就可能出现混乱的运动),系统随时间演化的轨道就不仅仅是上述的几种类型.其中一种流被称为混沌流(chaotic),其时间的演化行为是混乱的,不规则的.一个典型的例子是洛仑兹(Lorenz)模型[11].它是由美国科学家洛仑兹在研究大气湍流的行为时从高维的 Navier-Stokes 方程约化而来的,只保留了三个变量.其方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(y-x) \\ -xz+rx-y \\ xy-bz \end{pmatrix}. \tag{1.2.1}$$

当 $\sigma>0, b>0$ 时,其相空间体积随时间变化是收缩的,即

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \int_V \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -(\sigma+1+b)V<0, \tag{1.2.2}$$

即系统的相体积以指数衰减速度收缩:

$$V(t) = V(0)\exp[-(\sigma+1+b)t], \tag{1.2.3}$$

说明洛仑兹系统是一个耗散系统.这样在一个三维的相空间中,系统的吸引子维数小于3.我们关心的是在维数小于3的吸引子上的运动是否规则.在图1-4(a)中,我们给出了当 $r=28, \sigma=10, b=8/3$ 时系统的演化轨迹.可以看到,系统的运动在长时间之后局限于三维相空间的一个有限区域内(在三维相空间中的测度为零),但在这个有限区域中系统的运动是混乱的.这可以由图(b)中 $x(t)$ 的演化看出来.我们从原本非常相近(肉眼无法分辨)的初始点出发,随时间的演化,可以看到两条本来几乎重合的轨迹迅速分开,最后两条轨道变得毫无关联了.这就是所谓的"蝴蝶效应"(butterfly effect)("在一个地方蝴蝶振动一下翅膀可能会导致在另一个地方的龙卷风",比喻一个小的偏离会导致实质完全不同的结果),它形象地描述了混沌轨道对初始条件的敏感依赖性(指数发散).混沌运动反映了确定性系统(系统运动方程由牛顿方程给出,且无噪声)的内在随机性.

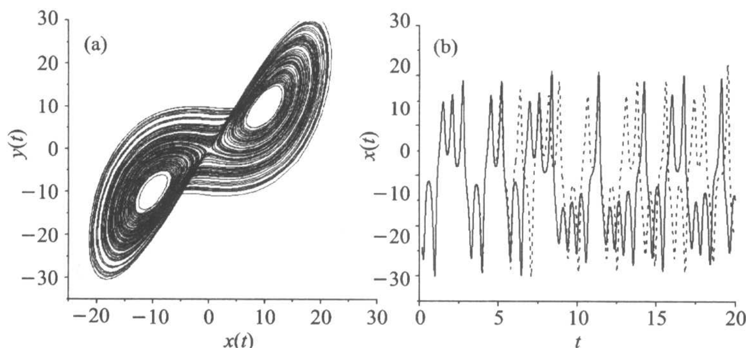



图 1－4　(a) 典型的 Lorenz 吸引子；(b) $x(t)$的时间演化，两条初始难以分辨的轨道迅速分开

### 1.2.2　混沌行为的刻画

混沌运动的描述方式有多种.最直接的方法是观察动力学系统的时间演化.为了对运动的定性有确切的结论，还需要有比较可靠的分析方法.这里简单列举几个常用的手段.

1. 庞加莱截面(Poincare surface of section)：取相空间中的一个面(低于系统的相空间维数)，当系统的轨道穿过这个面时记下轨迹与面交点的位置，然后看这些点的分布情况.以三维系统 $U=(u_1,u_2,u_3)$为例，如取 $u_3=0$ 作为截面，可以得到截面上点$(u_1^0,u_2^0)$的分布.如果系统运动是周期的，在截面上将只有有限个分立的点；如果运动是准周期的，截面上点的分布是连续线.如果系统运动是混沌的，可以看到在截面上有无穷多点杂乱地分布.

2. 功率谱(power spectrum)：对时间序列 $u(t)$，可对其进行傅里叶变换计算功率谱：

$$P(\omega) = \left|\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\exp(\mathrm{i}\omega t)\mathrm{d}t\right|^2, \tag{1.2.4}$$

如果 $u(t)$是周期的，我们可以看到其功率谱只有有限的分立的尖峰；若 $u(t)$是准周期的，其功率谱存在若干个相互不可公度的频率，且频谱分布密集但较规则；当 $u(t)$是混沌的，$P(\omega)$将表现出宽带分布，即会在 $\omega$ 的一个范围内整体有一个分布(类似于噪声谱).

3. 自关联函数(autocorrelation function)：我们可以分析时间序列 $u(t)$的自关联函数：

$$C(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T u(t)u(t+\tau)\mathrm{d}t. \tag{1.2.5}$$

若 $u(t)$是规则的，自关联函数就会保持不变或者是无衰减地振荡；若 $u(t)$是混

沌的,$C(\tau)$就随 $\tau$ 迅速衰减(几乎以指数形式).

功率谱 $P(\omega)$与关联函数 $C(\tau)$之间有密切的联系.利用 Wiener-Khinchin 定理可知,$P(\omega)$正比于 $C(\tau)$的傅里叶变换:

$$P(\omega) \propto \left| \lim_{T\to\infty} \int_0^T C(\tau)\exp(\mathrm{i}\omega\tau)\mathrm{d}\tau \right|, \tag{1.2.6}$$

所以,若 $C(\tau)$以指数形式衰减,$C(\tau) \propto \exp(-\lambda\tau)$,则功率谱为

$$P(\omega) \propto (\omega^2 + \lambda^2)^{-1/2}, \tag{1.2.7}$$

即 $P(\omega)$是一个 Lorentz 分布.

4. 李雅普诺夫指数:为了精确描述相邻轨道的发散(收缩)程度,我们经常用到的是李雅普诺夫指数.设有两条相邻轨道 $U(t)$和 $U(t)+\delta U(t)$,随时间推移,轨道的偏差设为 $\|\delta U(t)\| = \|\delta U(0)\| \exp(\lambda t)$. $\lambda>0$ 意味着相邻轨道指数发散.实际计算中,由于轨道的回归性(吸引子),$\|\delta U(t)\|$ 会随时间演化出现饱和,因此需要每隔一段时间对其进行重整化.若相空间是 $N$ 维的,则系统的切空间有 $N$ 个本征方向,我们就需要计算相应的 $N$ 个指数$\{\lambda_i, i=1,2,\cdots,N\}$(通常把所有指数从大到小排列,$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots$),称为李雅普诺夫指数谱.

有了这个指数谱,我们就可以对吸引子的性质有较为精确的了解.如果 $\lambda_1<0$,则吸引子为稳定的结点;如果 $\lambda_1=0, \lambda_2<0$,则系统的运动是周期的(极限环);若 $\lambda_1=\lambda_2=0, \lambda_3<0$,系统的运动是准周期的,当所有指数中的前 $M$ 个指数为零,则系统的运动是高维准周期,吸引子为高维($M$ 维)环面.当系统的最大指数为正时,系统的运动是混沌的;若系统有超过一个指数大于零,则称系统是**超混沌**的(hyperchaotic).

利用李雅普诺夫指数谱随系统参数的变化,我们还可确认系统的分岔行为.例如后面的倍周期分岔,在指数谱的变化上就表现为系统的第二个指数不断由负值碰零.

数值上具体计算李雅普诺夫指数的方法有多种,这些方法在有关非线性动力学的著作文献中都有介绍[12~14],读者可参考后面引用的文献和书籍,这里不再详述.

除上述一些对混沌动力学的刻画方式外,还有一些统计量可作为判断的依据,如 Kolmogorov-Sinai(KS)熵,吸引子维数等.这些量的引入又把混沌动力学研究与统计力学与分形等相关领域紧密结合起来,而这些量本身又紧密联系着前面的量.例如,KS 熵和吸引子的 Hausdorff 维数都与李雅普诺夫指数谱有密切的定量关系,详细讨论可参考相关文献[1~14].

从前面的讨论可以看到,如果系统的运动是混沌的,则系统运动轨道对初始条件和小的扰动都是非常敏感的,小的偏差就会使得运动很快偏离原来的轨道;另一方面,由于吸引子的回归性质,系统的运动轨道又不会跑到无穷远,运动可

以与先前的轨道充分接近.这就导致混沌吸引子复杂的拓扑结构.混沌的这两个特点(指数发散、回归性)反映出混沌运动的本质在于拉伸和折叠,这一点由斯梅尔(Smale)给出了非常精彩的描述(称为斯梅尔马蹄).我们可以从下面的耗散面包师变换看到:

$$x_{n+1}=2x_n \mod 1,$$
$$y_{n+1}=\begin{cases} ay_n, & x_n\in[0,1/2),\\ 1/2+ay_n, & x_n\in[1/2,1].\end{cases} \tag{1.2.8}$$

这里 $a<1/2$.这个变换系统的两个李雅普诺夫指数 $\lambda_x=\lg 2>0$, $\lambda_y=\lg a<0$,系统运动是混沌的.两个指数一个大于零,一个小于零,运动在 $x$ 方向上是拉伸的,但是当拉伸超过 1/2 时,运动在 $y$ 方向上就出现折叠.这使得初始相近的两条轨道很快分开.

## 1.3 通向混沌的道路

很长时间以来,人们对于湍流形成的动力学机制一直不太清楚.自 1963 年洛仑兹研究了由大气流体力学方程简化的模型并发现混沌现象以来,人们认识到低自由度系统由于非线性也可以出现复杂的行为.作为进一步理解湍流的准备,人们感兴趣于小自由度的非线性系统随着参数变化其运动是怎样从规则变成混沌的.近几十年的研究结果使得人们认识到有几类具有普遍性的通往混沌的道路.下面我们一一加以阐述.

### 1.3.1 倍周期分岔通向混沌(Feigenbaum 道路)

Grossman 与 Thomae(1977)[15],Feigenbaum(1978)[16,17],Coullet 与 Tresser(1976)[18,19]及其他研究者研究了如下的 Logistic 映像:

$$x_{n+1}=f(x_n)=ax_n(1-x_n). \tag{1.3.1}$$

这个模型来源于生态学上昆虫数目变化的动力学,它同时考虑了增长和抑制两种因素,因而揭示出的现象具有普遍的意义.由于方程右边为抛物线函数,因此它是一种抛物线映射.另外由于函数具有一个峰值,因此称为单峰映射.Logistic 映射是最简单的揭示混沌行为的模型之一,可以用符号动力学理论进行很好的描述[20].

图 1-5(a)给出了 $x_n$ 迭代与 $a$ 的分岔图.可以看到,随着 $a$ 的增加,系统首先是周期 1 的解(对应于映像即为不动点解)$x=f(x)$,然后在 $a=a_1$ 处周期 1 解失稳,通过叉型分岔为周期 2 解 $x=f(f(x))$所替代.继续改变 $a$,可以看到一系列分岔,系统的解由周期 2 变为周期 4,周期 8,16,…,一直到 $a=a_\infty=$

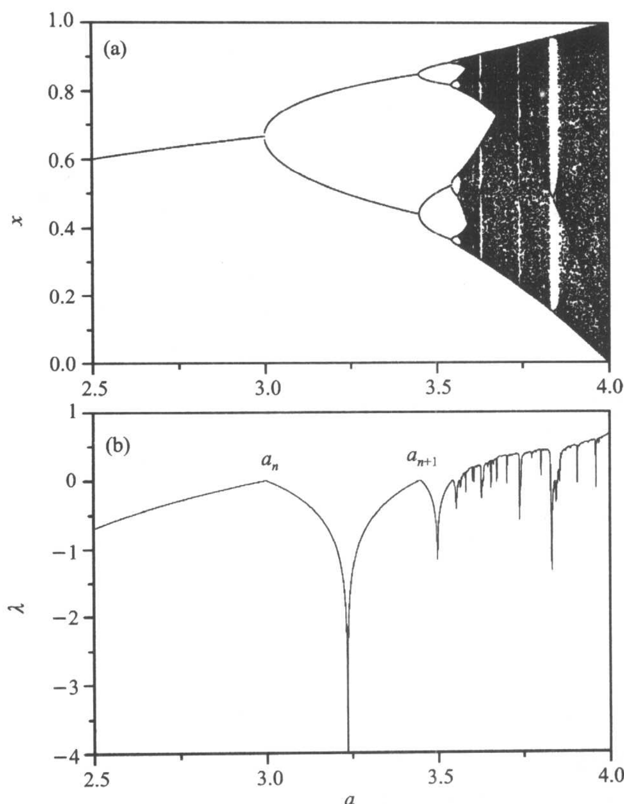



图 1-5 Logistic 映像的 $x-r$ 分岔图

3.569 945 6…处，系统出现混沌运动．这就是典型的倍周期分岔到混沌的道路．在混沌区系统会反复出现不同的周期窗口，在这些周期窗口里我们都可以看到倍周期分岔到混沌的过程．图(b)给出了相应于分岔过程的李指数的变化．可以看到，在每一个倍周期分岔点，李指数都碰零；李指数出现的一系列局域极小值对应于超稳定周期轨道．

设周期区 $2^{n-1} \to 2^n$ 的分岔点为 $a_n$，则 $a_n$ 有以下标度：

$$a_n = a_\infty - c\delta^{-n}, \quad n \gg 1, \tag{1.3.2}$$

其中 $c$ 为一常数，$\delta$ 为一普适常数，称为 Feigenbaum 常数：

$$\delta = 4.669\ 201\ 609\ 1\cdots. \tag{1.3.3a}$$

另外，为了研究倍周期分岔序列几何尺寸的标度性质，可以引入最靠近 $x=1/2$ 的周期 $2^n$ 的点间的距离 $d$，在各个倍周期分岔点的距离间有以下关系：

$$d_n / d_{n+1} = -\alpha \quad n \gg 1; \tag{1.3.3b}$$

其中

$$\alpha = 2.502\ 907\ 850\cdots. \tag{1.3.4}$$

借助相变中的重整化群方法,人们可以确切地计算出上面两个常数.值得注意的是,这两个常数具有普适性,在很多倍周期分岔的系统中都可以发现它们.

这个简单的映像来源于许多具体的背景,并包含最简单的非线性项,但其动力学表现出非常丰富复杂的行为.由于系统的简单性,很多问题可以解析求解,因此 Logistic 映像在混沌动力学研究的进程中曾经起到非常重要的作用.鉴于这个系统是研究混沌动力学代表性的模型之一,在各种综述和著作中均有涉及,我们限于篇幅,不再对此进行详尽讨论.

### 1.3.2 由阵发通向混沌(Pomeau-Manneville 道路)

阵发是指一个信号随机地在长时间的规则运动(层流相)与短时间的无规则爆发(湍流相)之间的转换.这种通向混沌的机制是由 Pomeau 与 Manneville 于 1979 年提出的[21].他们讨论了洛仑兹系统:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(x - z), \\ \dot{y} &= -xz + rx - y, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

对于 $y(t)$的时间演化,他们观察到这样的现象:当 $r < r_c$时,$y(t)$是周期运动;当 $r > r_c$时,周期振荡被混沌的爆发打断.随着 $r$ 的增加,这些混沌脉冲爆发越来越频繁,一直到整个运动变成混沌,如图 1-6 所示.

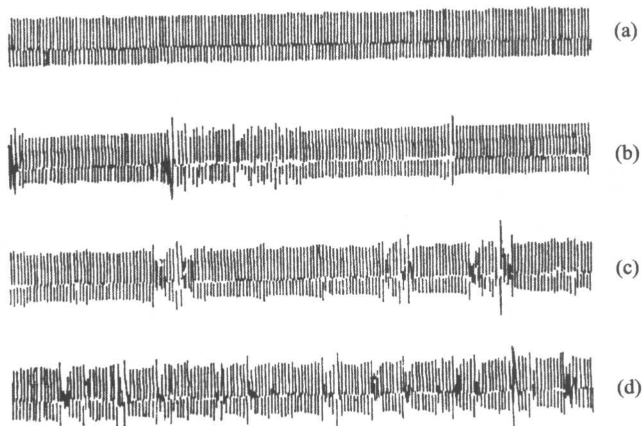



图 1-6 混沌阵发

上述阵发行为可以如下理解.我们可构造洛仑兹系统的庞加莱映射,$r < r_c$

时的周期振荡解对应于映射中的稳定不动点，当 $r > r_c$时不动点失稳．通常不动点失稳本质上有三种不同方式，这三种方式导致系统阵发的三种不同类型[22,23]．洛仑兹系统的阵发属于第一类(逆向切分岔)．对每一种阵发而言，系统都是在失稳点附近的失稳过程中经历很长的狭窄“隧道”．这个长时间的滞留导致很长的“层流”相(周期运动)．离开这个“隧道”后，运动又变得混沌．由于吸引子的回归性，运动还会回到不稳定不动点附近，从而开始新的规则运动与混沌阵发的交替．类似行为在 Logistic 映射的某些参数区也可观察到．

定义层流相驻留的时间长度为 $l$，亦即相邻两次阵发之间的时间间隔，我们可以研究其统计规律．其统计规律对以上三类阵发而言会表现出不同的行为．设系统的控制参量为 $r$，出现阵发的临界点为 $r_c$．定义 $\varepsilon = r - r_c$，则对于一类阵发，$l$ 的统计分布为

$$P(l) \sim \varepsilon\{1 + \tan^2[\arctan(c\varepsilon^{-1/2})] - l\varepsilon^{1/2}\}, \tag{1.3.6}$$

其中 $c \sim \varepsilon^{-1/2}$ 为层流区 $x$ 的最大值．相应的平均分布为

$$\langle l \rangle \sim \varepsilon^{-1/2}, \quad \varepsilon \to 0. \tag{1.3.7}$$

对第二类阵发：

$$P(l) \sim \varepsilon^2 \exp(4\varepsilon l)/(\exp(4\varepsilon l) - 1)^2, \tag{1.3.8}$$

$$\langle l \rangle \sim \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon \to 0. \tag{1.3.9}$$

对第三类阵发：

$$P(l) \sim \varepsilon^{3/2} \exp(4\varepsilon l)/(\exp(4\varepsilon l) - 1)^{3/2}, \tag{1.3.10}$$

$$\langle l \rangle \sim \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon \to 0. \tag{1.3.11}$$

三种阵发行为中，第一、三类均在实验中观察到[24](Bernard 对流，RLC 电路等)．理论的统计性质在实验上也得到了验证．第二类阵发就目前所知尚未在实验中得到证实．另外有许多关于混沌阵发的工作，提出了一些新的阵发类型和机制，有兴趣的读者可参考相关文献．

### 1.3.3 通过准周期通向混沌(Ruelle-Takens 道路)

这种道路与系统的霍普夫分岔有密切的关系．与前两种导致混沌的机制有本质不同，霍普夫分岔意味着系统有一个新的振动频率出现．最简单的就是焦点的失稳．对焦点的稳定性分析可知其本征值是复的，其中虚部是一个振荡频率．在临界点以下，这个振荡由于负的实部而衰减；但当系统参量越过临界点时，焦点失稳，这个小的振荡就被放大，由于非线性作用而抑制饱和，使得系统实现周期振荡，振荡频率对应于本征值的虚部．

1944 年，朗道提出了一条通向湍流的道路[25]．他认为湍流的出现是系统通过无穷的霍普夫失稳而不断出现新的(非公度)频率，最后出现无穷多频率的结果，如图 1－7 所示．也就是说，系统湍流态的出现首先是周期运动，然后是准周

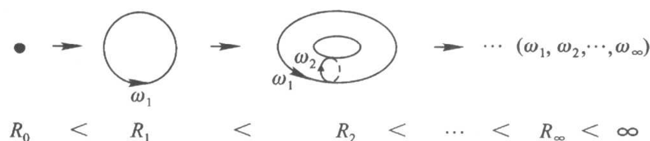



图 1-7 Landau 关于通向湍流的道路

期运动，高维准周期，…，直至出现无穷高维准周期. 这个道路在实验中被证明并不相符. 1971 年，Ruelle 和 Takens 证明了四频不稳定性[26]. 1978 年 Newhouse，Ruelle 和 Takens 从理论上证明了系统出现三个非公度频率（称为三维环面）时就存在不稳定的可能性[27]. 在某种无穷小的微扰作用下，三维环面可被破坏而出现混沌运动. 实验中观察到，当系统出现两个非公度的频率时，继续改变参数，时间序列的功率谱就变为连续的，说明系统已经出现混沌运动.

这种由准周期到混沌的机制在 1982 年由 Dubois 和 Berge 在 Bernard 对流实验中观察到[28]. 他们测量了温度的时间序列 $T(t)$ 并重构了二维庞加莱截面 $[T(t), \dot{T}(t)]$（在 $t = n\tau$，$\tau$ 为时间间隔，$n$ 为整数）. 图 1-8 给出了庞加莱截面在增加雷诺数时的变化. 图(a)给出截面的取法. 在图(b)中由连续的闭合曲线可以看到运动是准周期的（二维环面，记为 $T^2$）. 当增加雷诺数时，闭合曲线扭曲[图(c)]，最后破裂[图(d)]，变成一个奇怪吸引子.

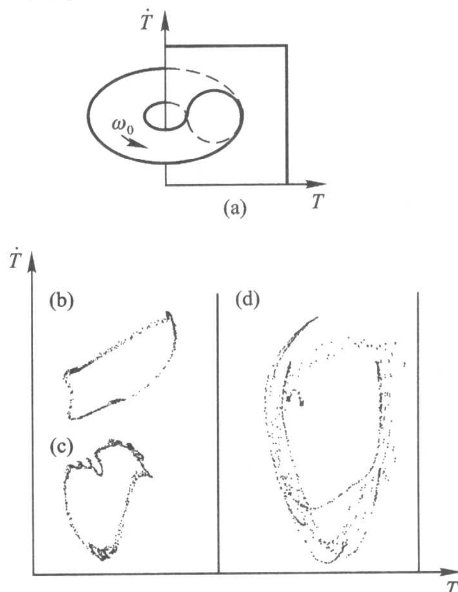



图 1-8 Bernard 对流实验中增加 $R$ 时 $[T(t), \dot{T}(t)]$ 的变化

另一个实验证明由 Gollub 和 Swinney 于 1975 年在泰勒不稳定性实验中观察到[29]. 实验装置由内外两个圆桶构成,两圆桶之间充满液体. 内桶以 $\Omega$ 的角速度旋转,外桶保持静止. 当 $\Omega$ 很小时,液体由于粘滞与内桶一同旋转;当 $\Omega$ 超过一个阈值 $\Omega_c$ 时,液体与内桶的同步旋转失稳,液体除与内桶同向旋转外,还出现上下的旋转,形成元胞,见图 1-9. 继续增加 $\Omega$,这些元胞会发生周期的或多重周期振荡. 在两次霍普夫分岔后液体运动就变为混沌的. 这可以从图中的功率谱看出来. 用重构庞加莱截面(用液体的径向速度 $v(t)$ 的方法)同样可以看到二维环面在 $\Omega$ 增加时破裂的情形.

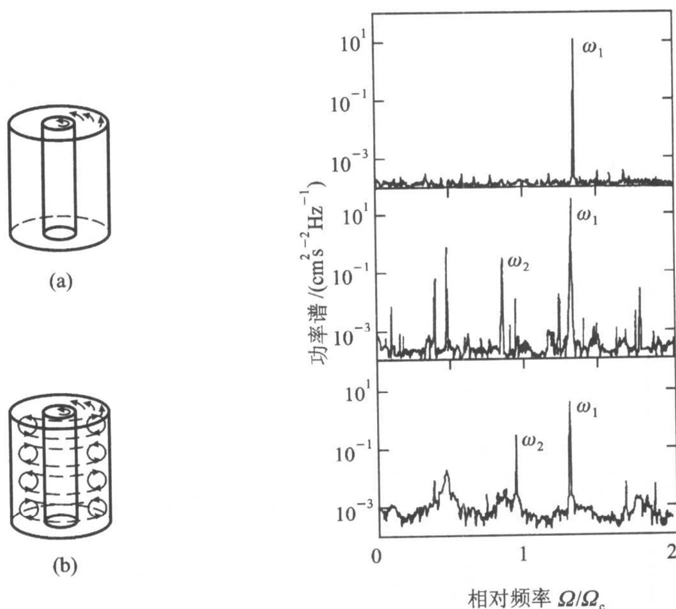



图 1-9 泰勒不稳定性实验中增加 $\Omega$ 时功率谱的变化

上面两个实验都证实了 Ruelle-Takens-Newhouse 通向混沌的道路. 在理论上,用简单的映射也得到了充分的研究[30]. 用周期驱动的转子系统在耗散情况下可以得到一维的圆映射:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi\theta_n) \quad \text{mod } 1, \tag{1.3.12}$$

其中 $\Omega$ 为驱动力频率与转子固有频率的比值,$K$ 为驱动强度,$\theta_n$ 为转子相位,由于其周期性而取模 1. $K$ 在这里的作用类似于流体力学中的雷诺数,用以度量系统的非线性强度. 我们可以计算系统的转数(winding number,对应于转子实际转动频率与周期驱动频率的比值):

$$\omega = \lim_{n\to\infty}\frac{f^n(\theta_0)-\theta_0}{n}. \tag{1.3.13}$$

没有非线性项时($K=0$),很显然 $\omega=\Omega$;当 $K\neq 0$ 时,$\omega$ 需要具体计算.系统的转数是有理数还是无理数很重要.当 $\omega$ 为有理数 $m/n$ 时,说明系统处于锁模状态.

当 $K>0$ 时,有理数的 $\omega$ 会在 $K$ 的有限区域内保持有理数,这个区域随着 $K$ 的增大而扩大.在 $|K|<1$ 时,我们在 $K-\Omega$ 相图中可以看到一系列的锁模状态,这些区域被称为阿诺德舌头(Arnold's tongues),如图 1-10 所示.这些舌头中尤其以 $\omega=0/1,1/1,1/2,1/3,2/3,\cdots$ 等最明显.我们也可以固定 $K$ 来观察 $\omega-\Omega$ 的关系,可以看到一系列的共振台阶.这些共振台阶在 $|K|<1$ 时与无理数区域交错分布.当 $|K|=1$ 时,这些阿诺德舌头(共振台阶)边界融合到一起,在此时 $\omega-\Omega$ 的关系可以连续看到所有的共振台阶,形成康托(Cantor)集(分形结构),称为魔鬼阶梯(devil staircases).因此,$|K|=1$ 时的阿诺德舌头(魔鬼阶梯)是最完整的.当 $|K|>1$ 时,阿诺德舌头区域继续扩大,导致这些舌头开始相互重叠交叉,映像称为不可逆的,系统在舌头的重叠区域出现混沌运动.因此,在 $|K|>1$ 的区域,混沌区与非混沌区相互交织在一起.

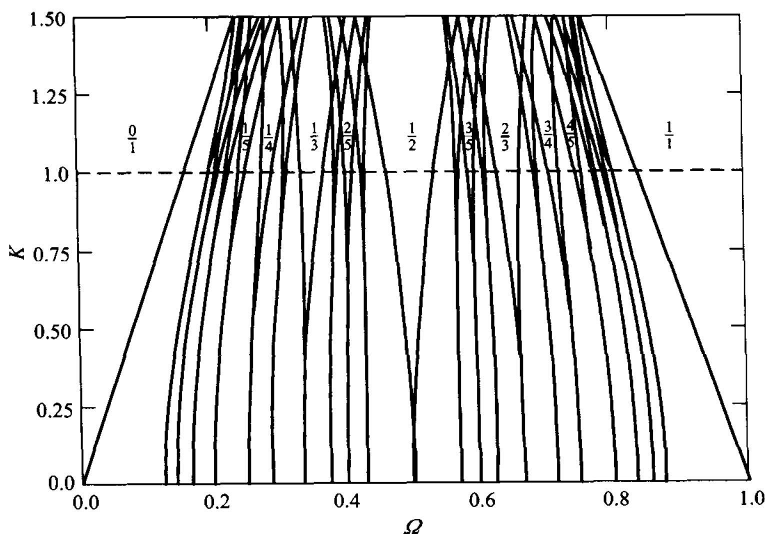



图 1-10　圆映射在 $K-\Omega$ 相图上的阿诺德舌头

上述的阿诺德舌头及其排列顺序可以很方便地用法里树(Farey tree)产生出来.其操作为用两对不可约整数产生新的舌头:

$$\frac{p}{q}\oplus\frac{p'}{q'}\equiv\frac{p+p'}{q+q'}. \tag{1.3.14}$$

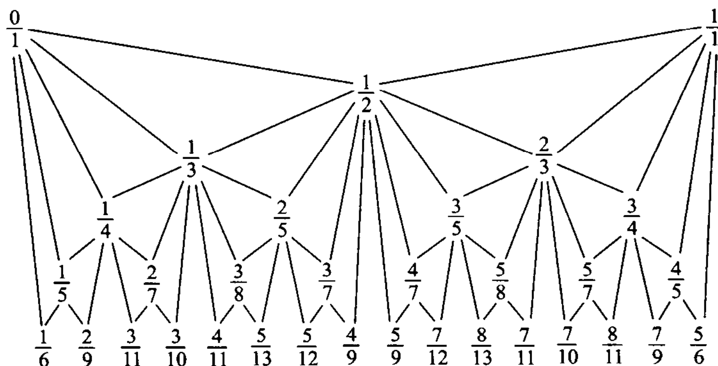



图 1－11 法里树

因此,用 0/1 和 1/1,我们就可以利用上面的法里操作产生法里树,从而将所有的阿诺德舌头产生出来,如图 1－11 所示.在 $|K|<1$ 的区域中,阿诺德舌头之间的转数是无理数,对应于准周期运动.利用这个简单的圆映射,人们研究了从准周期到混沌的转变.圆映射有着丰富的动力学行为,有兴趣的读者可以参考相关书籍和综述.

需要指出的是,Ruelle－Takens－Newhouse 机制只是说明三维环面是拓扑结构不稳定的,这并不意味着高维准周期环面不能稳定存在.1983 年,Grebogi,Ott 和 Yorke 通过数值计算表明,平滑的非线性扰动不一定会破坏三维准周期环面[31].他们研究了两个耦合的圆映射:

$$\begin{cases}\theta_{n+1}=\theta_n+\omega_1+\varepsilon P_1(\theta_n,\varphi_n),\\ \varphi_{n+1}=\varphi_n+\omega_2+\varepsilon P_2(\theta_n,\varphi_n),\end{cases} \tag{1.3.15}$$

其中 $\varepsilon$ 为耦合强度(同时也是非线性强度),$\theta_n$ 与 $\varphi_n$ 都取模 1,$P_{1,2}$ 为 $\theta_n$,$\varphi_n$ 为周期函数,$\omega_{1,2}$ 之间是不可约的(非公度),且他们均为无理数,即不存在非零整数 $p,r,q$ 使得

$$p\omega_1+q\omega_2+r=0. \tag{1.3.16}$$

下面的讨论取 $P_{1,2}$ 为 $A_{r,s}\sin[2\pi(r\theta+s\varphi+B_{r,s})]$ 的傅里叶和,在取和时只取整数对 $(r,s)$ 为 $(0,1)$,$(1,0)$,$(1,1)$,$(1,-1)$ 的项,即除此之外的 $A_{r,s}=0$.

对于这个映射,Grebogi 等计算了耦合圆映射的头两个李雅普诺夫指数 $\lambda_{1,2}$,在计算中随机选取 $\omega_{1,2}$,$A_{r,s}$ 和 $B_{r,s}$,最后统计 $\lambda_{1,2}$ 等于零,小于零及大于零的百分比.表 1－1 给出了他们的结果:

表 1-1 耦合圆映射吸引子统计

| 吸引子 | 李雅普诺夫指数 | $\varepsilon/\varepsilon_c=3/8$ | $\varepsilon/\varepsilon_c=3/4$ | $\varepsilon/\varepsilon_c=9/8$ |
|---|---|---|---|---|
| 三频准周期 | $\lambda_1=0,\lambda_2=0$ | 82% | 44% | 0% |
| 二频准周期 | $\lambda_1=0,\lambda_2<0$ | 16% | 38% | 33% |
| 周期 | $\lambda_1<0,\lambda_2<0$ | 2% | 11% | 31% |
| 混沌 | $\lambda_1>0$ | 0% | 7% | 36% |

表中 $\varepsilon_c$为一临界值,当 $\varepsilon>\varepsilon_c$时映射不可逆. 从上表可以清楚看出,在较弱的非线性强度下,三频准周期可以稳定存在.

在实验上,三频准周期也可以观察到. 1982 年,Libchaber 等人在有磁场下的 Bernard 对流实验中观察到三频准周期运动的存在[32].

实际上,高维准周期总是可以存在的. 一些较为平稳的扰动并不一定将其破坏. 我们在后面的讨论中还要提到这一点. 顺便指出,高维准周期是可以稳定存在的,但高维准周期环面如何破裂进入混沌状态至今还是一个非常复杂的问题,这种机制的讨论至今仍在进行. 这个方面的讨论与近年来对所谓"奇异非混沌吸引子"的讨论密切相关,有兴趣的读者可以参阅后面文献.

上面我们讨论了通向混沌的三种有代表性的道路. 实际上,三种不同道路对应于不同的分岔机制. Feigenbaum 道路实际上来源于系统的叉型分岔,而 Manneville-Pomeau 道路与系统的切分岔直接联系. Ruelle-Takens-Newhouse 机制则来自于系统的霍普夫分岔. 这些分岔正如我们前面所指出的,对应于系统不同的对称性,因此具有一定的普遍性. 现在已经发现许多的混沌机制是这些机制的组合,从而可以观察到更为复杂的动力学. 另外,考虑到时空系统,其出现时空混沌的机制则是目前探讨的热点,有许多问题亟待解决.

### 1.3.4 混沌内部的变化:危机

这里所说的危机(crisis)是指混沌吸引子与一个共存的不稳定不动点或周期轨道发生相碰时所出现的动力学行为[2]. 这种碰撞在很多情况下会导致混沌吸引子的突然变化,比如尺寸的突然改变. 一个很简单的例子是 Logistic 映像在周期 3 窗口发生的混沌吸引子突然膨胀的现象,如图 1-12 所示,系统存在一条不稳定周期 3 轨道,当它在 $a=a^*$ 处与系统的混沌吸引子相交时,系统一下子变成大范围的混沌运动,三片不相连的混沌区连在一起. 这种现象称为危机. 根据不同的分岔类型,危机也分为几种,这里就不再详述.

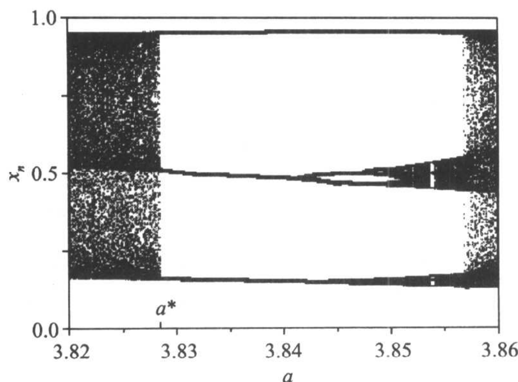



图 1-12 Logistic 映像中的危机

# 1.4 保守系统的混沌

## 1.4.1 概述

前面所讨论的混沌动力学都是关于耗散系统的.耗散系统的混沌本质是一个拉伸与折叠的过程.在研究中另一大类系统——保守系统(哈密顿系统)是历来人们研究的重点.与耗散系统根本不同,保守系统没有相空间的收缩,因而谈不上吸引子.历史上关于混沌的讨论其实首先是在保守系统中进行的.最著名的是19世纪末庞加莱关于三体问题的论述及20世纪五六十年代 Kolmogorov, Arnold 和 Morse 的 KAM 定理的证明[33~35].本节将讨论在保守系统中的混沌动力学行为.

我们讨论的系统具有哈密顿量

$$H = H(p, q, t), \tag{1.4.1}$$

其中 $q = (q_1, q_2, \cdots, q_N)$ 为系统的正则坐标, $p = (p_1, p_2, \cdots, p_N)$ 为正则动量.系统的运动由正则方程给出:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \partial H / \partial p, \\ \dot{p} &= -\partial H / \partial q. \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

由刘维定理,系统在相空间的相体积守恒:

$$\operatorname{div}(j) = \sum \left( \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) = 0. \tag{1.4.3}$$

相体积不变就意味着在保守系统中在相空间没有吸引区,例如没有吸引的不动点(如结点,焦点等),没有吸引的极限环,也没有吸引的奇怪吸引子.但正如在后

面所讨论的,保守系统也有混沌运动,只不过保守系统在相空间的混沌区常常是与规则运动区交织在一起的.

历史上对保守系统的混沌研究的兴趣主要来自于两个方面.一个是天体力学中的三体问题.庞加莱在19世纪末就讨论了天体中三体系统(如日一月一地系统)的运动规律.与二体问题不同,三体问题无法解析求解,必须用摄动理论进行微扰近似.庞加莱发现,即使在很小的微扰下,系统也存在无穷多个稠密分布的对扰动不稳定的轨道.这个问题在后来才由 Kolmogorov, Arnold 和 Moser 解决,并揭示了哈密顿系统混沌的本质.第二个方面,对保守系统混沌的研究紧密联系着统计物理的基本问题.针对统计物理中不可逆问题的探讨,为从微观动力学(时间可逆的)上理解宏观不可逆问题,玻尔兹曼等提出著名的"遍历性假设"(ergodicity hypothesis),即假设足够长的时间内系统的轨迹可以几乎覆盖等能面.这样系统的时间平均就可以用相空间的平均来代替.但这个假说的正确性引起了人们的争论.这个争论直接联系着保守系统的混沌动力学.下面我们先结合第一个方面进行讨论.

### 1.4.2 可积系统

在讨论混沌行为之前,我们首先讨论系统的可积性.在相空间中,系统状态完全由$(q(t),p(t))$决定,其演化由正则方程(1.4.2)决定.演化形成相空间中的轨迹(流),它有如下特点:

(1) 每条轨迹的演化惟一地由其初态决定;

(2) 两条不同的轨迹不能相交;

(3) 相空间中的流保体积,即使系统的哈密顿量显含时间.

一个 $N$ 维系统是可积的,如果存在 $N$ 个孤立的运动积分(守恒量)$J_i$,使得

$$J_i(q,p)=C_i,\quad i=1,2,\cdots,N. \tag{1.4.4}$$

这里 $C_i$ 是常数.对不显含时间的哈密顿系统,哈密顿量本身就是一个孤立积分:

$$H(q,p)=E, \tag{1.4.5}$$

其中 $E$ 是系统的总能量,为一个常数.如果系统是可积的,这 $N$ 个运动积分就会把运动轨迹限制在 $2N$ 维相空间中的 $N$ 维表面上.这样的系统是可解的.我们可以找到一个正则变换把变量$(q,p)$变为新的变量$(\theta,J)$:

$$q,p=\frac{\partial S(q,J)}{\partial q}\leftrightarrow J,\theta=\frac{\partial S(q,J)}{\partial J}. \tag{1.4.6}$$

这样,在新的坐标中系统的哈密顿量只依赖于新的动量 $J$,即 $S(q,J)$是如下哈密顿-雅可比方程的一个解:

$$H\left(q,\frac{\partial S(q,J)}{\partial q}\right)=H(J). \tag{1.4.7}$$

这样作用量－角度变量的运动方程为

$$\begin{aligned} \dot{J} &= -\partial H/\partial\theta = 0, \\ \dot{\theta} &= \partial H/\partial J = \omega(J). \end{aligned} \tag{1.4.8}$$

这组方程可以完全求解：

$$\begin{aligned} J &= C, \\ \theta &= \omega t + \delta. \end{aligned} \tag{1.4.9}$$

在后面讨论中，为了方便，我们总把可积系统的哈密顿量写为 $H_0$.

### 1.4.3 摄动理论与小分母问题：KAM 定理

从上面讨论可以看到，对可积系统而言，运动是完全可解(至少理论上)而且是规则的．现在我们在 $H_0$ 的基础上加一个扰动 $\varepsilon H_1$，看扰动会对哈密顿系统带来什么样的效应．

考虑如下的哈密顿系统(为方便，考虑二维系统)：

$$H(J,\theta) = H_0(J) + \varepsilon H_1(J,\theta), \tag{1.4.10}$$

其中 $J=(J_1,J_2)$，$\theta=(\theta_1,\theta_2)$，$\varepsilon$ 为摄动强度．我们试图求解哈密顿－雅可比方程：

$$H(\partial S/\partial\theta,\theta) = H_{00}(J'). \tag{1.4.11}$$

把函数 $S$ 写成摄动的形式：

$$S(J',\theta') = \theta\cdot J + \varepsilon S_1(J',\theta), \tag{1.4.12}$$

将左边的 $H$ 展开到 $\varepsilon$ 阶：

$$H_0(J') + \varepsilon\frac{\partial H_0}{\partial J}\cdot\frac{\partial S_1}{\partial\theta} + \varepsilon H_1(J',\theta) + O(\varepsilon^2) = H_{00}(J'). \tag{1.4.13}$$

由于左边也要不显含 $\theta$ 变量，这可以确定 $S_1$．由 $\omega=\partial H_0/\partial J$ 可得：

$$\omega\cdot\frac{\partial S_1(J',\theta)}{\partial\theta} = -H_1(J',\theta). \tag{1.4.14}$$

对 $\theta$ 变量的处理，可以把 $S_1$ 和 $H_1$ 按傅里叶级数展开：

$$S_1(J',\theta) = \sum_{k\neq 0} S_{1,k}(J')\exp(\mathrm{i}k\cdot\theta), \tag{1.4.15a}$$

$$H_1(J',\theta) = \sum_{k\neq 0} H_{1,k}(J')\exp(\mathrm{i}k\cdot\theta), \tag{1.4.15b}$$

这里 $k/2\pi=(n_1,n_2)$，其中 $n_{1,2}$ 为整数．利用傅里叶分量系数相等，最后可以得到：

$$S(J',\theta) = \theta\cdot J' + \mathrm{i}\varepsilon\sum_{k\neq 0}\frac{H_{1,k}(J')}{k\cdot\omega}\exp(\mathrm{i}k\cdot\theta). \tag{1.4.16}$$

当 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 相互公度时，则存在一对整数 $(n_1,n_2)$ 使得 $\omega_1/\omega_2=-n_2/n_1$，即

$$n_1\omega_1 + n_2\omega_2 = 0. \tag{1.4.17}$$

而此时这个公度条件就直接导致(1.4.16)中的一项发散,使得上面的摄动方法失效.这就是所谓的"小分母"问题,它反映出系统内部存在的强的共振.

那么,当 $\omega_1/\omega_2$ 接近非公度时,如果可积系统加上扰动 $\varepsilon H_1$ 将会有什么现象? 这个问题由 Kolmogorov,Arnold 和 Moser(KAM)回答.对二维情形,此定理指出:如果 $|\partial\omega_i/\partial\omega_j|\neq 0$(频率的雅可比矩阵元),则那些频率比 $\omega_1/\omega_2$ 接近无理数

$$\left|\frac{\omega_1}{\omega_2}-\frac{m}{s}\right|>\frac{k(\varepsilon)}{s^{2.5}} \qquad (\text{当 } \varepsilon\to 0 \text{ 时}, k\to 0) \tag{1.4.18}$$

的环面在扰动 $\varepsilon H_1$ 下在 $\varepsilon\ll 1$ 极限时是很稳定的.

这个定理很重要的一点是告诉我们,对规则运动即使在有微扰的情况下自然会有一个非零测度.当扰动足够大时,所有的环面都会被破坏.最后被破坏的 KAM 环面是比值为黄金分割数的环面:$\omega_1/\omega_2=(\sqrt{5}-1)/2$.

### 1.4.4 Poincare-Birkhoff 定理

上面讨论的是 $\omega_1/\omega_2$ 非公度的情形.下面我们讨论比值为有理数的情形.我们会看到,在这种情形下加入扰动后原来的环面将会分解成越来越小的环面.这些新产生的环面也稳定.但在这些环面之间的运动是不规则的.

下面我们用二维保面积的 Poincaré 映像(Moser 扭映像)来讨论.

$$\left.\begin{aligned} r_{i+1}&=r_i\\ \theta_{i+1}&=\theta_i+2\pi a(r_i)\end{aligned}\right\}\equiv T\begin{pmatrix} r_i\\ \theta_i\end{pmatrix}, \tag{1.4.19}$$

其中 $a(r)=\omega_1/\omega_2$ 为两频率的比值.对于 $a(r_0)=m/n$ 为有理数,$(r_0,\theta_0)$ 为 $T^n$ 的不动点,因为

$$T^n\begin{pmatrix} r_0\\ \theta_0\end{pmatrix}=\begin{cases} r_0,\\ \theta_0+2\pi\dfrac{m}{n}, \quad n=\theta_0+2\pi n.\end{cases} \tag{1.4.20}$$

现在考虑系统加入扰动 $\varepsilon H_1$,上面的映像变为

$$\left.\begin{aligned} r_{i+1}&=r_i+\varepsilon f(r_i,\theta_i)\\ \theta_i&=\theta_i+2\pi a(r_i)+\varepsilon g(r_i,\theta_i)\end{aligned}\right\}\equiv T\varepsilon\begin{pmatrix} r_i\\ \theta_i\end{pmatrix}, \tag{1.4.21}$$

$f,g$ 是两个非线性函数,依赖于 $\varepsilon H_1$,$T\varepsilon$ 也是保区域操作.

下面考虑 $T^n$ 不动点附近的情况.如图 1-13(a)所示,对于 $a=r/s$ 的圆为 $C$,其附近两个为 $C_+,C_-$,在 $C_+$ 上 $a>m/n$,在 $C_-$ 上 $a<m/n$.在 $T^n$ 操作后可以看到 $C_+$ 逆时针旋转,$C_-$ 顺时针旋转,$C$ 由于是 $T^n$ 的不动点而不会转.如果考虑有扰动后的 $T_\varepsilon^n$,这里的旋转会保持,但会发生扭曲,如图中的 $R_\varepsilon$ 所示.在图(b)中,我们给出了 $R_\varepsilon$ 曲线及其映像 $T_\varepsilon^n(R_\varepsilon)$,可以看到 $R_\varepsilon$ 在操作后的扭曲情

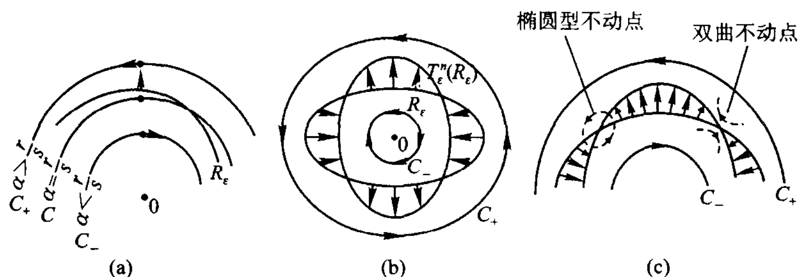



图 1-13 Moser 扭映像操作

况，$R_\varepsilon$ 与 $T_\varepsilon^n(R_\varepsilon)$ 的交点为其不动点. 在图(c)中我们给出了不动点的情况. 可以看到，其中一个是椭圆型不动点，另一个是双曲不动点. 这意味着原先具有有理数频率比值的环面不会被扰动完全破坏，还保留了偶数个不动点. 这就是 Poincaré－Birkhoff 定理[3].

下面考察椭圆不动点. 它由一系列旋转点包围. 同样用前面的讨论可知，这些环面有些是稳定的(KAM 定理)，而其他的环面按 Poincaré-Birkhoff 定理又可以分解成小的环面. 这就会导致如图 1-14 所示的自相似结构.

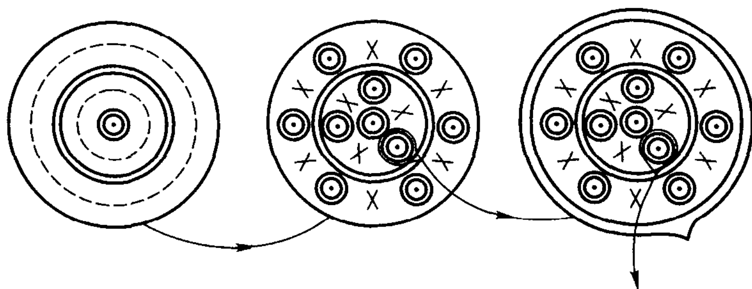


图 1-14 环面不断被破坏而出现的自相似结构

### 1.4.5 同宿轨道与混沌，Arnold 扩散

上一节讨论到 Poincaré-Birkhoff 定理，并讨论了其中的椭圆不动点. 那么双曲不动点是什么情况呢？图 1-15(a)给出了双曲不动点 $H$ 附近的情况，可以看到 $H$ 是不稳定的(椭圆不动点附近的运动是稳定的旋转). 它是一条稳定流形 $W_s$ 与一条不稳定流形 $W_u$ 的交点. $W_{s,u}$ 都不能与自身相交，而 $W_u$ 则可以与 $W_s$ 在 $H$ 之外相交，其交点称为同宿点. 如图 1-15(b)所示的 $H_0$ 由于 $T_\varepsilon^n$ 是连续的，而同宿点并不是不动点，对其用 $T_\varepsilon^n$ 多次操作可以产生新的同宿点. 另外，$T_\varepsilon^n$ 需要沿着 $W_s$ 无穷多次操作才能接近双曲不动点 $H$. 因此在 $H_0$ 与 $H$ 之间会有无穷

多的其他同宿点，这说明，$W_s$与$W_u$一旦相交，他们就会无穷次相交，从而产生极为复杂的情形. 当接近 $H$ 时，同宿点会积累起来，这导致在 $H$ 附近的振荡就非常大(更不稳定)以满足映射的保体积性. 这就是在 $H$ 点附近区域有不规则运动的机制.

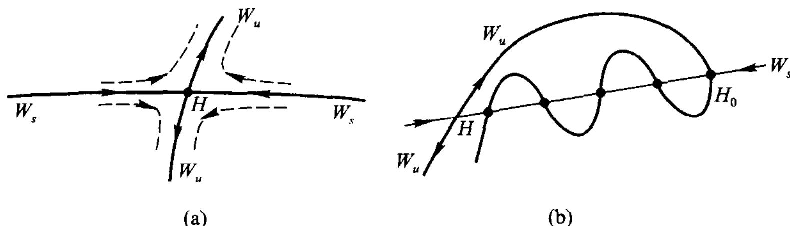



图 1-15　(a) 双曲不动点 $H$ 附近的情况；(b) 双曲不动点附近的同宿点的分布

上面的讨论总结在图 1-16 中. 可以看到在不可积系统的相空间中，运动有规则的，也有不规则的，它们交织在一起.

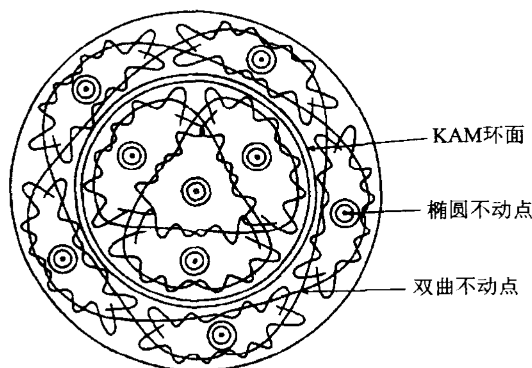



图 1-16　不可积系统的相空间结构

以 Henon-Heiles 模型[36]为例. 系统的哈密顿量为

$$H=\frac{1}{2}\left(p_1^2+p_2^2+q_1^2+q_2^2\right)+q_1q_2^2-\frac{1}{3}q_1^3=E. \tag{1.4.22}$$

我们从小到大增加系统的能量$\left(\text{相应于增加 } H \text{ 中非线性项 } q_1q_2^2-\frac{1}{3}q_1^3 \text{ 的影响}\right)$. 在 $E=1/12$ 时，我们画出系统的 Poincaré 截面(当 $q_2=0$ 且 $p_2>0$ 时). 在图 1-17(a)中可以看到许多闭合曲线绕其椭圆不动点、双曲不动点，但此时系统几乎可积，因此几乎观察不到混沌区. 当 $E=1/8$ 时，由图(b)可以看到双曲点

附近的区域被破坏，有一大片混沌区域包围几个环面区. 当继续增加 $E$ 时，环面继续被破坏；$E=1/6$ 时，可以看到几乎所有的环面区都被破坏，如图(c)所示.

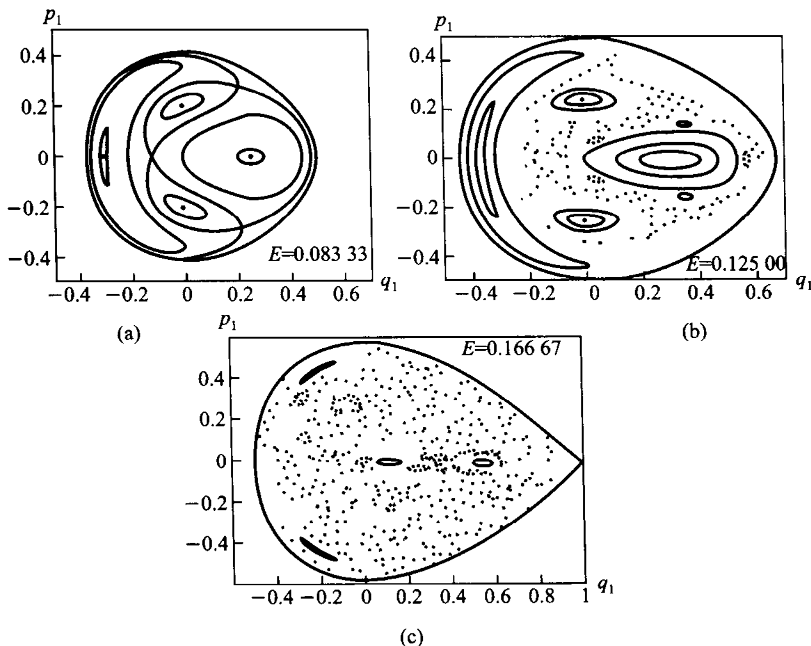



图 1－17 Henon-Heiles 系统的混沌情况

综上所述，我们可看到，对可积系统的非线性扰动根据 KAM 定理，虽然可以有非零测度的规则运动，但也会产生越来越小的稳定环面及其由双曲不动点导致的不规则运动. 这样初始条件很小的变化就会导致完全不同的长时间行为，在相空间中就会产生复杂的结构，规则运动与不规则运动相互交织，这些不规则运动就是混沌. 其轨道同样具有初始条件敏感性(Lyapunov 指数为正)，系统具有正的 KS 熵.

上面我们只讨论了二维的情况. 对高维哈密顿系统，混沌产生的机制仍然有效. 但二维与高维的情形也有不同的地方. 对二维系统，运动在三维能量面上进行. 混沌运动只能在无理环面之间进行，它们被这些环面分割成不相连的不规则区，如图 1－18(a)所示. 但对于高维情形[图 1－18(b)]，高维环面无法将无规则运动分割成不关联的部分. 从无规则运动区一点出发经过一段时间可能会通过所谓的 Arnold 扩散机制到达另外的区域. 我们在图 1－18(b)中给出示意图.

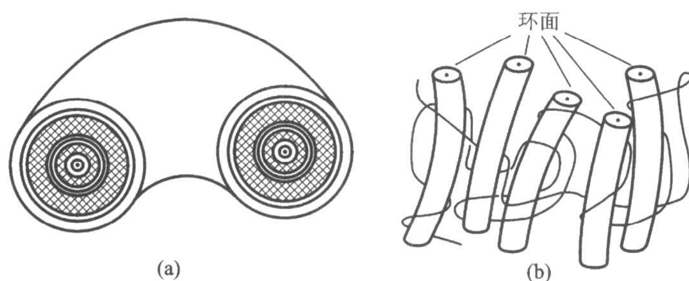



图 1-18 二维和高维环面附近的混沌,注意高维的阿诺德扩散机制

## 1.5 混沌动力学与统计物理

### 1.5.1 概述

在前面我们讨论了非线性系统的混沌动力学.研究这个问题的一个动机,正如我们前面提到,就是试图对统计力学的微观基础有一个深刻的理解.我们知道,统计力学的研究对象——热力学系统有一个根本的特点,就是热力学过程的不可逆性,热力学上由第二定律给出.不可逆性的动力学根源是统计力学中一个古老而重要的问题.在牛顿力学的框架下,系统的几率分布的演化是可逆的(刘维定理).19 世纪,玻尔兹曼推导出稀薄气体单体约化几率分布随时间演化的方程,并在此基础上推导出 H 定理(不可逆性).但由于他在推导过程中引入了一些假设,因而这个定理受到了当时一些物理学家的猛烈攻击.为了从动力学上解释这个定理,玻尔兹曼提出了遍历性假说.尽管关于此问题的重要性物理学家至今尚有争议,但其意义在混沌动力学研究开展几十年以来已不言自明.在此之前,遍历性问题主要是数学家们讨论的课题.到目前为止,通过物理学家和数学家的深入探索,关于统计物理基础的问题已有一部分清楚的答案,遍历性理论也不仅仅是数学家们的研究对象,它也为物理学家理解热力学系统中的许多问题(如相变,玻璃态系)提供了新的启示(如遍历性破缺是相变理论中的原有概念——对称性破缺的推广,它可以解释更多地相变行为).

自玻尔兹曼提出遍历性概念以来,20 世纪的研究使人们对动力学系统的统计特征有了深一步的理解,在此期间有不同概念提了出来[37].遍历性理论架起了从动力学向统计过渡的桥梁[38].研究已表明,动力学系统的全局性混沌是系统统计成立的根本要素.在此意义上,系统的无限大自由度已不是决定性的因素.人们已建立了少自由度系统的统计力学及热力学[39].另一方面,研究热力学的非平衡性质与微观动力学特征之间的关系近年来成为一个新的热点,人们探

讨了热力学系统的输运系数的规律以及它们与非线性动力学指数(如李雅普诺夫指数,KS熵,分维等)之间的关系,并已经取得了丰富的成果[39,40].关于这个方面的讨论目前是一个新的课题,其研究难度由于系统的非线性与多体特征可想而知,但仍拥有广阔的前景[41].下面主要就第一个方面的问题进行一些基本讨论.

### 1.5.2 几种不同程度的遍历性

统计的基本出发点是随机性.不同系统在不同情形下的宏观热力学性质起源于系统内部随机性的差异.通过研究动力学系统,我们可根据随机性的不同将其分为以下几类[7,8,39]:

1. 回归系统

若系统在相空间中从一点出发经过一段时间之后回到起点的某一邻域 $\Delta\tau$,则称该系统是回归的.周期运动系统就是回归的.所有的哈密顿系统都满足这个特点.对于一个哈密顿系统来说,其相空间中周期轨道都可以满足回归性质,因此回归性从随机性角度而言是最弱的.

2. 遍历系统(各态历经系统)

上面的回归要求很弱,例如哈密顿系统中的周期轨道仅仅是在相空间局部的运动.若系统从相空间中任何一点出发(排除测度为零的特殊点)长时间后演化可以遍及相空间几乎所有区域,则称系统是遍历的.对系统 $\boldsymbol{x}(t)$的任何函数而言,其时间平均

$$[\overline{f(\boldsymbol{x})}]_T = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(\boldsymbol{x}(t'))\mathrm{d}t' \tag{1.5.1a}$$

与相空间平均

$$\langle f(\boldsymbol{x})\rangle = \int_\Gamma f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Gamma \tag{1.5.1b}$$

都相等,即

$$\lim_{T\to\infty}[\overline{f(\boldsymbol{x})}]_T = \langle f(\boldsymbol{x})\rangle. \tag{1.5.2}$$

系统的遍历性隐含着一层含义即系统相空间 $\Gamma$ 不能够分解成两个不变子空间,即

$$\Gamma \neq \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \tag{1.5.3}$$

这里 $\hat{T}\Gamma_i = \Gamma_i, i = 1,2, \hat{T}$ 为时间平移操作.

遍历性最简单的一个例子就是粒子在二维环面上的运动.若粒子运动的两个频率 $w_1, w_2$之间不可约(非公度),粒子运动就可跑遍整个环面.这个运动并不具有随机性.如果我们有一个分布波包从相空间一点出发,在任何时候我们都不可能观察到这个波包散开.换言之,仅满足遍历特点的系统不具有不可逆性.

系统具有不可逆性必须有“混合”机制.

3. 混合系统

要描述不可逆性,可以引入时间关联函数:

设 $f(\boldsymbol{x})$,$g(\boldsymbol{x})$为任意两个可积函数,则 $f$ 与 $g$ 的时间关联函数为

$$R(f,g,T)=\langle f(\hat{T}\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\rangle-\langle f(\boldsymbol{x})\rangle\langle g(\boldsymbol{x})\rangle. \tag{1.5.4}$$

如果一个动力学系统的关联函数在长时间后趋于零,则我们称这个系统是混合的,即

$$\lim_{T\to\infty}R(f,g,T)=0. \tag{1.5.5}$$

关联函数在长时间后趋于零,说明系统的初始信息随时间逐渐丧失,这就有了不可逆的特征.混合的特征是初始的几率波包随时间演化会逐渐散开趋于定态分布.粗粒化在意义上类似于咖啡在水中溶解.

关联函数趋于零的速度(即初始信息丧失的速度)对于不同的混合系统是不同的,有的可能是较慢的幂律,有的可能是指数衰减规律,更多的则是更为复杂的规律.幂律衰减被称为长时尾,它在许多系统中都可以观察到(如硬球系统[42]及其他许多哈密顿系统).混合性质应该说涵盖的范围比较大.在数学上被分为弱混合和强混合,这里就不再详述了.

一个混合系统必然是遍历的,反之则未必成立.在图 1－19 中我们给出了二者的差别.引入关联函数谱密度 $R(w)$:

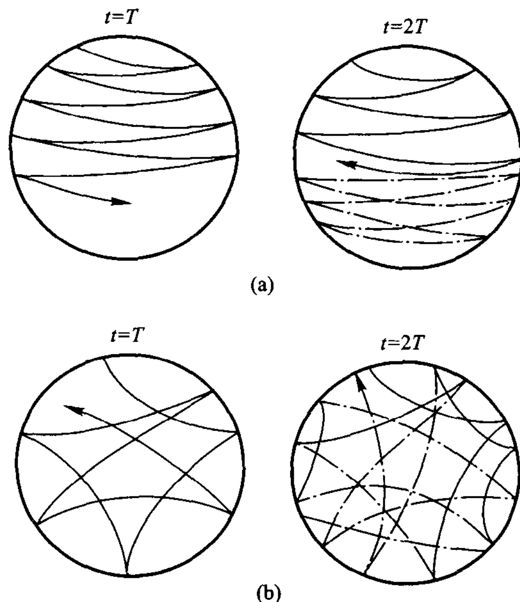



图 1－19　遍历性(a)和混合性(b)的差别

$$R(f,g;T)=\int_{-\infty}^{\infty} R(w)e^{iwT}dw. \tag{1.5.6}$$

从关联函数的谱密度 $R(w)$ 来看,一个遍历但不混合的系统具有分立的谱:

$$R(w)=\sum_{k} w_k\delta(w-w_k), \tag{1.5.7}$$

而满足混合性的系统的谱是连续的.

4. Kolmogorov 系统(K 系统)

在前面我们曾用 Lyapunov 指数来描述动力系统轨道的稳定性. 从全局而言,在数学上对系统描述更准确的是所谓的 Kolmogorov-Sinai 熵,正是用来描述系统的混合特征的量. 下面我们对保守系统来引入 KS 熵.

首先我们引进热力学熵

$$S=\ln\Delta\Gamma, \tag{1.5.8}$$

这里我们让 $k_B=1$, $\Delta\Gamma$ 为相空间一个子元. 根据刘维定理,保守系统的相体积守恒,故 $S$ 不变,但在很多情况下 $\Delta\Gamma$ 体积不变而其形状会变得非常复杂,如图 1-20 所示. 从粗粒化的角度来看,系统的"相体积"改变了. 利用局域不稳定性的概念,

$$\overline{\Delta\Gamma(t)}=\Delta\Gamma_0 e^{ht}. \tag{1.5.9}$$

这里"—"表示粗粒化意义的相体积, $\Delta\Gamma_0$ 为出示相体积, $h$ 为膨胀指数. 相对应的粗粒化的"熵" $\bar{S}$ 则为

$$\bar{S}=\ln\overline{\Delta\Gamma(t)}=ht+\ln\Delta\Gamma_0. \tag{1.5.10}$$

设 $\varepsilon$ 为粗粒化的精度(例如实际中即我们的可测量精度). 当 $\Delta\Gamma_0<\varepsilon$ 时,上面的分析无法进行. 因此可以设 $\Delta\Gamma_0=\varepsilon$,这样

$$\bar{S}\equiv ht+\ln\varepsilon. \tag{1.5.11}$$

KS 熵可以定义为:

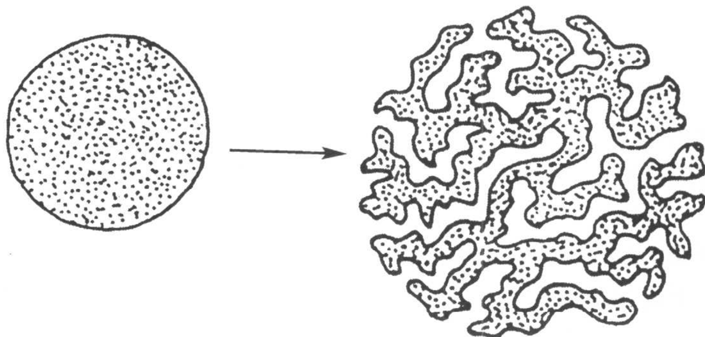


图 1-20 相空间体元随时间的演化

$$h=\lim_{\varepsilon\to\infty}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\overline{\Delta\Gamma(t)}=\lim_{\varepsilon\to\infty}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}(ht+\varepsilon). \tag{1.5.12}$$

注意上面取极限的顺序不可调换.这样 $h$ 就是系统的一个测度不变量,即其不依赖于粗粒化的方式.$h$ 可以小于零也可以大于零.我们把 $h>0$ 的动力学系统称为 Kolmogorov 系统.

Lyapunov 指数与 Kolmogorov - Sinai 熵之间存在一定的关系,对哈密顿系统这个关于由 Piesin 给出.设系统的 Lyapunov 指数谱为 $\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_N$.令 $\lambda_i(\boldsymbol{x}^N)$为 $\boldsymbol{x}^N$处的指数(即 $\boldsymbol{x}^N\to\boldsymbol{x}^N+\mathrm{d}\boldsymbol{x}^N$的小区域),系统能面 $E$ 上引入

$$\rho(\boldsymbol{x}^N)=\sum_{i=1}^{N-1}\lambda_i(\boldsymbol{x}^N), \tag{1.5.13}$$

则系统的 KS 熵为

$$h(E)=\frac{\int_{\tau_E}\rho(\boldsymbol{x}^N)\mathrm{d}\boldsymbol{x}^N}{\int_{\tau_E}\mathrm{d}\boldsymbol{x}^N}, \tag{1.5.14}$$

最简单的情况 $N=2$,我们有 $h\approx\lambda_1$,KS 熵即系统的最大 Lyapunov 指数.

如果系统有正的 KS 熵,则在相空间中某一区域的轨道是混沌的,称为 K 流.

5. Anosov 系统(A 系统)

上面的 K 系统只要求有正的 KS 熵,而对系统相空间的具体特点没有涉及.它容许系统存在非混沌的区域.这里讲的 Anosov 系统则比 K 系统的随机性更强.我们首先引入以下概念.为简便起见,以二维映像系统为例.$\boldsymbol{r}=(x_1,x_2)$,其动力学由下面的映像给出:

$$\boldsymbol{r}_{n+1}=\hat{T}\boldsymbol{r}_n. \tag{1.5.15}$$

考虑变分

$$\delta\boldsymbol{r}_{n+1}=\hat{M}\delta\boldsymbol{r}_n, \tag{1.5.16}$$

这里

$$\hat{M}=\|\partial x_i/\partial x_j\| \tag{1.5.17}$$

为雅可比矩阵.

如果 $K=\dfrac{|\delta\boldsymbol{r}_{n+1}|^2}{|\delta\boldsymbol{r}_n|^2}=\dfrac{|\hat{M}\delta\boldsymbol{r}_n|^2}{|\delta\boldsymbol{r}_n|^2}>1$,我们称矢量 $\delta\boldsymbol{r}$ 是拉伸的;反之,若 $K<1$,则称矢量是收缩的.Anosov 系统的定义如下:

如果以下的条件满足:

(a) 收缩矢量的子空间 $\Gamma^-$ 与拉伸矢量的子空间 $\Gamma^+$ 构成系统整个容许的相空间,即

$$\Gamma = \Gamma^{+} + \Gamma^{-}; \tag{1.5.18}$$

(b) 收缩或拉伸 $\delta r$ 在 $\hat{T}$ 映射下保持不变，即 $\hat{T}\Gamma^{\pm} = \Gamma^{\pm}$，则称此系统为 Anosov 系统(或 A 系统). 这个定义实际上说明了以下几点：第一个条件(a)说明相空间中的给定一个点就是双曲点，即具有一个拉伸和一个收缩方向，第二个条件(b)说明系统相空间中任一点都满足双曲性质(映射的不变性). 这种系统无疑是具有非常强的随机性，因为在相空间任何一点运动都是局域不稳定的.

满足 Anosov 条件的系统有不少，其中典型的是一个单位质量的粒子在闭合的二维负高斯曲率表面上沿测地线的运动，如图 1-21 所示. 另外一个熟知的例子是 Arnold 猫变换，这是一个在二维环面上的映射：

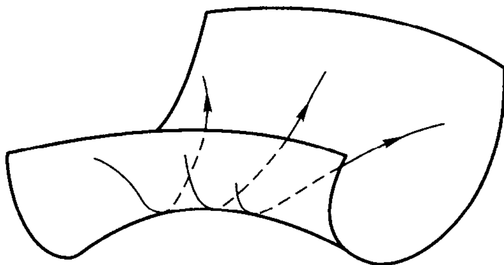


图 1-21 单位质量粒子在二维负高斯曲率表面沿测地线的运动

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n, & \text{mod } 1, \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n, & \text{mod } 1. \end{cases} \tag{1.5.19}$$

变换矩阵

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \tag{1.5.20}$$

由于 $\det|\hat{T}| = 1$，因而这个映射是保面积的. 其本征值

$$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \lambda_1^{-1} < 1, \tag{1.5.21}$$

所以 $\hat{T}^n$ $(n = 1,2,3,\cdots)$ 的所有不动点都是双曲点，故 Arnold 猫变换系统是 Anosov 系统. 注意，Anosov 系统满足所有前面提到过的动力学特征，如回归，遍历，混合，K 等.

随机性更强的动力学系统还有 Bernoulli 系统，这是一种完全随机的移位操作，有兴趣的读者可参考相关文献.

### 1.5.3 台球系统(billiards)

在研究动力系统遍历性理论中,数学家们最青睐的一类动力系统莫过于所谓的台球系统(billiard).它是一个 $d$ 维的区域,里面有一个点粒子以常数速率(通常为单位速率)运动,在没有与边界相碰撞时为自由运动,与边界则发生弹性碰撞(即在边界遵守镜面反射规律)[4].这类系统处理起来简单,其动力学系统完全取决于边界的形状.因此研究问题时只需考虑各种不同边界,为分析问题带来方便.

从遍历性理论的意义上而言,台球系统就是一个流,它可以定义为一个哈密顿系统,$H=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+V(\boldsymbol{q})$,其中势能为

$$V(\boldsymbol{q})=\begin{cases}0, & \boldsymbol{q}\in Q\setminus 2Q,\\ \infty, & \boldsymbol{q}\in 2Q,\end{cases} \tag{1.5.22}$$

其中 $Q$ 为台球系统位形空间区域,$2Q$ 为其边界.根据边界的不同发散特征,台球系统可以分为几类.一种称为发散的台球系统,其边界的发散特征有指数发散的特点.这类系统有代表性的就是 Sinai 台球系统[43],如图 1-22(d)所示,即中间有一个圆柱形反射体.圆柱形(凸表面)构成了指数发散的机制,两相邻轨道在反射后会迅速分开.发散台球系统的动力学特征类似于前面提到的在负曲率的黎曼面上的测地线流,因此这类系统是混沌,具有遍历性,K 流等特点.另一类系统成为非发散台球系统,这类系统比较复杂,虽然表面是凹的或平的,但仍然可能具有局域不稳定性.第三类系统边界则兼前面两类的特点,可能部分是凸的,部分是凹的或平的,其动力学特征也需要仔细分析.图 1-22 中我们给出了几种典型的台球系统,包括前面所说的 Sinai 台球系统.图(a)是一个具有连续边界的台球系统,其遍历性特征可随连续边界的形式而变化;图(b)(c)是两个非发散台球系统,很容易证明它们均为可积系统;(d)(e)是半发散台球系统,其遍历性及混合性已由 Sinai 给出证明:(f)被称为 Bunimovich 体育场台球系统,与 Sinai 台球一样是数学上、物理上研究非常多的典型的台球系统.此系统具有部分凹的边界和平的边界,但是 Bunimovich 已经证明了它是强混沌的,具有遍历性,混合性,K 流等性质[44].值得注意的是(d),(f),(g)的系统都不是处处双曲的,因为它们都存在周期轨道,因此不是 Anosov 系统.值得注意的是,由于非处处双曲的特点,这些系统趋向遍历(平衡态)的非平衡过程都会减慢,表现出长时尾行为.

由于台球系统势能的奇异性,其混沌的出现是全局性的.以 Bunimovich 台球系统为例,它可以由圆形台球系统拉开而形成,拉开的结果是在两个半圆之间出现平的边界.令平直边界长度为 $a$,当 $a=0$ 时,圆形台球是可积的;一旦 $a\neq 0$ 系统就一下子变为混沌的,我们称这种突然出现的混沌为硬混沌.一般可积哈密

顿系统在增加非线性扰动时 KAM 环面逐渐破坏,称之为软混沌.

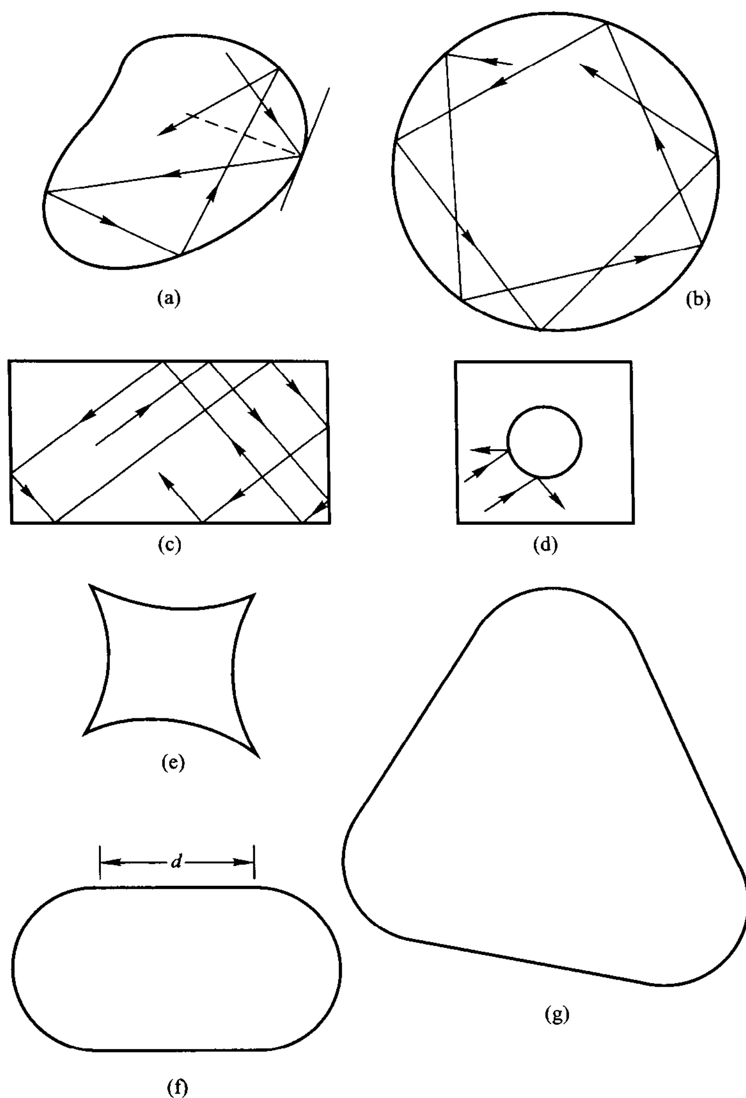



图 1-22 几类典型的台球系统

### 1.5.4 少体系统的热力学与统计

传统的统计力学是在热力学极限(无限大自由度)下的理论.对低维哈密顿混沌的研究揭示了少自由度动力学系统的统计特征,反映了统计概念的深层次动力学根源.实际上只要少体系统满足遍历性(这里只是指全面混沌),我们就仍

可以建立起平衡态热力学与统计，并可以研究其非平衡态特征，大自由度并非统计的本质条件[39,45].

考虑一个哈密顿系统 $H(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q}|y)$，$\boldsymbol{q}=(q_1\cdots q_N)$，$\boldsymbol{p}=(p_1\cdots p_N)$，$y=(y_1\cdots y_k)$为外部参量.若系统在能量面 $E$ 上遍历，设相体积为 $\Gamma(E|y)$，则系统的能量均分定律自然成立：

$$\left\langle p_1\frac{\partial H}{\partial p_1}\right\rangle=\left\langle p_2\frac{\partial H}{\partial p_2}\right\rangle=\cdots=\left\langle p_N\frac{\partial H}{\partial p_N}\right\rangle=T, \tag{1.5.23}$$

这里〈·〉代表沿着运动轨迹的平均.上述的能均分给出绝对温度：

$$T=\frac{\Gamma(E|y)}{\partial\Gamma(E|y)/\partial E}. \tag{1.5.24}$$

当我们改变外参量 $y$，系统能量 $E$ 发生变化，但由 Hertz - Kasuge 定理，系统的相体积 $\Gamma(E|y)$是绝热不变量.外参量改变对系统做功为

$$\mathrm{d}A=\left\langle\frac{\partial H}{\partial t}\right\rangle\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{k}\left\langle\frac{\partial H}{\partial y_i}\right\rangle\mathrm{d}y_i=-\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\Gamma/\partial y_i}{\partial\Gamma/\partial E}\mathrm{d}y_i. \tag{1.5.25}$$

这样可得到能量方程为：

$$\mathrm{d}E=-\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\Gamma/\partial y_i}{\partial\Gamma/\partial E}\mathrm{d}y_i+T\mathrm{d}S, \tag{1.5.26}$$

系统的熵为

$$S(E|y)=\ln\Gamma(E|y)+\mathrm{const}, \tag{1.5.27}$$

也为绝热不变量.它与温度的联系为

$$T^{-1}=\frac{\partial S(E|y)}{\partial E}. \tag{1.5.28}$$

上面讨论的只是少体系统统计和热力学的小部分内容.更多的问题涉及到非平衡问题的研究[46,47]，如小体系统的非平衡过程如热传导、扩散、自由膨胀、绝热压缩等，这些研究中很多问题尚不清楚，特别是系统遍历性在其中的作用，少体系统的热力学定律成立与表现等问题.另一问题是小自由度系统的动力学系统指数(如 Lyapunov 指数，KS 熵等)与非平衡输运系数之间关系的研究，这是一个当前热门但有难度的课题.这些研究有助于从微观动力学上理解宏观非平衡过程的起源.热力学中一类非常重要的现象就是相变，近年来研究者们发现了相变临界指数随着系统的非线性动力学指数的突变，这值得引起注意.

## 1.6 混沌控制

混沌动力学研究从 19 世纪末算起有一百多年了.人们对混沌运动的规律已有深入的认识，如何利用混沌是人们进一步提出的课题.对混沌应用的研究不仅

会激励新的研究热情,提出新的问题,引导人们更深入探讨,另一方面会得到很多实际的应用,其中混沌的控制是应用的关键环节[48].目前人们主要关注混沌控制的以下几个方面:一方面,很多情况下混沌是一种有害的运动形式,采取一定的手段成功对混沌进行抑制,使之运行到我们所需要的目标态,而控制强度不会太大(利用系统自身的动力学特点);另一方面,有些时候混沌是有用的,例如加密通讯,我们可以成功的利用混沌掩盖信号,避免信号被泄漏.

1989年,Hubler第一次提出对混沌的控制问题[49];1990年Ott,Grebogi和Yorke提出了控制混沌的思想(OGY方法)[50],此后由Ditto等[51]与Roy等[52]从实验上实现;与OGY同期,Pecora与Carroll提出混沌同步的思想[53].此后十几年来,对混沌控制与同步的研究成为非线性动力学研究与应用的热点,研究者提出各种控制混沌的方法,并在光学、等离子体、化学反应、流体、电子电路、神经网络、生物系统等大量实验中验证[54~63].利用混沌控制与同步的思想,并利用混沌态丰富的信息资源,人们在保密通讯等方面找到了应用.下面主要介绍混沌控制的一些主要方法.总体上说,混沌控制可分为反馈控制与非反馈控制两大类.

### 1.6.1 反馈控制

反馈控制是根据混沌系统的演化数据来调节信号和控制参数,其目标态一般为系统固有的状态,这些固有的状态在未施加控制时是不稳定的.反馈控制的特点是可以保持系统原有的动力学特殊性质,且不需要大的控制信号.由于混沌运动的遍历性,系统总会运行至目标态附近,在此基础上的反馈控制可以保证目标态的局域稳定性.

反馈控制的主要代表是所谓的OGY控制,其成功的理论与实验掀起了对混沌控制研究的热潮.这种控制方法利用了混沌运动自身的性质.混沌吸引子中有无穷多的稠密的不稳定周期轨道.这些轨道是原系统的解,也常常是我们所需要的目标态,但不稳定.OGY提出的用微小信号来控制混沌的思想即是根据这一特点以及吸引子的遍历性,加以微小控制.其基本思想是:首先用测量的时间序列数据来重构相空间混沌轨道,并选择一条不稳定周期轨道作为混沌控制的目标态;其次,确定周期轨道附近的动力学及系统对控制的线性响应.当混沌运动远离目标态时控制机制不产生作用,当系统运行至目标态附近,满足一定条件时开启反馈控制,把系统引导至目标态的稳定流形上.为便于理解,我们做一具体阐述:

设可以实验测量得到一个混沌时间序列 $z(t)$,利用时间延迟构造 $m+1$ 维矢量

$$\boldsymbol{x}(t)=(z(t),z(t-T),(t-2T),\cdots,z(t-mT)). \qquad (1.6.1)$$

这样在 $m+1$ 维重构的相空间中可以得到一条混沌轨道 $\boldsymbol{x}(t)$(维数 $m+1$ 可根

据系统实际情况选择).我们讨论简单的 $m+1=3$ 维的情形.利用 Poincaré 界面的方法可以找到不稳定周期轨道.我们以系统的周期轨道为目标态,如图 1-23 所示,其在截面上为一不动点,设截面上的映射为 $\boldsymbol{x}_{n+1}=f(\boldsymbol{x}_n)$,即

$$\boldsymbol{x}_F=f(\boldsymbol{x}_F), \tag{1.6.2}$$

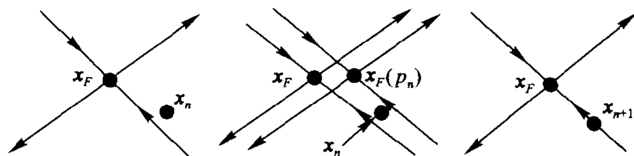



图 1-23　OGY 混沌控制方法示意图

系统的控制参数为 $p$.不失一般性,设当 $p=p^*=0$ 时系统运动是混沌的,周期轨道含 $\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{x}_F$.我们以调控 $p$ 的方式来对目标态进行控制,其调节范围为 $\Delta p\in(-\delta,\delta)$,其中 $0<\delta\ll 1$.设 $\boldsymbol{x}_F(\Delta p)$为相应的不动点,其相对 $\boldsymbol{x}_F(p=0)=\boldsymbol{x}_F$ 有一个移动,其大小为(取线性项即可):

$$\Delta x_F=x_F(\Delta p)-x_F=g\Delta p, \tag{1.6.3}$$

其中

$$g=(I-f_x)^{-1}f_p,\quad f_x=\frac{\partial f}{\partial x},\quad f_p=\frac{\partial f}{\partial p}, \tag{1.6.4}$$

这里 $I$ 为单位矩阵,$f_x$,$f_p$取 $p=0$,$x_n=x_F$时的值.

下面讨论 $x_F$附近的行为.系统运动由线性矩阵 $\boldsymbol{f}_x$决定:

$$\Delta\boldsymbol{x}_{n+1}=\boldsymbol{f}_x\Delta\boldsymbol{x}_n,\quad \Delta\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_F. \tag{1.6.5}$$

由于 $\boldsymbol{x}_F$是不稳定的,$\boldsymbol{f}_x$的本征值中必有一个绝对值 $\lambda_u$ 大于 1,而另一本征值 $\lambda_s$ 小于 1(系统耗散性).由于 $\boldsymbol{f}_x$一般是非厄米的,设对应于 $\lambda_{u,s}$的本征右矢为 $\boldsymbol{e}_{u,s}$,左矢为 $\boldsymbol{h}_{u,s}^{\mathrm{T}}$.我们先让系统在 $p=0$ 时运行,当 $t_n$时运动进入截面上的 $\boldsymbol{x}_F$邻域 $\|\Delta\boldsymbol{x}_n\|=\|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_F\|\ll 1$,我们启动控制,此时 $p=p_n\neq 0$ 这里 $p_n$可以相应确定为(过程略):

$$p_n=\frac{\lambda_u\boldsymbol{h}_u^{\mathrm{T}}\cdot\Delta\boldsymbol{x}_n}{(\lambda_u-1)\boldsymbol{h}_u^{\mathrm{T}}\cdot g}. \tag{1.6.6}$$

相应的混沌控制启动条件是

$$|\Delta\boldsymbol{x}_n^u|<\left(1-\frac{1}{\lambda_u}\right)\boldsymbol{h}_u^{\mathrm{T}}\cdot g\delta, \tag{1.6.7}$$

其中 $\Delta\boldsymbol{x}_n^u=\boldsymbol{h}_u^{\mathrm{T}}\cdot\Delta\boldsymbol{x}_n$,$\delta$ 为 $p$ 的调控范围.

例如对 Hénon 映射：

$$\begin{cases} x_{n+1} = A + p - x_n^2 + By_n, \\ y_{n+1} = x_n, \end{cases} \tag{1.6.8}$$

$A = 1.4, p = 0, B = 0.3$ 时系统是混沌的，吸引子如图 1－24(a)，系统有一个不稳定不动点

$$x_F = y_F = (B-1) + \sqrt{(B-1)^2 + 4A}/2. \tag{1.6.9}$$

我们通过调节 $p$ 将系统混沌控制在不动点$(x_F, y_F)$上. 由上面的理论可计算出线性矩阵

$$f_x = \begin{pmatrix} -2x_F & B \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.6.10}$$

相应矢量为

$$\boldsymbol{g} = \sqrt{(B-1)^2 + 4A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.6.11}$$

$f_x$ 的本征值为

$$\lambda_{u,s} = -x_F \mp \sqrt{x_F^2 + B}, \tag{1.6.12}$$

$\lambda_u$ 对应的左右本征矢为

$$\boldsymbol{e}_u = (1, -(\sqrt{x_F^2 + B} - x_F)B^{-1})^{\mathrm{T}}, \tag{1.6.13a}$$

$$\boldsymbol{h}_u^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\sqrt{x_F^2 + B} + x_F}{2\sqrt{x_F^2 + B}}, -\frac{B}{2\sqrt{x_F^2 + B}}\right). \tag{1.6.13b}$$

相应的 $p_n$ 及调控条件也可直接得出. 图 1－24(b)中给出了数值结果. $\delta$ 取0.1,

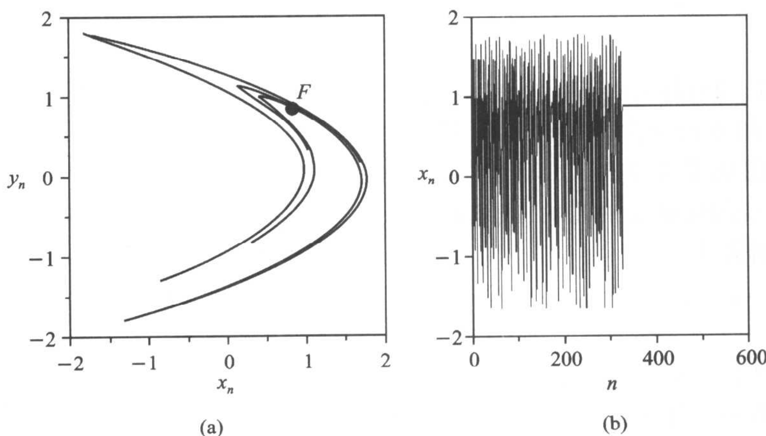



图 1－24 (a) Hénon 映射的吸引子； (b) 利用 OGY 控制的效果图

在 $n<325$ 时 $p=0$ 系统处于混沌状态. 对 $n=325$ 时启动 $p_n$ 调节,系统被迅速控制到$(x_F, y_F)$上,可见 OGY 的控制方法是有效的.

除 OGY 方法外,研究者还提出了其他的一些反馈控制方法,如连续变量反馈控制,时间延迟反馈控制等. 针对很多实际应用中启动控制可能需要等待很长时间的问题,人们又提出了混沌打靶问题,即用混沌轨道的初值敏感性微调参数,使混沌系统迅速进入控制窗口,从而大大缩短等待时间. 这样把混沌打靶与控制相结合,就可以使得混沌的控制成功有效.

### 1.6.2 非反馈控制

上面讲到的反馈控制的优点是利用了混沌中的不稳定轨道为目标态,从而只需要小的代价就可以成功,还不会破坏系统的原有动力学. 但有时对系统动力学的持续准确采集并不方便. 针对这个问题,可以利用非反馈方法对系统进行控制,即用外加控制信号来干预系统. 这种手段对不同系统可采取不同的方法,有很大的灵活性.

在这一类控制中最常见的有效的方法是用周期信号来驱动混沌系统,从而用信号与原系统运动的周期轨道通过共振来达到抑制混沌的目的. 以 Duffing 方程为例:

$$\ddot{x}+r\dot{x}+x^3=b\cos \omega t. \tag{1.6.14}$$

图 1-25(a)给出了系统在 $r=0.3$, $\omega=1$ 时随 $b$ 的分岔行为,$y=\dot{x}$. 在 $b$ 的很大范围内是混沌运动. 下面取 $b=8.85$,系统的运动是混沌的. 我们加上另一个周期信号:

$$\ddot{x}+r\dot{x}+x^3=b\cos \omega t+\alpha b\cos \Omega t. \tag{1.6.15}$$

在图 1-25(b)给出了 $\Omega=3.0$ 时系统随 $\alpha$ 的分岔行为,可见 $\alpha$ 很大才会出现周期行为. 但当我们让第二个周期信号与原有的周期力有一个相位失配时,

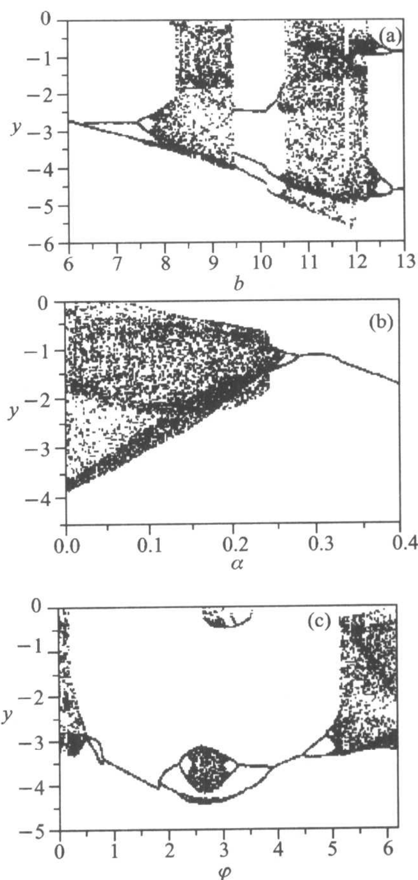



图 1-25 (a) Duffing 系统随 $b$ 的分岔行为; (b) 系统随 $\alpha$ 的分岔行为;(c) 系统随 $\varphi$ 的分岔图

$\ddot{x}+r\dot{x}+x^3=b\cos\omega t+\alpha b\cos(\Omega t+\varphi)$，第二个周期信号很小就可使系统运动变为周期.

图(c)给出了当 $\alpha=0.075$ 时系统随 $\varphi$ 的分岔图，可以看到在 $\varphi$ 的很大范围内系统运动被驱赶到周期态上，所以这种相位控制可以大大降低控制信号强度.这是针对非自治系统的很有效的一种控制手段.利用周期信号对自治系统的混沌加以控制就不会存在相位匹配的问题.

除上述的周期力控制混沌外，人们还提出了输运控制、函数控制、噪声控制等方法，这里不再详述.

### 1.6.3　时空混沌控制

上面讨论的混沌控制是针对少自由度系统的，在实际中我们遇到的大量系统是高自由度；具有时间、空间变量，其时空动力学至今仍然是非线性科学研究的热点.时空混沌的控制具有非常实际的意义，它直接联系着湍流的控制问题.另一方面，时空混沌是一个极为丰富的态库，包含着无穷多种有序的运动模式，但不稳定.如何控制并利用这些丰富的模式是非常重要的，它们在信息处理、保密通讯等方面具有很诱人的应用价值和前景.

对时空混沌的控制手段可以借鉴上面的两大类方法，但考虑到其自身特点，还要有所变化和发展.目前用的比较多的是局域信号控制时空混沌.其基本思想是对空间部分点或模式加以控制，使这些被控制的空间或模式运行至目标态附近.利用时空系统自身的耦合(空间耦合或模式耦合)使得整个系统达到目标态.这种控制方法很好的结合了低维控制方法与时空系统的特点，并在很多系统中都得到成功的应用.除此之外，低维的延时控制、周期控制、脉冲控制的方法也被成功运用到时空混合的控制中.与时空系统动力学的研究状况类似，对时空系统混沌的控制也是一个正在发展的领域，具有巨大潜力.这方面的具体讨论可参考相关文献和专著.

由于混沌同步问题将在本书后面专门讨论，这里不再详述.有兴趣的读者可以直接跳到相关章节.

## 1.7　噪声与非线性系统动力学概述

### 1.7.1　随机力与 Langevin 方程

随机力有时会起到非常重要的作用[64,65].我们考虑一个质量为 $m$ 的粒子浸没于液体中.在没有外力的情况下，粒子的一维运动方程为 $m\dot{v}=-\alpha v$，其中右边为液体的粘滞阻力 $F_C=-\alpha v$.从任一初始速度，粒子的最终速度会以弛豫

时间 $\tau=m/\alpha$ 趋于零:

$$v(t)=v(0)\mathrm{e}^{-t/\tau}=v(0)\mathrm{e}^{-\gamma t}. \tag{1.7.1}$$

这种决定性的描述实际上只适用于粒子质量非常大或液体温度 $T$ 较高的情形.对于 $m$ 较小的情形,粒子的热运动速率 $v_{th}=\sqrt{k_BT/m}$ 就会比较大,因此原则上要把粒子与液体分子作为一个整体来处理.但实际上这种处理方式既不能亦无必要.整个系统的运动存在两个尺度,一个是粒子 $m$ 的运动,其弛豫时间 $\tau=m/\alpha$,另一个则是液体分子的无规运动,其时间尺度 $\tau_{th}\ll\tau$.由于这两个时间尺度的巨大差别,我们只需要在粒子运动方程上加上一个快速随机变化的力(随机力,噪声),然后对其负于一些合理的随机假设就可以达到目的.这样我们有:

$$m\dot{v}=-\alpha v+f(t), \tag{1.7.2a}$$

两边除以 $m$,可得到

$$\dot{v}+\gamma v=\Gamma(t), \tag{1.7.2b}$$

其中 $\gamma=\alpha/m$ 称为阻尼系数,$\Gamma(t)=f(t)/m$ 为随机力.上面方程为粒子在液体中布朗运动的 Langevin 方程,对 $\Gamma(t)$的统计假定依赖于具体情况.对于现在的情况,可认为不仅其统计平均为零,而且其时间上无关联:

$$\langle\Gamma(t)\rangle=0,\quad\langle\Gamma(t)\Gamma(t')\rangle=\frac{2\gamma k_BT}{m}\delta(t-t'), \tag{1.7.3}$$

$D=\dfrac{\gamma k_BT}{m}$.利用 Wiener-Khinchin 定理可以由其关联函数计算 $\Gamma(t)$的功率谱:

$$s(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}c(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau=2D\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=2D, \tag{1.7.4}$$

可见功率谱强度与 $\omega$ 无关,我们称其为白噪声.在一般情况下,随机力在时间上总会有一定的关联,此时 $S(\omega)$不再是均匀分布的,我们称为色噪声.一种比较简单的色噪声为指数关联的高斯色噪声:

$$\langle Q(t)\rangle=0,\quad\langle Q(t)Q(t')\rangle=\frac{D}{\tau_0}\mathrm{e}^{-|t-t'|/\tau_0}, \tag{1.7.5}$$

其功率谱为 Lorentz 型:$s(\omega)=D/(1+\tau_0^2\omega^2)$,当 $\tau_0$ 非常小时,$s(\omega)\to D$,此时的色噪声可以近似的由白噪声代替.一般的,色噪声可通过扩大维数的方式化为白噪声问题.我们可引入新的变量 $y=Q(t)$:

$$\begin{cases}\dot{y}=-\tau_0^{-1}y+\Gamma(t),\\ \langle\Gamma(t)\rangle=0,\langle\Gamma(t)\Gamma(t')\rangle=\dfrac{2D}{\tau_0}\delta(t-t').\end{cases} \tag{1.7.6}$$

上面所提到的自由粒子布朗运动可以直接解出来,读者可参考任何一本统计物理书,这里不再推导.我们需要提出的是,在一般情况下,Langevin 方程可以有更复杂的形式,它可以是真实粒子在场与外力作用下的,也可以是通过其他方

式而非真正粒子的运动方程.因此,一般情况下需要考虑一般的多变量的 Langevin 方程:

$$\dot{\xi}_j = h_i(\{\xi\},t) + g_{ij}(\{\xi\},t)\Gamma_j(t),\quad j=1,2,\cdots,N. \tag{1.7.7}$$

为简便,我们仍考虑 $\Gamma_j(t)$为白噪声:

$$\langle \Gamma_j(t)\rangle = 0,\quad \langle \Gamma_i(t)\Gamma_j(t')\rangle = 2\delta_{ij}\delta(t-t'), \tag{1.7.8}$$

$h_i$, $g_{ij}$通常为非线性函数,所以 Langevin 方程一般很难解.一些特殊的情形例如 Ornstein - Uhlenbeck 过程:

$$\dot{\xi}_i + \sum_{j+1}^{N} r_{ij}\xi_j = \Gamma_i(t), i=1,2,\cdots,N, \tag{1.7.9}$$

是可以解的(线性方程).对一般的情况,我们需要用统计的方法,建立随机变量$\{\xi\}$的分布函数的方程,然后对其求解.

### 1.7.2 Fokker-Planck 方程及其求解

对于上述用 Langevin 方程描述的随机变量演化的系统,我们可以建立其分布函数的演化方程.描述布朗运动的分布函数方程首先由 Fokker 和 Planck 提出.下面我们简述 Fokker-Planck 方程的导出和求解.

以单变量系统为例,概率分布 $W(x,t)$由下面的 Chapman-Enskog 方程描述:

$$W(x,t+z) = \int p(x,t+\tau|x',t')W(x',t)\mathrm{d}x', \tag{1.7.10}$$

其中,$p(x,t+\tau|x',t)$为跃迁概率.设 $\tau$ 很小,$x$ 变化也很小,则由

$$p(x,t+\tau|x',t) = \int \delta(y-x)p(y,t+\tau|x',t)\mathrm{d}t, \tag{1.7.11}$$

将 $\delta$ 函数展开:

$$\begin{aligned}\delta(y-x) = \delta(x'-x+y-x') &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(y-x')^n}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^n\delta(x-x')\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(y-x')^n}{n!}\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\delta(x-x'). \end{aligned}\tag{1.7.12}$$

这样

$$\begin{aligned}p(x,t+\tau|x',t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\int(y-x')^n p(y,t+\tau|x',t)\mathrm{d}y\delta(x'-x)\\ &= \left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n M_n(x,t,\tau)\right]\delta(x'-x), \end{aligned}\tag{1.7.13}$$

$M_n$称为 $n$ 阶矩,将其代入(1.7.10),我们得到

$$W(x,t+\tau)-W(x,t)=\frac{\partial W(x,t)}{\partial t}\tau+o(\tau^2)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\int\delta(y-x)M_n(x,t,\tau)W(x',t)\mathrm{d}x'/n!$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{M_n(x,t,\tau)}{n!}W(x,t). \tag{1.7.14}$$

取 $\tau$ 的一次项,我们就得到一般的 Kramers-Moyal 展开方程:

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t}=L_{KM}W(x,t), \tag{1.7.15}$$

$L_{KM}$为 Kramers-Moyal 算子:

$$L_{KM}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n D^n(x,t), \tag{1.7.16}$$

其中 $M_n(x,t,\tau)/n!\ =D^{(n)}(x,t)\tau+o(\tau^2)$.

对于非 Markov 过程,上面所有的导数 $D^{(n)}(x,t)$都与其前一时刻 $t'$有关.我们通常假设随机方程为 Markov 的.另外 $D^{(n)}(x,t)$通常随 $n$ 的增加而减少,因此 Kramers-Moyal 方程在实际计算时通常在某一个 $n$ 处采取截断的方式,即在某一 $n>m$,令 $D^{(n)}(x,t)=0$.但事实上,利用 Pawula 定理,我们可以使上述方程自然截断.当 $n\geqslant 2$ 时,即有 $D^{(n)}(x,t)=0$.这样我们就得到单变量的 Fokker-Planck 方程:

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}[D^{(1)}(x,t)W(x,t)]+\frac{\partial^2}{\partial x^2}[D^{(2)}(x,t)W(x,t)]. \tag{1.7.17}$$

同样对于多变量$\{x\}=x_1,x_2,\cdots,x_N$,我们也可写出 Fokker-Planck 方程:

$$\frac{\partial W(\{x\},t)}{\partial t}=L_{FP}W(\{x\},t), \tag{1.7.18}$$

其中

$$L_{FP}=-\frac{\partial}{\partial x_i}D_i(\{x\},t)+\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}D_{ij}(\{x\},t), \tag{1.7.19}$$

注意这里双下标意味着取和.$D_i(\{x\},t)$为漂移导数矢量,$D_{ij}(\{x\},t)$为扩散系数张量,对于不同系统,它们有具体的表达形式.例如,对一维自由布朗运动,$D^{(1)}=-\gamma,D^{(2)}=\dfrac{k_BT}{mr}$,所以此时的 Fokker-Planck 方程即所谓的扩散方程.应该指出,跃迁概率 $P(x,t\mid x',t')$也遵守 Fokker-Planck 方程,这个不再详细讨论.Fokker-Planck 方程的求解分求定态解与非定态解问题.通常低维的少变量方程比较容易解(多变量 Ornstein-Unlenbeck 过程由于其线性亦易求解).我们以前面的一维问题为例讨论求解问题(设 $D^{(1)},D^{(2)}$不显含时间).

一、定态问题

对于定态问题,概率分布不显含时间,$\frac{\partial W_{st}(x,t)}{\partial t}=0$.令 $S$ 为概率流,Fokker-Planck 方程写为$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial S}{\partial x}=0$,则定态解意味着 $S$ 为常数,若存在 $x$ 使$S(x,t)=0$,则 $S$ 对任意$x$ 都为零.因此,

$$D^{(1)}(x)W_{st}=\frac{\partial}{\partial x}[D^{(2)}(x)W_{st}(x)]. \tag{1.7.20}$$

这个 $x$ 的一阶方程的解为:

$$W_{st}(x,t)=\frac{N_0}{D^{(2)}(x)}\mathrm{e}^{\int_{-\infty}^{x}\frac{D^{(1)}(x')}{D^{(2)}(x')}\mathrm{d}x'}=N\mathrm{e}^{-\phi(x)}, \tag{1.7.21}$$

此处 $N_0$为归一化常数.我们引入了势函数 $\phi(x)$:

$$\phi(x)=\ln D^{(2)}(x)-\int_{-\infty}^{x}\frac{D^{(1)}(x')}{D^{(2)}(x')}\mathrm{d}x'. \tag{1.7.22}$$

值得指出的是对几乎任何初始分布,在大多数情况下系统可以最终演化到定态分布,这一点与 Boltzmann 方程导出的 H 定理类似.

多变量的 Fokker - Planck 方程的定态解相对较为困难,这里不再详细讨论.

二、非定态问题

即使对一维来说,非定态问题的求解仍不是很容易的事情.一般对一些特殊过程我们可以得到较为显式的解.下面举两个例子:

1. Wiener 过程:此时 $D^{(1)}=0,D^{(2)}=D$ 为常数,则跃迁概率 $P(x,t\mid x',t')$的方程即为扩散过程:

$$\frac{\partial p}{\partial t}=D\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \tag{1.7.23}$$

设初始分布为 $p(x,t'\mid x',t)=\delta(x-x')$,则 $t>t'$的解为一线性弥散的高斯波包:

$$p(x,t\mid x',t')=\frac{1}{\sqrt{4\pi D(t-t')}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-x')^2}{4D(t-t')}}, \tag{1.7.24}$$

$W(x,t)$则可以利用 Chapman - Enskog 关系求出:

$$W(x,t)=\int p(x,t\mid x',t')W(x',t')\mathrm{d}x' \tag{1.7.25}$$

2. Ornstein-Uhlenbeck 过程:此时 $D^{(1)}(x)=-\gamma x,D^{(2)}(x)=D$,跃迁概率方程为:

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\gamma\frac{\partial}{\partial x}(xp)+D\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \tag{1.7.26}$$

初始分布仍为上述的 $\delta$ 分布.这个方程可由傅里叶变换将空间微分项消去,从

而得到关于 $t$ 和 $k$ 的一阶微分方程. 将

$$p(x,t\mid x',t')=\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\tilde{p}(k,t\mid x',t')\mathrm{d}k \tag{1.7.27}$$

代入方程,可得到 $\tilde{p}$ 的方程:

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t}=-\gamma k\frac{\partial}{\partial k}\tilde{p}-Dk^2\tilde{p}. \tag{1.7.28}$$

此方程在初始条件 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx'}$(由 $\delta$ 函数的傅里叶变换而来)下的解为

$$\tilde{p}(k,t\mid x',t')=\exp\left[-\mathrm{i}kx'\mathrm{e}^{-\gamma(t-t')}-\frac{Dk^2}{2r}(1-\mathrm{e}^{-2\gamma(t-t')})\right], \tag{1.7.29}$$

则

$$p(x,t\mid x',t')=\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi D[1-2D\mathrm{e}^{-2\gamma(t-t')}]}}\exp\left[-\frac{\gamma(x-\mathrm{e}^{-\gamma(t-t')}x')^2}{2D(1-\mathrm{e}^{-2\gamma(t-t')})}\right]. \tag{1.7.30}$$

对于一般的情况虽然大部分时候很难精确求解,但还是有一般的方法的. 例如本征值展开就是其中之一. 引入

$$W(x,t)=\varphi_n(x)\mathrm{e}^{-\lambda_n t}, \tag{1.7.31}$$

则 Fokkor - Planck 方程变为

$$L_{FP}\varphi_n(x)=-\lambda_n\varphi_n(x), \tag{1.7.32}$$

其中 $\lambda_n$ 为本征值,$\varphi_n(x)$为本征函数,它们可用上面方程在一定边界条件下求解. 利用势函数 $\phi(x)$,$L_{FP}$可以写成如下形式:

$$L_{FP}=\frac{\partial}{\partial x}D^{(2)}(x)\mathrm{e}^{-\phi(x)}\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{e}^{\phi(x)}, \tag{1.7.33}$$

显然 $L_{FP}$不是厄米算子,但它可以通过变换而厄米化:

$$L=\mathrm{e}^{\phi/2}L_{FP}\mathrm{e}^{-\phi/2}. \tag{1.7.34}$$

这样问题就化为求解下列方程的本征值问题:

$$L\varphi_n=-\lambda_n\varphi_n, \tag{1.7.35}$$

其中 $\varphi_n=\mathrm{e}^{\phi(x)/2}\varphi_n(x)$,而 $\varphi_n$对不同的本征值$\lambda_n$是正交的. 这样就可以利用量子力学中求解 Schrodinger 方程的方法来进行了. 可以证明所有的本征值都是非负的,$0\leqslant\lambda_0<\lambda_1<\cdots$. 从此处就可看出如果系统有定态解,则 $\lambda_0=0$. 可解的例子可以在量子力学的教科书上找到,然后化成 Fokker-Planck 方程的解,这里就不再详述了.

### 1.7.3 Kramers 逃逸率问题

在小噪声强度下,粒子在势阱中即使势垒比较高,它仍可以通过"隧道效应"逃出势阱,从而达到新的状态. 这一机制在许多领域得到了重要应用,例如物理

上的淬火过程、布朗粒子在势场中的运动、约瑟夫森结、模拟电子电路等.在化学上,化学反应的动力学过程也可应用 Kramers 逃逸率理论得到较好的解释[66].下面我们在小噪声条件下,在一维双势阱系中讨论阱间的跃迁率(即逃逸率).

设 $V(x)$为一维双势阱,$V(x_{\pm})$为两个势阱极小值,$V(x_u)$为势垒极大值,且有 $x_-<x_u<x_+$,$x_-$ 的势阱吸引域为$(-\infty,x_u)$,$x_+$ 的势阱吸引域为$(x_u,+\infty)$.考虑 $t=0$ 时一个布朗运动粒子处在左势阱内,即 $x(0)=x'<x_u$.下面计算粒子逃逸出左势阱的过程.

我们可以考虑布朗运动粒子从左势阱首次穿过 $x=x_u$所用的时间 $T$ 称为首通时间(first-passage time).由于系统的随机性,$T$ 也是随机变量.因此我们可以计算首通时间 $T$ 的分布,然后计算其平均,平均首通时间的倒数可以证明即为 Kramers 逃逸率.系统跃迁概率的 Fokker-Planck 方程为

$$\frac{\partial p}{\partial t}=L_{FP}p, \tag{1.7.36}$$

其中,$p=p(x,t|x',0)$,$L_{FP}=-\frac{\partial}{\partial x}V'(x)+D\frac{\partial^2}{\partial x^2}=D\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{e}^{-\frac{V'(x)}{D}}\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{e}^{\frac{V'(x)}{D}}$.方程的初始条件为 $p(x,0|x',0)=\delta(x-x')$,边界条件为 $p(-\infty,t|x',0)=p(0,t|x',0)=0$.由于布朗运动,初始集中于一个势阱的概率(总量为 1)随时间推移而逐渐减少.设 $W(t)$为 $t$ 时刻处于$(-\infty,x_u)$内的概率总量:

$$W(t)=\int_{-\infty}^{x_u}p(x,t|x',0)\mathrm{d}x, \tag{1.7.37}$$

则 $T$ 时刻以后 $\mathrm{d}T$ 时间内粒子逃出$(-\infty,x_u)$内的概率为 $-\dot{W}(T)\mathrm{d}T$,即

$$-\mathrm{d}W(T)=-\int_{-\infty}^{x_u}\dot{p}(x,T|x',0)\mathrm{d}x\mathrm{d}T, \tag{1.7.38}$$

故首通时间 $T$ 的分布为

$$\omega(T)=-\frac{\mathrm{d}W(T)}{\mathrm{d}T}=-\int_{-\infty}^{x_u}\dot{p}(x,T|x',0)\mathrm{d}x, \tag{1.7.39}$$

相应的平均首通时间 $T_1$ 为:

$$T_1=\int_0^{\infty}\omega(t)\mathrm{d}T=-\int_{-\infty}^{x_u}\int_0^{\infty}T\dot{p}(x,T|x',0)\mathrm{d}T\mathrm{d}x. \tag{1.7.40}$$

利用分部积分,很容易得到

$$T_1=\int_{-\infty}^{x_u}\int_0^{\infty}\dot{p}(x,T|x',0)\mathrm{d}T\mathrm{d}x. \tag{1.7.41}$$

当 $t\to\infty$时,所有的概率将流出$(-\infty,x_u)$,因此$\lim\limits_{T\to\infty}P(x,T|x',0)|_{x<x_u}=0$.设初始位置为 $x_-$,即 $-\int_0^{\infty}\dot{p}(x,T|x',0)\mathrm{d}T=-\delta(x-x_-)$,由 Fokker-Planck 方程:

$$\int_0^{\infty} \dot{p}(x, T \mid x', 0) \mathrm{d}T = L_{FP} \int_0^{\infty} P(x, T \mid x', 0) \mathrm{d}T = -\delta(x - x_-), \tag{1.7.42}$$

解此方程，$\int_0^{\infty} P(x, T \mid x', 0) = -L_{FP}^{-1}\delta(x - x_-)$，可得

$$\int_0^{\infty} P(x, T \mid x', 0) \mathrm{d}T = \frac{\mathrm{e}^{-V(x)/D}}{D} \int_{x_-}^{x_u} \mathrm{e}^{V(s)/D} \mathrm{d}s. \tag{1.7.43}$$

将其代入平均首通时间公式可得：

$$T_1 = \int_{-\infty}^{x_u} \frac{\mathrm{e}^{-V(x)/D}}{D} \mathrm{d}x \int_{x_-}^{x_u} \mathrm{e}^{V(s)/D} \mathrm{d}s. \tag{1.7.44}$$

对于小噪声，可以将 $\mathrm{e}^{\pm V(x)/D}$ 根据其贡献区间不同分别作高斯近似(Taylor 展开)：

$$V(x) = V(x_-) + \frac{1}{2} V''(x_-)(x - x_-)^2, \tag{1.7.45a}$$

$$V(x) = V(x_u) + \frac{1}{2} V''(x_u)(x - x_u)^2. \tag{1.7.45b}$$

对 $\mathrm{e}^{V(x)/D}$ 而言，在 $x_u$ 附近的贡献最大；对 $\mathrm{e}^{-V(x)/D}$ 而言，在 $x_-$ 附近的贡献最大，因此：

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{V''(x_-) \mid V''(x_\mu) \mid}} \mathrm{e}^{[V(x_u) - V(x_-)]/D}, D \to 0. \tag{1.7.46}$$

这样粒子由左势阱$(-\infty, x_u)$逃逸处的 Kramers 逃逸率为：

$$R_- = T_1^{-1} = \frac{\sqrt{V''(x_-) \mid V''(x_u) \mid}}{2\pi} \mathrm{e}^{-[V(x_u) - V(x_-)]/D}. \tag{1.7.47}$$

同样可求出由$(x_\mu, +\infty)$的 Kramers 逃逸率为：

$$R_+ = \frac{\sqrt{V''(x_+) \mid V''(x_\mu) \mid}}{2\pi} \mathrm{e}^{-[V(x_u) - V(x_+)]/D}. \tag{1.7.48}$$

上面的表达式未涉及势 $V(x)$的具体形式，因此有普遍性. 值得指出的是 Kramers 逃逸率不仅与系统的首通时间有密切关系，还与 Fokker-Planck 的最大本征值有密切关系.

### 1.7.4 噪声诱导相变

热力学平衡态相变是一个古老而又有意义的课题，它揭示了在热力学极限下系统的状态的突变，反映了系统内部有序与无序两种矛盾之间的竞争. 在相变的临界点附近会出现一系列现象，对临界的现象和标度行为的研究通过标度理论与重整化群理论而得到了清楚的认识. 与此同时，对非平衡态问题的研究也取得了很大进展. 在近平衡区热力学系统可以由 Onsarg 关系与线性响应理论很好

描述. 当使系统越来越远离平衡区时,系统的非线性起着重要作用. 当原来的热力学分支失稳时,系统会产生新的结构功能(耗散结构). 各种自组织现象紧密联系着混沌、湍流和复杂的时空斑图等运动形式的产生和转换. 非线性数学理论分析在此成为重要的理论工具.

当非线性系统受到噪声的影响,其状态在一定条件下也会发生质的变化. 这种非平衡相变主要反映为系统变量概率分布或物理量平均值发生性质上的变化. 对系统同样可以定义序参量,则非平衡相变反应在序参量的变化上,即系统发生类似平衡相变的自发对称性破缺. 这种噪声诱导相变近年来得到了详尽的讨论,有兴趣的读者可参考有关文献,本书不再讨论.

### 1.7.5 周期势场中的布朗运动

一个粒子在周期势场中的布朗运动问题有众多的物理背景,如阻尼摆的运动、超离子导体、约瑟夫森结、偶极子在外场作用下的转动、锁相环等等,它们的运动方程都可以由下面的 Langevin 方程描述[64,67]:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + f'(x) = F + \Gamma(t) \tag{1.7.49}$$

其中 $\gamma$ 为阻尼系数, $f(x)$ 为周期势:

$$f(x + 2\pi) = f(x), \tag{1.7.50}$$

$F$ 为外力(我们这里考虑恒外力的情况), $\Gamma(t)$ 为 Gauss 白噪声:

$$\langle \Gamma(t)\rangle = 0, \langle \Gamma(t)\Gamma(t')\rangle = 2\gamma\Theta\delta(t-t'). \tag{1.7.51}$$

引入 $v = \dot{x}$, Langevin 方程可写为:

$$\dot{x} = v,$$
$$\dot{v} = -\gamma v - f'(x) + F + \Gamma(t), \tag{1.7.52}$$

相应的分布函数 $W(x, v, t)$ 的 Fokker-Planck 方程为:

$$\frac{\partial W(x,v,t)}{\partial t} = \left[-\frac{\partial}{\partial x}v + \frac{\partial}{\partial v}\left(\gamma v + f' - F + \gamma\Theta\frac{\partial}{\partial v}\right)\right]W(x,v,t). \tag{1.7.53}$$

没有外力 $F$ 时,粒子在周期场中做扩散运动, $\langle[x(t) - x(0)]^2\rangle = 2Dt$. 加上外力 $F$ 时,总势场 $V(x) = f(x) - Fx$ 是倾斜的. 噪声作用下,粒子会沿着倾斜的方向运动. 引入迁移率 $\mu$:

$$\mu = \langle v\rangle / F \tag{1.7.54}$$

在 $F \to 0$ 时 $\mu$ 不依赖于 $F$(线性相应),但 $F$ 较大时, $\mu$ 则与 $F$ 有关(非线性响应).

大阻尼 $\gamma \to \infty$ 情况下系统的运动可精确求解. 此时 Langevin 方程中的惯性项 $\ddot{x}$ 可忽略:

$$\gamma\dot{x} = F - f'(x) + \Gamma(t), \tag{1.7.55}$$

相应的概率密度 $W(x,t)=\int W(x,v,t)\mathrm{d}v$ 的 Fokker-Planck 方程为：

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial x}\left(f'-F+\Theta\frac{\partial}{\partial x}\right)W(x,t)=-\frac{\partial S}{\partial x}.\qquad(1.7.56)$$

先求其定态解.此时$\frac{\partial W}{\partial t}=-\frac{\partial S}{\partial x}=0$,故 $S$ 为常数：

$$\gamma S=(F-f')W-\Theta\frac{\partial W}{\partial x}.\qquad(1.7.57)$$

这个关于 $x$ 的一阶微分方程的解为：

$$W(x)=\mathrm{e}^{-V(x)/\Theta}\left[N-\frac{\gamma S}{\Theta}\int_0^x \mathrm{e}^{V(x')/\Theta}\mathrm{d}x'\right],\qquad(1.7.58)$$

其中 $V(x)=f(x)-Fx$ 为总势能.可证明 $W(x)$是周期的,$W(x+2\pi)=W(x)$,相应有：

$$\gamma SI=\Theta N(1-\mathrm{e}^{-2\pi F/\Theta}),\qquad(1.7.59)$$

这里,

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{V(x)/\Theta}\mathrm{d}x.\qquad(1.7.60)$$

由于 $W(x)$是周期的,我们可以在一个周期内归一化：

$$\int_0^{2\pi}W(x)\mathrm{d}x=1=N\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-V(x)/\Theta}\mathrm{d}x-\frac{\gamma S}{\Theta}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-V(x)/\Theta}\left(\int_0^x\mathrm{e}^{V(x')/\Theta}\mathrm{d}x'\right)\mathrm{d}x.\qquad(1.7.61)$$

由(1.7.59)和(1.7.61)可以确定两个待定系数 $S$、$N$.下面我们计算粒子的平均速率：

$$\begin{aligned}\langle v\rangle=\langle\dot{x}\rangle&=\frac{1}{\gamma}\langle F-f'(x)+\Gamma(t)\rangle\\&=\frac{1}{\gamma}\langle F-f'(x)\rangle=\frac{1}{\gamma}\int_0^{2\pi}[F-f'(x)]W(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\gamma}\int_0^{2\pi}\left(\gamma S+\Theta\frac{\partial W}{\partial x}\right)\mathrm{d}x=2\pi S\end{aligned}\qquad(1.7.62)$$

由(1.7.59)和(1.7.61)消去 $N$,得到 $S$,代入上式有：

$$\gamma\langle v\rangle=\frac{2\pi\Theta(1-\mathrm{e}^{-2\pi F/\Theta})}{\Delta\Lambda-(1-\mathrm{e}^{-2\pi F/\Theta})\Pi},\qquad(1.7.63)$$

其中

$$\Delta=I=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{V(x)/\Theta}\mathrm{d}x,\qquad(1.7.64\mathrm{a})$$

$$\Lambda = \int_0^{2\pi} e^{-V(x)/\Theta} dx, \tag{1.7.64b}$$

$$\Pi = \int_0^{2\pi} e^{-V(x)/\Theta} \int_0^{x} e^{V(x')/\Theta} dx' dx, \tag{1.7.64c}$$

在线性响应下($F \to 0$),

$$\gamma\mu(0) = \lim_{F\to 0} \frac{\langle v \rangle}{F} = \frac{(2\pi)^2}{\Delta(F=0)\Lambda(F=0)}. \tag{1.7.65}$$

当 $f(x) = -d\cos x$ 时,$\gamma\mu(0) = [I_0(d/\Theta)]^{-2}$,其中 $I_0(x)$为修正的 Bessel 函数.

在小噪声极限下($\Theta \to 0$),对 $f(x) = -d\cos x$ 的情况,我们有

$$\gamma\mu_{\Theta\to 0} = \begin{cases} \sqrt{F^2 - d^2}/F, & 当 |F| \geqslant d 时, \\ 0, & |F| \leqslant d, \end{cases} \tag{1.7.66}$$

这正是单摆方程过阻尼的解.

非定态问题和小阻尼下近似解的讨论可参考 Risken 关于周期势场 Fokker-Planck 方程的专著.一般情况下这个问题的解较为繁琐.对于中等阻尼的情况,我们可利用 $1/\gamma$ 展开近似.这个问题既可以用数值上解三对角矩阵的方法(参见有关文献),也可以写出其解析上的近似解[67].这里简述一下利用三对角矩阵方法求解定态问题的基本框架(非定态也可采用类似方法).

将分布之和用厄米函数 $\Psi(v)$展开:

$$W(x,v) = \Psi_0(v) \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x)\Psi_0(v), \tag{1.7.67}$$

代入定态 Fokker-Planck 方程,并利用厄米函数的正交归一完备性,可以到下面的三对角递推关系式(Brinkman 序列):

$$\sqrt{n-1}\,\hat{D}C_{n-1} + n\gamma C_n + \sqrt{n+1}\,DC_n = 0, \quad n = 0,1,2,\cdots, \tag{1.7.68}$$

其中

$$D = \sqrt{\Theta}\frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{D} = \sqrt{\Theta}\left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{f'(x) - F}{\Theta}\right], \quad n = 0,1,2,\cdots \tag{1.7.69}$$

均为算子.这里

$$C_0(x) = Ne^{-V(x)/\Theta}, \tag{1.7.70}$$

分布函数的归一化即

$$1 = \int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} W(x,v)\mathrm{d}x\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi} C_0(x)\mathrm{d}x, \tag{1.7.71}$$

$$C(x) = C = 常数.$$

粒子运动的平均速度为

$$\langle v\rangle = \iint vW(x,v)\mathrm{d}x\mathrm{d}v = \iint v\Psi_0(v)\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x)\Psi_n(v) = 2\pi\sqrt{\Theta}C. \tag{1.7.72}$$

要解上面的三对角关系,可以将 $C_n(x)$用傅里叶级数展开:

$$C_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum C_n^p \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}, \tag{1.7.73}$$

其中 $C_n$ 可以用$(\cdots C_n^{-p}\cdots C_n^p\cdots)^{\mathrm{T}}$表示,而 $D$ 与 $\hat{D}$ 可表为三对角矩阵形式:

$$\begin{aligned} D^{pq} &= \mathrm{i}\sqrt{\Theta}q\delta_{pq} \\ \hat{D}^{pq} &= \sqrt{\Theta}[(\mathrm{i}q - F/\Theta)\delta_{pq} - \mathrm{i}(\delta_{p,q+1} - \delta_{p,q-1})d/(2\Theta)] \end{aligned} \tag{1.7.74}$$

而

$$\langle v\rangle = \sqrt{\Theta}/H^{00}, \tag{1.7.75}$$

$H$ 为矩阵$(H^{pq})$,$H^{00}$为其$(p=0,q=0)$的矩阵元. $H$ 可写成以下的算子连分数:

$$H = -\gamma\hat{D}^{-1}\left\{I - \frac{1}{\gamma^2}D\left[1 - \frac{1}{2\gamma^2}D\left[I - \frac{1}{3\gamma^2}D(I\cdots)^{-1}\hat{D}\right]^{-1}\hat{D}\right]^{-1}\hat{D}\right\}. \tag{1.7.76}$$

实际操作中可以采取截断的方式或写成 $1/\gamma$ 展开的方式. 这样问题的中心任务就是计算这个矩阵连分. 数值上这种方法比较实用,收敛速度也很快.

### 1.7.6 随机共振

随机共振是噪声与系统协同作用的一个非常具体的例子[68]. 它描述了这样的行为:微弱的输入信息可以在噪声的作用下被放大,同时在改变输入噪声强度时信号在输出中的信噪比在一定条件下可达到极大值. 这个概念最早是由 Benzi 等人在研究古气象冰川问题时提出的[69]. 在过去的 70 万年中,地球的冰川期与暖气候期以大约 10 万年的周期交替出现. 通过研究这一时期地球环境的变化,人们发现地球绕太阳转动的偏心率的变化周期大约也是 10 万年. 这个巧合使人们认为地球偏心率的周期变化导致了气候在两态之间的变动. 由于辐射到地球表面的太阳能因地球轨道离心力的变化产生的差别与其最大能量相比微乎其微(0.1%),这个微小的周期力怎能引起地球气候如此大的变化? 在 1981 年,C. Nicolis 与 G. Nicolis 也独立地提出类似的模型[70]. 按照他们的解释,是地球所受的随机力大大提高了小周期信号对非线性系统的调制能力,正是这种"随机共振"的机制导致了环境的改变.

随机共振随后的一系列实验证实对这种机制提供了有力的支持. 1983 年, Fauve 与 Heslot 在 Schmitt 触发器电路系统中通过观察到信噪比相对噪声变化的"共振"曲线证实了随机共振的存在[71]. 1988 年,McNamara 等人在环形双激

光器中通过研究噪声诱导两个相对传播的激光模式之间的转换也证实了随机共振现象[72]. 此后,研究者们在一系列不同实验(如光学陷阱、半导体反馈型激光器试验、单项光致反应环形共振器件、电磁学、半导体器件、超导量子干涉装置、化学试验等)中观察到这一现象,同时在神经生理学的一系列实验中也发现了这一行为[72~93].

随机共振的产生通常需要三种因素. 首先,存在一个能量激发势垒,而且系统存在一个阈值; 其次,需要对系统有弱相干输入;第三,也正是我们关心的,即系统有内噪声机制或外噪声的环境. 这三个因素相互竞争,共同作用,可以使系统响应噪声强度的变化出现类似共振的行为.

考虑一个质量为 $m$ 的过阻尼粒子处于对称的双阱中(见图 1-26),并受到随机力的作用. 噪声的存在会引起粒子在两个阱间的跃迁. 利用前面的 Kramers 逃逸率理论,粒子的跃迁率为

$$R_k = \frac{\omega_0 \omega_b}{2\pi\gamma} e^{-\Delta V/D}. \tag{1.7.77}$$

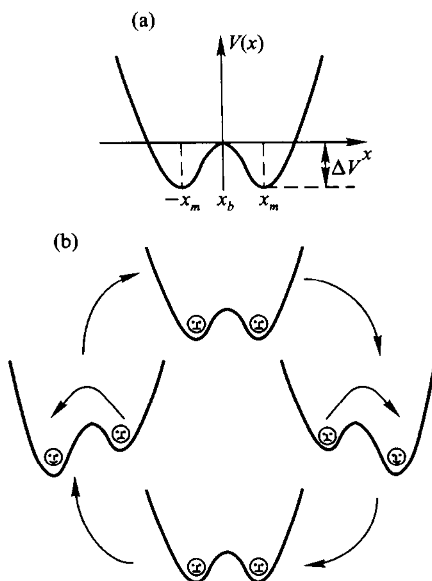



图 1-26 双势阱及其周期力驱动下的变化情况

这里 $\omega_0$ 为在 $\pm x_m$ 势阱极小值处的角频率:

$$\omega_0^2 = \frac{V''(x_m)}{m}, \tag{1.7.78}$$

$\omega_b$ 为势垒顶点处的角频率:

$$\omega_b^2 = \frac{V''(x_b)}{m}, \tag{1.7.79}$$

$\Delta V$ 为势垒高度，$D = k_B T$ 为噪声强度.

现在考虑对系统加上一个弱周期信号，则双势阱 $V(x,t) = V(x) - Ax\cos\Omega t$ 随时间周期振荡，此时势阱的位置也随之周期变化. 如图 1－26 所示，其大致变化是：左阱升右阱降→对称→左降右升→对称. 这一周期变化使得粒子在两个势阱间的跃迁不再对称. 周期力和噪声使得粒子较易从升高的势阱内跃迁入降低的势阱内，并发生周期变化. 当这种跃迁与弱周期力同步，系统就会发生随机共振. 这种共振的时间匹配条件是：

$$2T_k(D) \approx T_\Omega \tag{1.7.80}$$

其中 $T_k(D) = R_k^{-1}$，$T_\Omega = 2\pi/\Omega$. 对于给定的 $T_\Omega$，我们调节噪声强度 $D$ 可以改变 $T_k(D)$. 当系统满足上述的匹配条件时，我们就会在一个合适的噪声强度 $D_{\max}$ 下观察到随机共振. 图 1－27 给出了一个简单的图示，其中 SNR 为信噪比，即信号成分与噪声成分的比值. 可以看到明显信噪比的共振曲线，只不过这里横轴不是频率而是噪声强度.

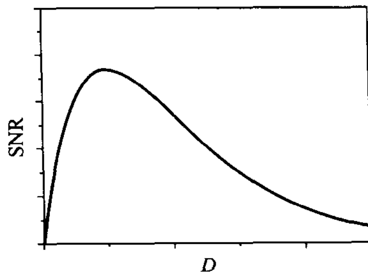



图 1－27 信噪比随噪声强度的变化，注意随机共振峰的出现

随机共振的研究既有理论推导，也有数值模拟、电路模拟和物理、化学和生物实验. 它们为人们理解许多现象提供了有益的启示. 除了上面在双稳系统的研究外，人们还把研究扩展到量子系统与空间广延系统（耦合系统）. 由于相互作用，系统又增加了新的竞争因素，因而使得时空随机共振的研究成为新的热点. 我们将在第三章涉及有关内容.

# 第2章 耦合非线性系统的同步

耦合非线性系统的合作行为有多种多样的具体表现形式，而同步应该说是其中最基本的现象之一[94]．许多合作行为的背后基本机制都与同步有着直接的关系．由于其基本性，对这一问题的探讨涵盖了自然科学、工程的许多领域，甚至社会科学中的一些行为都与同步这一基本性质有密切关系．许多具体问题如摆钟、乐器、电子器件、激光、生物生态系统、神经、心脏等都有非常具体的现象及其探讨．

关于同步问题最早的正式阐述是1673年荷兰研究者惠更斯(Christiaan Huygens)发现的关于两个相邻钟摆同步的描述[95]．他在1665年2月26日给父亲的信中提到了这一现象．他说，他卧病在床的几天里一直观察挂在墙上的两只不同的摆钟，发现它们会保持反相摆动(同步)．他还正确地理解了同步的原因是由于它们悬挂于其上的横梁(耦合)使其发生相互作用．Rayleigh(1842—1919)则描述了声学中的同步[96]．后来关于同步的研究很大程度上受益于电子与无线电工程的发展．另一方面，同步现象在各种生命系统中也可以观察到．1729年法国科学家de Mairan注意到扁豆的叶子会随着昼夜的更替而发生同步的移动[97]．其后的许多更复杂的实验都证明了生物钟的存在(生命系统的生理节律与环境节律同步)[98]．1727年Engeekert Kaempfer报道了大量的萤火虫聚集在树上而发生的同步闪动现象[97]．

自20世纪以来，关于同步现象的发现越来越多，覆盖的领域也更为广泛，在理论方面也有了更为系统的研究[99]．在混沌动力学研究开展之前，大量的关于同步的研究集中于驱动或耦合的极限环(周期振子)系统的同步(锁相)问题．虽然在非线性动力学的研究蓬勃开展之后也有研究者提出过混沌系统的同步问题，但由于混沌系统自身的指数不稳定性使人们认为在混沌系统中实现同步是很难达到的，另外很多问题如混沌系统的同步概念如何建立、是否如极限环系统那样相对简单(其实如我们后面所看到，极限环系统的同步也十分复杂)等等都

是人们需要研究的，混沌同步问题一直是个不清楚的问题. 1990 年，美国海军实验室的 Pecora 与 Carroll 小组在物理评论快报发表了两个耦合混沌振子的混沌同步概念和现象[53]之后，对混沌同步的研究热潮才蓬勃展开. 实际上，在他们的工作之前已有不止一位研究者提出并讨论了混沌同步问题，但都未引起足够的重视. Pecora 与 Carroll 的工作之所以受重视，一方面是由于他们第一次明确阐述并引入了混沌同步的概念，并讨论了混沌同步轨道的稳定性，更重要的是由于同期的对于混沌控制问题的研究. 从广义上说，混沌同步也是一种控制，而同在 1990 年，马里兰大学的 Ott, Grebogi 和 Yorke 发表的一篇关于混沌控制的工作开创了对利用和控制混沌的研究热潮[50]. 而这两项工作均在一系列实验中得到证实，因而受到广泛关注. 在最近的几年里，关于混沌同步本身内容的研究成果不断被报道[100]. 在本章中，我们着重于同步的传统概念这一思路，不准备涉及控制问题. 在后面我们将会看到，相比于极限环系统的同步问题，混沌系统的同步有更丰富的行为和更多不同的层次.

本章将首先从简单的极限环系统同步开始讨论，逐步过渡到混沌系统的同步问题.

## 2.1　全局耦合极限环系统的同步：Kuramoto 相变

下面我们讨论 $N(>2)$ 个周期振子有相互作用时的同步情况. $N$ 有限的情形在解析上是难以处理的. 下面考虑一个简单的可以解析处理的模型. 一方面，我们考虑热力学极限的情形($N\to\infty$)，另一方面，我们考虑振子的相互作用是全局的，即每一个振子都与其他振子有相互作用，且假设相互作用的形式都是一样的. 为进一步简化处理，假设相互作用是平均场形式的，即所有振子之间相互作用都是平权的，且假设相互作用 $F(\theta)$ 是周期函数(为简便，设作用函数 $F(\theta)=\sin\theta$). 在无相互作用时所有振子都以其自身频率 $\{\omega_i\}$ 振动，$\omega_i\neq\omega_j$. 有相互作用时系统的运动方程为[99]

$$\frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t}=\omega_i+\frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_j-\theta_i),\quad i=1,2,\cdots,N, \tag{2.1.1}$$

这里 $K$ 代表耦合强度. 振子的自然频率 $\{\omega_i\}$ 假设符合某一分布(如高斯分布) $g(\omega)$，这一分布设为单峰分布(峰值对应的 $\omega_i$ 的平均值 $\bar{\omega}$). 为描述振子的同步情况(相干程度)，我们引入如下的平均场：

$$Z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j}, \tag{2.1.2}$$

其中 $R$ 描述了振子系统的相干性，不依赖于时间($N\to\infty$ 时)，$\Theta$ 为一任意相位. 有相互作用时($K\neq0$)各振子的振动频率都会相应地从 $\{\omega_i\}$ 移动，可定义振子的

平均频率为

$$\Omega_i = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int \dot{\theta}_i(t)\mathrm{d}t, \tag{2.1.3}$$

当两振子同步时,其平均频率相等.当所有 $\Omega_i$ 都相等时,$R$ 就不为零,表明此时振子之间可保持固定的相位关系.当振子的 $\Omega_i$ 不等时,在任何时刻 $\theta_i$ 会均匀分布于 $0\sim 2\pi$ 之间,此时 $R=0$.对上面的系统,理论上可以证明了存在一个临界的耦合强度 $K_c$,当 $K\leqslant K_c$ 时 $R=0$;当 $K\geqslant K_c$ 时,$R\neq 0$.这是一个非平衡相变,理论上可以处理.下面就对此进行讨论.

方程(2.1.1)可以重新写为:

$$\frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t} = \omega_i + KR\sin(\Theta - \theta_i), \tag{2.1.4}$$

显然 $R=0$ 对应于无相互作用的情形(均匀分布解),这个非相干态总是系统的一个解,但不总是稳定.当 $K>K_c$ 时均匀分布解失稳,另外一个解是 $\Omega_i$ 都相等时的解,此时振子之间可以保持固定的相位,$R\neq 0$,所有振子都以 $\bar{\omega}$ 转动,$\Theta=\omega t$,此解在 $K\leqslant K_c$ 时不稳定.只要有 $\Omega_i$ 不相等,$\theta_i$ 就总是均匀分布于 $0\sim 2\pi$ 之间.引入变量 $\phi_i=\theta_i-\bar{\omega}t$,上面方程可写为

$$\frac{\mathrm{d}\phi_i}{\mathrm{d}t} = \omega_i - \bar{\omega} - KR\sin\phi_i, \tag{2.1.5}$$

此方程正是过阻尼情形下的单摆方程.它有两个解:

(1) 同步解:$|\omega_i-\bar{\omega}|\leqslant KR$ 时,即第 $i$ 个振子的自然频率与 $\bar{\omega}$ 很接近时,$\phi_i = \arcsin\left(\frac{\omega_i-\omega}{KR}\right)$;

(2) 非同步解,当 $|\omega_i-\bar{\omega}|>KR$ 时.

下面很重要的任务是确定临界耦合强度 $K_c$ 和 $R$,这可以用自洽的方法得到.$N\to\infty$ 时,$\phi_i$ 在 $0\sim 2\pi$ 之间会形成分布.根据上面讨论的两类解,我们可以把分布 $P(\phi)$ 分解为同步与非同步两部分:

$$P(\phi) = P_s(\phi) + P_{as}(\phi). \tag{2.1.6}$$

对平均场的情形,$\phi$ 是与时间无关的,因此 $P_s(\phi)$ 可以由自然频率分布得到:

$$P_s(\phi) = g(\omega)\left|\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\phi}\right| = KRg(\bar{\omega}+KR\sin\phi)\cos\phi,\ \phi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]; \tag{2.1.7}$$

对那些未同步的振子,其相位 $\phi_i$ 随时间变化,但我们可直接得到其相位分布.因为 $\phi_i$ 随时间变化是非均匀的,探测到 $\phi$ 在 $\phi\to\phi+\mathrm{d}\phi$ 之间的概率与 $|\dot{\phi}|$ 成反比.因此

$$p(\phi,\omega)\propto|\dot{\phi}|^{-1}, \tag{2.1.8}$$

把运动方程代入并归一化可得到

$$\begin{aligned}p(\phi,\omega) &= \left\{|\omega-\bar{\omega}-KR\sin\phi|\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{|\omega-\bar{\omega}-KR\sin\phi|}\right\}^{-1}\\ &= \frac{\sqrt{(\omega-\bar{\omega})^2-(KR)^2}}{2\pi|\omega-\bar{\omega}-KR\sin\phi|}.\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

由于满足$|\omega-\bar{\omega}|>KR$的振子都是非同步的，因此

$$\begin{aligned}P_{as}(\phi) &= \int_{|\omega-\bar{\omega}|>KR} g(\omega)p(\phi,\omega)d\omega\\ &= \int_{-\infty}^{\bar{\omega}-KR}\frac{g(\omega)\sqrt{(\omega-\bar{\omega})^2-(KR)^2}}{2\pi(-\omega+\bar{\omega}+KR\sin\phi)}d\omega+\int_{\bar{\omega}+KR}^{\infty}\frac{g(\omega)\sqrt{(\omega-\bar{\omega})^2-(KR)^2}}{2\pi(\omega-\bar{\omega}-KR\sin\phi)}d\omega.\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

令$x=\omega-\bar{\omega}$，考虑到$g(\omega)$的对称性$g(\bar{\omega}+x)=g(\bar{\omega}-x)$，上面的积分可写为

$$P_{as}(\phi)=\int_{KR}^{\infty}\frac{g(\bar{\omega}+x)x\sqrt{x^2-(KR)^2}}{\pi[x^2-(KR\sin\phi)^2]}dx, \tag{2.1.11}$$

将前面引入的平均场用分布写出来即

$$\begin{aligned}Re^{i\theta} = Re^{i\bar{\omega}t} &= \int_{-\pi}^{\pi}e^{i(\phi+\bar{\omega}t)}P(\phi)d\phi\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}e^{i\phi+i\omega t}[P_s(\phi)+P_{as}(\phi)]d\phi.\end{aligned} \tag{2.1.12}$$

从(2.1.11)可看出，$P_{as}(\phi)$有$\sin^2\phi$，因而是周期为$\pi$的函数，所以$P_{as}(\phi)$在上面的积分为零，只有$P_s(\phi)$对上面积分有贡献. 进一步将积分实部和虚部分离，可得到(注意$R$为实)：

$$R=KR\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\phi g(\bar{\omega}+KR\sin\phi)d\phi, \tag{2.1.13a}$$

$$0=KR\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\phi\sin\phi g(\bar{\omega}+KR\sin\phi)d\phi, \tag{2.1.13b}$$

上面的第二式可以确定$\bar{\omega}$(实际上在原方程中可通过对称性确定). 第一式可以确定$R$，同时也可确定出现同步的临界耦合强度. 在(2.1.13)中，当$K\geqslant K_c$时，$R$由零连续变为一个小量，因此可把$g(\omega)$在$\bar{\omega}$附近展开：

$$g(\bar{\omega}+KR\sin\phi)\approx g(\bar{\omega})+\frac{g''(\bar{\omega})}{2}(KR)^2\sin^2\phi+O(R^4), \tag{2.1.14}$$

$$g''(\bar{\omega})=\frac{d^2g(\omega)}{d\omega^2}\bigg|_{\omega=\omega}, \tag{2.1.15}$$

代入(2.1.13)可以得到

$$1=\frac{\pi K}{2}g(\bar{\omega})-\frac{1}{16}\pi K^3R^3g''(\omega)+O(R^4). \tag{2.1.16}$$

由于 $R^2$ 项为高阶小量,$K\to K_c$,$R\to 0$,由此可确定临界耦合强度为

$$K_c=\frac{2}{[\pi g(\bar{\omega})]}, \tag{2.1.17}$$

代回(2.1.16)可以确定在 $K_c$ 附近 $R$ 的行为:

$$R\approx\sqrt{\frac{8g(\bar{\omega})(K-K_c)}{g''(\bar{\omega})K^3}}. \tag{2.1.18}$$

若 $g(\omega)$为洛仑兹分布,即 $g(\omega)=\gamma\{\pi[(\omega-\bar{\omega})^2+\gamma^2]\}^{-1}$,上面的结果简化为 $K_c=2\gamma$,$R=\sqrt{(1-2\gamma/K)}$.从(2.1.18)可以看出,$R$ 在 $K_c$ 附近的行为为 $R\propto(K-K_c)^{1/2}$,如图 2-1 所示,为典型的二级相变.需要指出的是,这是一种非平衡相变,是系统有序耦合压倒无序(自然频率随机分布)的结果[101~110].

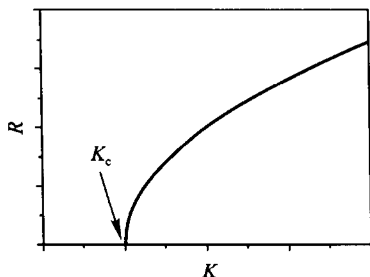



图 2-1 Kuramoto 模型的非平衡相变

## 2.2 Kuramoto 相变研究的推广

上面考虑的是最简单的情形.在实际情况下,我们必须考虑更为复杂的情形.在历史上,人们还讨论过许多推广的情形.这里列出几个人们曾经比较关注的情况.

### 2.2.1 有噪声的情况

考虑所有振子处于外加噪声的环境[111~116],此时模型可写为:

$$\frac{d\theta_i}{dt}=\omega_i+\frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_j-\theta_i)+\zeta_i(t), \tag{2.2.1}$$

其中 $\zeta_i(t)$为简单起见假设为与时空均无关联的高斯白噪声:

$$\langle \zeta_i(t) \rangle = 0, \qquad \langle \zeta_i(t)\zeta_j(t') \rangle = 2D\delta_{i,j}\delta(t-t'), \tag{2.2.2}$$

$D$ 为噪声强度.

单振子分布函数 $P(\theta,\omega,t)$不仅依赖于相位 $\theta$,还要依赖于频率 $\omega$. 这样平均场可由此计算:

$$R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta} = \int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} P(\theta,\omega,t) g(\omega) \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\theta, \tag{2.2.3}$$

因此,需要知道单振子分布函数. 这可由 Fokker-Plank 方程求出:

$$\frac{\partial P(\theta,\omega,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial\theta}\{[\omega + KR\sin(\Theta-\theta)]P(\theta,\omega,t)\} + D\frac{\partial^2 P(\theta,\omega,t)}{\partial\theta^2}. \tag{2.2.4}$$

上述两个方程给出了自洽描述,求解过程比较繁琐. 通常当 $K$ 比较小时,非相干态 $P(\theta,\omega)=1/2\pi$(即 $R=0$)的解是稳定的;增加耦合强度时,系统会发生类似于无噪声时的相变,系统进入同步状态,$R\neq 0$. 进一步讨论可见相关文献.

### 2.2.2　惯性效应

上面几个例子都只讨论了振子过阻尼的情况($\theta$ 的时间一次微分). 实际中振子的惯性效应也应当考虑. Tanaka 等人考虑了下面的情形[117,118]:

$$m\ddot{\theta}_i + \dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_j - \theta_i), \tag{2.2.5}$$

其中第一项是惯性项,$m$ 表示相对质量,量度惯性的强弱. 在有了惯性项之后,上面 $R$ 的连续相变特点被打破. 如图 2-2 所示,可以看到 $R$ 典型的一级相变行为,且有滞后现象. 当增加 $K$ 时,$R$ 在$K_c^{\text{upper}}$ 处由 0 突然跳至同步态;当绝热减少 $K$ 时,$R$ 在越过 $K_c^{\text{upper}}$ 时仍可保持连续(同步),一直到 $K=K_c^{\text{lower}}<K_c^{\text{upper}}$ 时才会由 $R\neq 0$ 的状态跳至非同步态($R=0$). 这种惯性效应在单摆等许多系统中都可以观察到,它紧密联系着下面的单摆方程:

$$m\ddot{\varphi} + \dot{\varphi} + d\sin\varphi = F, \tag{2.2.6}$$

当 $m\neq 0$ 时,此系统具有双稳解,在 $F$ 的一定范围内两种解可以共存. 这种特性直接导致了上述的滞后现象.

有惯性项时的同步情况也可以进行一定的理论近似处理. 类似于 Karamoto 相变的处理,我们也可以把(2.2.5)变换为:

$$m\ddot{\theta}_i + \dot{\theta}_i = \omega_i - KR\sin\theta_i, \qquad i=1,2,\cdots,N. \tag{2.2.7}$$

这正是前面的单摆方程,只是 $R$ 需要自洽地计算出来. $R$ 的计算及临界耦合强度的确定相比耗散情况更困难(要考虑增加与减少 $K$ 两种情况). 详细推导可见 Tanaka 等人的工作.

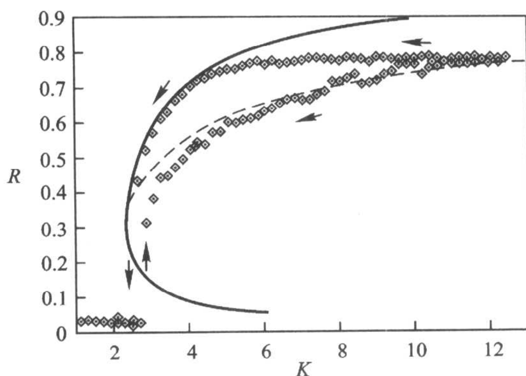



图 2－2 有惯性项的 Kuramoto 系统的非平衡相变情况

当惯性系统处于噪声环境中时，可以类似地通过 Fokker-Planck 方程求解，这种情况下的运动方程为

$$m\ddot{\theta}_i + \dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_j - \theta_i) + \xi_i(t), \qquad i = 1,2,\cdots,N. \tag{2.2.8}$$

通过引入平均场，方程可化为

$$m\ddot{\theta}_i + \dot{\theta}_i = \omega_i + KR\sin(\Theta - \theta_i) + \xi_i(t), \qquad i = 1,2,\cdots,N, \tag{2.2.9}$$

此时单振子分布函数为 $\theta, \dot{\theta} = \Omega, \omega, t$ 的函数，其 Fokker-Planck 方程为

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial \Omega}\{[-\Omega + \omega + KR\sin(\Theta - \theta)]P\} - \Omega\frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{D}{m^2}\frac{\partial^2 P}{\partial \Omega^2}, \tag{2.2.10}$$

相应的平均场可由 $P(\theta, \Omega, \omega, t)$ 定出：

$$Re^{i\Theta} = \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} d\omega g(\omega) e^{i\theta} P(\theta, \Omega, \omega, t). \tag{2.2.11}$$

对有惯性项的情形，还可以引入频率的平均场

$$Se^{i\phi} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{i\omega_j}, \tag{2.2.12}$$

它可以由分布函数定出：

$$Se^{i\phi} = \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} d\omega g(\omega) e^{i\omega} P(\theta, \Omega, \omega, t). \tag{2.2.13}$$

Acebrón 等计算了 $g(\omega)$ 为最简单的 $\delta$ 分布（即所有振子的自然频率相同）的情况[119]：$g(\omega) = \delta(\omega)$. 他们求 Fokker-Plank 方程的定态解. 引入

$$P(\theta, \Omega) = x(\theta)\eta(\Omega), \tag{2.2.14}$$

方程化为

$$\left(\frac{D}{m^2}\frac{d^2\eta}{d\Omega^2}+\frac{\Omega}{m}\frac{d\eta}{d\Omega}+\frac{\eta}{m}\right)x-\frac{KR}{m}\sin(\Theta-\theta)x\frac{d\eta}{d\Omega}-\Omega\eta\frac{dx}{d\theta}=0, \qquad (2.2.15)$$

他们利用数值计算观察到 $\eta(\Omega)$不依赖于耦合强度 $K$ 的变化($|S(t)|$不依赖于 $K$),这样就可以寻找 $\eta(\omega)$不依赖于 $K$ 的解,上面方程可分成:

$$\begin{cases}\dfrac{D}{m^2}\dfrac{d^2\eta}{d\Omega^2}+\dfrac{\Omega}{m}\dfrac{d\eta}{d\Omega}+\dfrac{\eta}{m}=0, & (2.2.16a)\\[2ex] -\dfrac{KR}{m}\sin(\Theta-\theta)x\dfrac{d\eta}{d\Omega}-\Omega\eta\dfrac{dx}{d\theta}=0, & (2.2.16b)\end{cases}$$

这两个方程都可以方便解出:

$$\begin{cases}\eta(\Omega)=\sqrt{\dfrac{m}{2\pi D}}e^{-\frac{m\Omega^2}{2D}}, & (2.2.17a)\\[2ex] x(\theta)=e^{\frac{KR\cos(\Theta-\theta)}{D}}\Big/\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{\frac{KR\cos(\Theta-\theta)}{D}}d\theta. & (2.2.17b)\end{cases}$$

定义相位与频率的涨落(衡量长时演化后相位与频率弥散的程度):

$$\begin{cases}(\Delta\theta)^2=\langle(\theta-\Theta)^2\rangle-\langle(\theta-\Theta)\rangle^2,\\ (\Delta\Omega)^2=\langle\Omega^2\rangle-\langle\Omega\rangle^2,\end{cases} \qquad (2.2.18)$$

在 $K\to\infty$的极限下可以得到:

$$(\Delta\theta)^2=\sqrt{2}D/K, \qquad (\Delta\Omega)^2=D/m, \qquad (2.2.19)$$

可以看到 $\Omega$ 的弥散程度与耦合强度无关,噪声越强,$\Omega$ 越散开;相位 $\theta$ 的弥散程度则与噪声和耦合强度都有关,大的耦合强度可以减小弥散,使系统同步性更好.利用这两个测度我们可得到"不确定关系":

$$\Delta\theta\Delta\omega\propto\sqrt{m}D/K, \qquad (2.2.20)$$

在 $m\to0$ 的极限下,我们回到 Kuramoto 相变(有噪声)的情况.此时相位与频率的测度为$(\Delta\theta)^2=\sqrt{2}D/K$(与 $m\neq0$ 相同),$(\Delta\omega)^2=\sqrt{2}DK$.因此 $m\to0$ 时的"不确定关系"为:

$$\Delta\theta\Delta\omega=\sqrt{2}D, \qquad (2.2.21)$$

只与噪声强度有关.

上面讨论的只是 $g(\omega)$为 $\delta$ 函数的情况.当 $g(\omega)$为其他形式(如高斯分布、洛仑兹分布等)时,解析讨论要困难得多.就笔者所知,这些还都是未解决的问题.

### 2.2.3 非正弦耦合函数

前面讨论的耦合函数都是正弦函数.当考虑耦合是更复杂形式时,系统的合作行为会更复杂.全局耦合振子系统的运动方程一般写为:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N} Q(\theta_j - \theta_i), \tag{2.2.22}$$

其中 $Q(x)$为周期 $2\pi$ 的函数.一般情况下 $Q$ 函数可以写成傅里叶级数的形式:

$$Q(\theta) = \sum_l Q_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi l\theta}, \tag{2.2.23}$$

Daido 引进序函数(order function)的概念来描述系统的相干性[120,122].设所有振子的平均频率为 $\bar{\omega}$,则相干函数为:

$$Z_l = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi l(\theta_j - \bar{\omega}t)}. \tag{2.2.24}$$

利用 $Z_l$ 可把运动方程重新写为

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - KH(\theta_i - \bar{\omega}t), \tag{2.2.25}$$

其中

$$H(\theta) = -\sum_l Q_l Z_l \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi l\theta}, \tag{2.2.26}$$

$H$ 函数被称为序函数,它是作用于每一个振子上的平均力.这样原来的 Kuramoto 的关于平均场的理论分析也可以用到一般的系统.$H$ 不等于零意味着振子的同步.Daido 从理论上证明了在同步的临界点附近 $H$ 函数的模与耦合强度有如下关系:

$$|H| \sim K - K_c, \tag{2.2.27}$$

这一结果与 Karamoto 的平均场模型(平方根规律)不相同,说明后者并不是普适的.

### 2.2.4 自然频率分布的影响

如果振子系统的自然频率分布是关于平均频率 $\bar{\omega}$ 对称的,即 $g(\omega + \bar{\omega}) = g(\omega - \bar{\omega})$,则 $g(\omega)$的形式不影响 Kuramoto 同步相变的一般结果,改变的只是临界耦合强度 $K_c$.但是当 $g(\omega)$不满足上面的对称性时,则系统的同步行为会有很大改变.Acebrón 等人考虑了有噪声的系统(2.2.1),振子的自然频率分布不对称的情形[123].他们考虑简单的非对称双峰情形:

$$g(\omega) = \alpha\delta(\omega - \bar{\omega}) + (1-\alpha)\delta(\omega + \bar{\omega}), \qquad \alpha \in (0,1), \tag{2.2.28}$$

很显然 $\alpha = 1/2$ 时分布是对称的,而 $\alpha = 0$ 或 1 时分布又回到单峰的情形.图2－3给出了对称($\alpha = 1/2$)双峰分布时的相图.当参数越过临界线时,系统由非同步态转变为同步态.当 $\alpha \neq 1/2$ 时,我们可以观察到非静态同步态.系统存在部分同步解,其序参量 $R$ 随时间震荡.图 2－4 给出 $\alpha = 0.49$ 和 0.3 的相图,可以看到,系统除非相干态和同步态外,我们还看到一个新的相,这个相的特点是 $R(t)$依赖于时间.

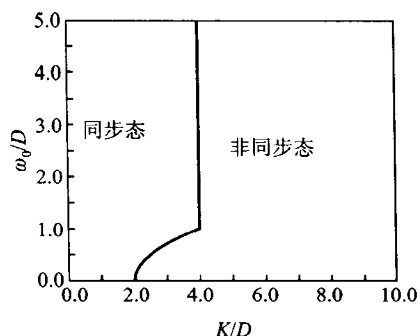



图 2-3 对称分布的相图

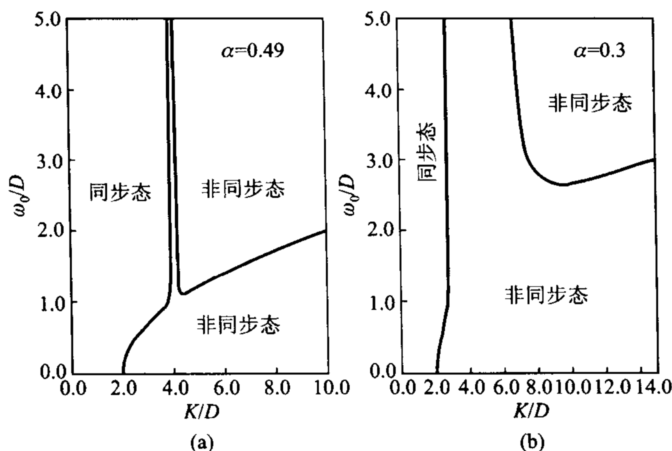



图 2-4 非对称分布的相图

### 2.2.5 时间延迟行为

在实际情况下，相互作用传递是需要时间的，如在生物个体之间的信息传播、耦合激光器之间、光和信号等的传播都需要一定时间．这样就需考虑时间延迟行为[124~131]．Yeung 等人考虑了有时间延迟耦合的 Kuramoto 模型[132]：

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin[\theta_j(t-\tau) - \theta_i(t) - \alpha] + \xi_i(t), \quad i = 1,2,\cdots,N, \tag{2.2.29}$$

其中 $\xi_i(t)$是无关联的白噪声，$\tau$ 是延迟，$\alpha$ 是相移因子（阻挫）．$\tau = \alpha = D = 0$ 时，系统回到 Kuramoto 模型；当 $\tau = 0, \alpha = 0$ 且 $g(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$时，系统回到

平均场 XY 模型.因此这是一个推广模型.

Yeung 等人解析讨论了 $g(\omega)=\delta(\omega-\omega_0)$时系统的同步相图.图 2-5(a)给出的是 $D=0$ 的情形,阴影部分表示的是非相干态,实线是理论计算给出的临界线.非同步态在以下区域是稳定的:

$$K<\frac{\omega_0}{2m-1},\quad \frac{4m-3}{2\omega_0-K}\pi<\tau<\frac{4m-1}{2\omega_0+K}\pi \tag{2.2.30}$$

其中 $m$ 为任意的正整数.可以看到数值的结果(灰色区域)与理论符合得很好.还可以看到当 $\tau$ 增加时,非同步的区域舌头越来越小,说明时间延迟可以加强同步.

进一步考虑完全同步 $\theta_i(t)=\theta(t)(i=1,2,\cdots,N)$ 的可能性.我们可以考虑一类特定的解 $\theta(t)=\Omega t+\beta$.自洽性要求

$$\Omega=\omega_0-K\sin(\Omega\tau), \tag{2.2.31}$$

由线性化可得另外的限定(即轨道的线性稳定性):

$$\cos(\Omega\tau)>0. \tag{2.2.32}$$

当 $K$ 足够大时,由于(2.2.29)存在非惟一的满足(2.2.31)的解,因此系统可存在多重的稳定同步态.下面的条件给出稳定的同步态不可能存在的条件:

$$K<\frac{\omega_0}{2(2m-1)}\text{且}\frac{4m-3}{2(\omega_0-K)}\pi<\tau<\frac{4m-1}{2(\omega_0+K)}\pi, \tag{2.2.33}$$

这里 $m$ 为任意正整数.

在图 2-5(b)中的黑色区域给出了同步禁区.图中的灰色区域为稳定同步态与非同步态共存的区域;白色区域中的非同步态不稳定,一个或几个同步态可以共存.由于灰色区域有双稳性质,因此在此处可观察到滞后现象.在灰色区域还可以观察到 $R(t)$的振荡现象,且随 $K$ 增加可发生倍周期分岔行为(观察中到周期 16 即终止).$R(t)$的振荡现象实际是由于振子系统出现了集团化现象,即若干振子可以以相同频率振荡,但这些集团之间有不同的频率,因而导致相差的周期调制.这种非定态现象在标准 Kuramoto 模型(无时间延迟)中是观察不到的,因此是一种时间延迟导致的行为.

我们也可以考虑自然频率分布不是 $\delta$ 分布的情况.例如,我们可以考虑洛仑兹分布:

$$g(\omega)=\frac{\gamma}{\pi[\gamma^2+(\omega-\omega_0)^2]}, \tag{2.2.34}$$

此时的临界耦合强度为(求解过程较复杂):

$$K_c=2(\gamma+D)/\cos(\Omega_c\tau), \tag{2.2.35}$$

这里 $\Omega_c$ 由下列方程自洽解出:

$$\Omega_c=\omega_0-(\gamma+D)\tan(\Omega_c\tau), \tag{2.2.36}$$

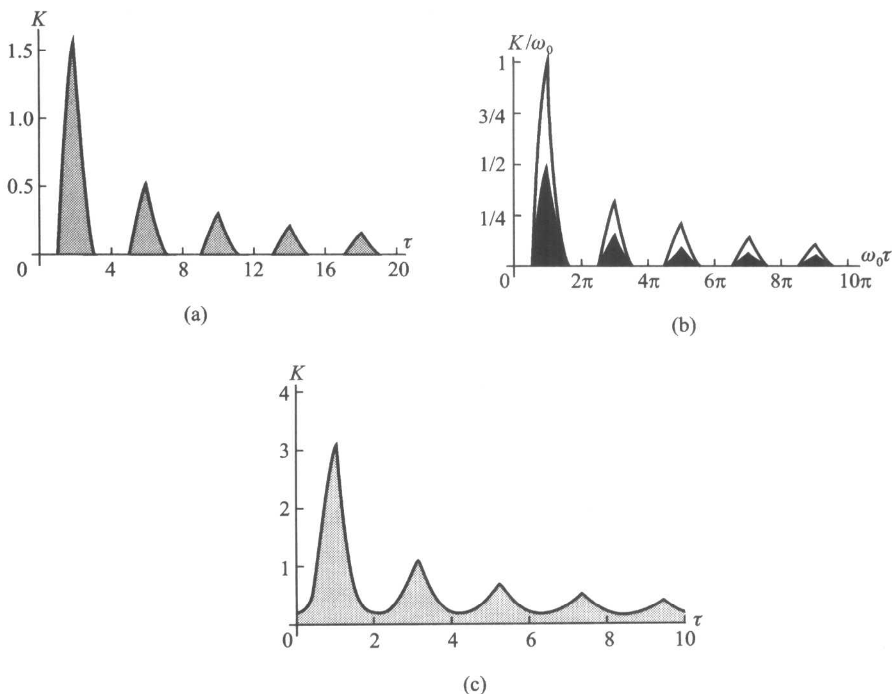



图 2-5　考虑时间延迟时的同步相图

图 2-5(c)给出了洛仑兹分布时的稳定非同步态区域，它与 $\delta$ 分布的情况类似，只不过平滑一些，另外曲线整体上升. 这说明自然频率分布对时间延迟带来的效应没有本质的影响.

用上述时间延迟的模型可以解释蟋蟀合唱的现象. 一只蟋蟀从发出声音到另外一只听到，其传播以声速进行.（当两只蟋蟀相距 3 米时，传播导致的延迟约为 10 ms.）但他们仍然能够达到同步的鸣唱.

### 2.2.6　非线性局域耦合振子系统的同步性

Kuarmoto 相变所讨论的是平均场的全局耦合，主要是为了对问题做数学处理的方便. 一般情况下耦合不是全局的，振子之间相互作用强度也不相同. 因此有必要考虑局域耦合的情况. 对于非近邻的情形，解析处理仍然难以进行. 对于最近邻的情况，我们可以作部分的解析处理[133~135]. 可以理论证明：在热力学极限下（$N\to\infty$），对于最近邻耦合的振子系统，我们不能观察到长程序，即在有限的耦合强度下系统不可能同步（可能会有一些同步的小集团，但 $N\to\infty$ 时测度为零）[136].

一、最近邻耦合

我们可以讨论如下的格点振子系统：

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + K\sum_j \sin(\theta_j - \theta_i), \qquad i = 1,2,\cdots,N. \tag{2.2.37}$$

上面的取和只对近邻操作.假设 $\omega_i$ 符合分布 $g(\omega)$，可假设其平均为零，方差为1.

以两个振子为例：

$$\begin{cases}\dot{\theta}_1 = \omega_1 + K\sin(\theta_2 - \theta_1),\\ \dot{\theta}_2 = \omega_2 + K\sin(\theta_1 - \theta_2),\end{cases} \tag{2.2.38}$$

我们可以方便地找到其同步解 $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2$.令 $\phi = \theta_1 - \theta_2$，上面两式相减可得

$$\dot{\phi} = (\omega_1 - \omega_2) - 2K\sin\phi, \tag{2.2.39}$$

同步解即$\dot{\phi} = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 = 0$.上面相差的方程为过阻尼单摆方程.显然当且仅当

$$|\omega_1 - \omega_2| \leqslant 2K \tag{2.2.40}$$

时$\dot{\phi} = 0$.因此对 $N = 2$ 的情形，$K \geqslant \frac{1}{2}|\omega_1 - \omega_2|$时两振子同步.

下面讨论 $N(>2)$个振子的情形.对一维格点和开放边界条件，我们有

$$\begin{cases}\dot{\theta}_1 = \omega_1 + K\sin(\theta_2 - \theta_1),\\ \dot{\theta}_i = \omega_i + K\sin(\theta_{i+1} - \theta_i) + K\sin(\theta_{i-1} - \theta_i), \quad i \in (1,N).\\ \dot{\theta}_N = \omega_N + K\sin(\theta_{N-1} - \theta_N),\end{cases} \tag{2.2.41}$$

我们需要知道锁相(同步)的概率 $P(N,K)$.当 $N$ 个振子达到同步时，对所有 $i$，$j$，$\dot{\theta}_i = \dot{\theta}_j$.上述所有方程相加，可得

$$\dot{\theta}_i(t) = \bar{\omega} \equiv \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\omega_k, \tag{2.2.42}$$

若只对前 $j$ 个方程取和，我们有

$$j\bar{\omega} = \sum_{i=1}^{j}\omega_i + K\sin(\theta_{j+1} - \theta_j), \tag{2.2.43}$$

令 $\phi_j = \theta_j - \theta_{j+1}$，上式可写为

$$K\sin\phi_j = X_j, \tag{2.2.44}$$

其中

$$X_j = \sum_{i=1}^{j}(\omega_i - \bar{\omega}), \tag{2.2.45}$$

系统达到同步态 $\dot{\theta}_i(t) = \dot{\theta}_j(t)$的充分必要条件是

$$\max|X_j| \leqslant K, \quad j = 1,2,\cdots,N, \tag{2.2.46}$$

所以

$$P(N,K) = \mathrm{Prob}(\max_{1\leqslant j\leqslant N}|X_j| \leqslant K). \tag{2.2.47}$$

当 $N \to \infty$ 时，由于 $\omega_i$ 按 $g(\omega)$ 随机给出，$X_j$ 是随机数的取和，类似于随机行走. 因此 $\max|X_j| \sim O(N^{1/2})$，随 $N$ 的增加而发散. 因为锁相需要 $K_c = \max|X_j|$，所以临界耦合强度 $K_c \sim O(N^{1/2})$. $N \to \infty$ 时，$K_c \to \infty$，即在热力学极限下最近邻耦合的振子不可能达到同步.

事实上，Strogatz 等人求出 $N \to \infty$ 时 $P(N, K_c)$ 的形式为[136]：

$$\lim_{N \to \infty} P(N, KN^{1/2}) = \frac{\sqrt{2\pi}}{K} \sum_{j=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{(2j+1)^2 \pi^2}{8K^2}\right], \tag{2.2.48}$$

对任意固定 $K$，$N \to \infty$ 时，$P(N, K) \to 0$，也说明同步的不可能性.

对二维和高维格点系统，也可证明同步的 $K_c \to \infty$.

二、从平均场到最近邻的过渡

研究从最近邻耦合到全局耦合的过渡是很有意义的. Rogers 等人考虑了下面的系统[137]：

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{\eta} \sum_{\gamma=1}^{N'} \gamma^{-\alpha} [\sin(\theta_{i+\gamma} - \theta_i) + \sin(\theta_{i-\gamma} - \theta_i)]. \tag{2.2.49}$$

这里 $i = 1, 2, \cdots, N$，$N' = (N-1)/2$，$\eta$ 是一个内插于最近邻与平均场极限的系数：

$$\eta = 2 \sum_{i=1}^{N'} i^{-\alpha}, \tag{2.2.50}$$

$\alpha$ 描述作用衰减的速度. 可以看到 $\alpha \to 0$ 时，上述模型即 Kuramoto 平均场模型；当 $\alpha \to \infty$ 时上面仅有 $i = 1$ 项保持($i > 1$ 的项趋于零)，故此时即最近邻的情形. 对前者，系统在 $K_c = 2/[g(\bar{\omega})\pi]$ 处存在同步相变，而对后者系统同步所需的 $K_c \to \infty$. 而中间的过渡情况很有意思. 图 2-6 给出了系统同步的相图，在临界线的右边为同步态. 图中 $\alpha = 0$ 的点对应的 $K$ 即为 $2/[g(\bar{\omega})\pi]$. 而当 $\alpha$ 增加时，$K_c$ 也增加且很快发散. 可以看到，当 $\alpha \to \alpha_c = 2$ 时 $K_c \to \infty$，这说明不仅对最近邻耦合，

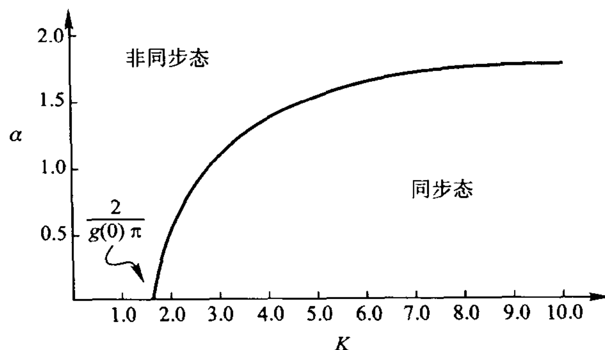



图 2-6 过渡情况下系统的同步相图

而且只要 $\alpha \geqslant \alpha_c$，系统就不可能达到同步.

这里仅仅考虑了几种推广的情形，另外像考虑阻挫效应、二维和三维格点的情形均有人讨论过，这里不再一一列举.

## 2.3 耦合周期振子同步的动力学

### 2.3.1 模型

前面几节讨论系统同步时，我们基本上是考虑了 $N\to\infty$ 个振子的系统，因此很大程度上依赖于统计的方法. 这种方法的优点是可以对一些简单的系统作出解析的讨论，得出简洁的理论结果. 但对振子之间同步过程的动力学，例如如何理解振子之间是怎样相互组织而达到同步，振子同步是以什么形式进行，同步在动力学上如何表现等，统计的方法则不能给出满意的回答. 探讨同步的动力学机制与表现是很重要的，它使我们可以更好地从微观上理解耦合振子系统的自组织行为.

前面我们讨论过两个振子的同步情况. 在同步点 $K_c = \frac{1}{2}|\omega_1 - \omega_2|$ 附近 $K < K_c$ 时，

$$\dot{\phi} = (\omega_1 - \omega_2) - 2K\sin\phi, \tag{2.3.1}$$

上述方程有振荡解.

$$\langle\dot{\phi}\rangle \propto (K_c^2 - K^2)^{1/2} \sim (K_c - K)^{1/2}, \tag{2.3.2}$$

$\langle\cdot\rangle$ 表示长时平均. 因此在同步点锁相对应于鞍结分岔. 对于多个振子的情况，同步过程则不太清楚. 这个问题最近受到了注意，研究得出了许多有意义的结果[138~141].

我们考虑下面的正弦耦合的转子系统：

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{2N_L + 1}\sum_{j=1}^{N_L}[\sin(\theta_{i+j} - \theta_i) + \sin(\theta_{i-j} - \theta_i)], \tag{2.3.3}$$

这里振子都有不同的自然频率 $\omega_i$，$N_L$ 表示耦合距离. 当 $N_L = \mathrm{int}[N/2]$ 时，系统回到 Kuramoto 平均场模型；当 $N_L = 1$ 时，上面的系统正是最近邻耦合的振子链，不是一般性我们假设 $\sum_i \omega_i = 0$. 下面的讨论主要是对最近邻情况进行的. 虽然前面对 $N\to\infty$ 时的情况的讨论表明热力学极限下最近邻耦合系统同步的不可能性，但对于有限的 $N$，系统总是可以达到全局同步的. 另外，是否近邻耦合并不影响我们讨论的大部分定性的结果.

对最近邻耦合，上面的方程可写为：

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{3}[\sin(\theta_{i+1} - \theta_i) + \sin(\theta_{i-1} - \theta_i)], \tag{2.3.4}$$

当我们增加耦合强度 $K$ 时,由于自然频率的无序与耦合带来的有序的竞争,系统会表现出复杂的同步动力学.对于最近邻耦合情形,则还有耦合距离与自然频率差异(距离)的竞争.原则上说,耦合距离越近,两振子越容易同步(相互作用容易传递);自然频率差异越小的振子越容易同步.但二者由于竞争,耦合上相近的振子如果自然频率差异大则未必容易同步,这就会造成复杂的行为,这在下面可以看到.总体而言,随着耦合强度增加,系统会逐步达到同步.因此存在一个临界的 $K_c$,当 $K > K_c$ 时所有振子的频率都锁定.在 $K < K_c$ 时,部分振子会达到同步.为方便观察,可以定义第 $i$ 个振子的平均转数:

$$\bar{\omega}_i = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\theta}_i(t) \mathrm{d}t. \tag{2.3.5}$$

当 $\bar{\omega}_i = \bar{\omega}_j$ 时,我们就认为第 $i$ 个振子与第 $j$ 个振子达到同步.

### 2.3.2 同步阵发与相移

我们可以首先观察系统的第一个分岔点 $K = K_c$ 附近的情况.在图 2-7 中我们给出了 $N = 5$ 个振子的 $\dot{\theta}_i(t)$ 的演化情况.$K = 0$ 时,$\dot{\theta}_i(t) = \omega_i$.对弱耦合,$\dot{\theta}_i(t)$ 在其自然频率 $\omega_i$ 附近作小幅振荡.增加 $K$,$\dot{\theta}_i(t)$ 振荡幅度变大,另外平均频率 $\bar{\omega}_i$ 将会互相靠近(它们均会从其自然频率 $\omega_i$ 偏移开).在图 2-7(b)中给出的是在近同步点$K_c$ 的 $\dot{\theta}_i(t)$ 的情况.我们可以看到 $\dot{\theta}_i(t)$ 此时都靠近到 $\dot{\theta}_i(t) = 0$(同步态)附近,但会每隔一段时间 $\tau$ 发生同步的开关阵发(脉冲).“关”态即同步态,但同步“开”态则破坏这个同步态.当 $K \to K_c$,阵发间隔时间 $\tau$ 会越来越长,直至 $K = K_c$ 时,系统达到同步态 $\dot{\theta}_i(t) = 0$,$\tau \to \infty$.在图2-8中我们给出了 $\tau$ 与 $K_c - K$ 的标度关系.可以看到对不同的振子数,我们总有

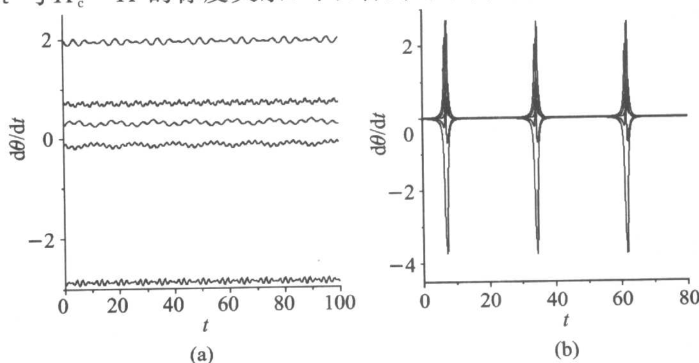



图 2-7 $N = 5$ 个振子的速度演化情况,注意在临界点附近的开关阵发情况

$$\tau \propto (K_c - K)^{-1/2}. \tag{2.3.6}$$

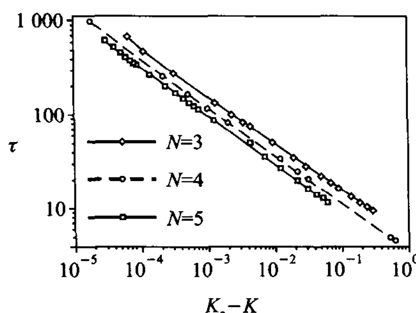



图 2-8 阵发时间间隔与耦合强度的关系

我们还可以观察一下在同步临界点附近的各振子相位变化情况. 图 2-9(a)、(b)给出了 $N=5$ 和 $N=15$ 两种情况下振子的相位演化. 可以看到相位的演化是典型的台阶式跳跃,相位在一定时间内锁定,经过 $\tau$ 时间后振子的相位又同步地跳跃,跳跃幅度不相同. 如对 $N=5$ 的情况,我们有 $\Delta\theta_{1,2,4,5}=\frac{2\pi}{5}$, $\Delta\theta_3=-\frac{8\pi}{5}$;对 $N=15$ 的情况,可以看到 $\Delta\theta_{1,3}=-\frac{16\pi}{15}$, $\Delta\theta_{5,7,9}=\frac{4\pi}{15}$.

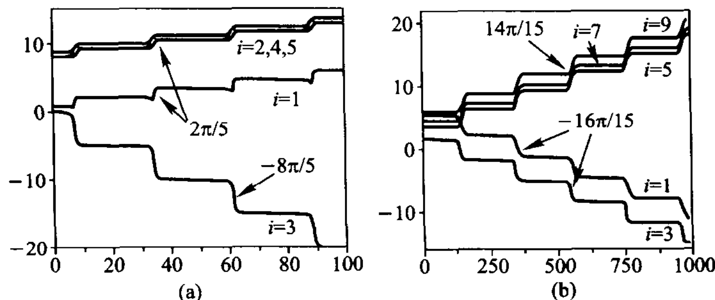



图 2-9 在同步临界点附近相位的演化

上面的同步脉冲式阵发、量子化的相移及同步临界点附近的标度规律可以作如下理解[138]. 假设 $K>K_c$ 时,振子被锁定于 $\{\bar{\theta}_i(K)\}$, $i=1,2,\cdots,N$. 由于方程(2.3.4)中的相互作用项是 $2\pi$ 的周期函数,因此满足

$$\begin{aligned}\Delta\bar{\theta}_{i+1}(K,\boldsymbol{m}) &= \bar{\theta}_{i+1}(K,\boldsymbol{m})-\bar{\theta}_i(K,\boldsymbol{m})\\ &= \bar{\theta}_{i+1}(K)-\bar{\theta}_i(K)+2\pi m_i\\ &= \Delta\bar{\theta}_i(K)+2\pi m_i\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

关系的解 $\{\bar{\theta}_i(K,\boldsymbol{m})\}$ 也必然是系统的锁相解. 这里 $\overline{\boldsymbol{m}}=(m_1,\cdots,m_N)$ 为整数

集，$m_i$ 为任一整数．当 $K<K_c$ 时，锁相解会通过鞍结分岔失稳（类似于前面提到的 $N=2$ 的情况）．在 $K=K_c$，系统存在一条异宿轨道连接所有可能的锁相解．在 $K$ 略小于$K_c$ 时（$|K-K_c|\ll 1$），锁相解失稳，系统运动会沿着这条异宿轨道进行．运动进行到锁相解附近时会停留一段时间（"粘滞效应"）（对应于观察到的"关"态或相位的平台部分），然后由于不稳定沿异宿轨道继续前进，很快地接近另一个锁相解（此过程对应于"开"态，或相位的跳跃，时间很短）．由于振子之间的耦合作用，它们会同时地在"开"和"关"之间转换，从而形成同步的脉冲和相位演化．实际上，在鞍结分岔点附近我们有普适的形式：

$$\dot{x}=(K_c-K)+x^2, \tag{2.3.8}$$

系统从 $x=0$ 到 $x\to\infty$ 所需的时间为

$$\tau\propto\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(K_c-K)+x^2}=\frac{\pi}{2\sqrt{K_c-K}}. \tag{2.3.9}$$

这一标度规律正是我们数值观察到的结果．由于鞍结分岔这一特点，我们期望在临界点 $K_c$ 附近 $\bar{\omega}_i$ 与 $\Omega=\sum_{i=1}^{N}|\bar{\omega}_i|$ 均满足标度率 $(K_c-K)^{1/2}$．这一规律在实际观察中也得到很好的验证．

我们还可以计算上面看到的相位移动 $\Delta\theta_i$．由于系统的运动方程容易看出这些相位的总和为零（我们现在相当于在运动系中），即

$$\sum_{i=1}^{N}\Delta\theta_i=0. \tag{2.3.10a}$$

这样的话，如果有的振子相位逆时针演化（$\Delta\theta_i>0$）．由于前面观察到的相位都是周期的，因此有理由认为沿异宿轨道的跃迁过程只能在相邻的锁相态间进行，因此前面的 $m_i$ 只能取 0（不动）或 $\pm1$．因此

$$\Delta\theta_{i+1}-\Delta\theta_i=0\text{ 或 }\pm2\pi \tag{2.3.10b}$$

因此 $\Delta\theta_i$ 可以由式(2.3.10)(a)及(b)联合求出：

$$\Delta\theta_i=0,\pm\frac{2\pi}{N},\pm\frac{4\pi}{N},\cdots,\pm\frac{2(N-1)\pi}{N},\pm2\pi. \tag{2.3.11}$$

很显然数值观察到的相移都属此类．在实际中，相移的大小取决于自然频率$\{\omega_i\}$的选择．

### 2.3.3　同步分岔树与集团化

上面讨论了在全局同步临界点的动力学特点．实际上，随着耦合强度的改变，振子之间需经过一个协调过程才能达到全局同步，理解这个中间过程也是很有意义的．在 $K$ 远离 $K_c$ 时，我们无法观察到严格的同步 $\dot{\theta}_i(t)=\dot{\theta}_j(t)$，$(i,j=1,2,\cdots,N)$．但我们可以定义平均意义上的同步，即当两振子的相位差在$t\to\infty$

满足

$$|m\theta_i(t) - n\theta_j(t)| < C \tag{2.3.12}$$

时，就认为两振子位相锁定，这里 $m,n$ 为两非零整数，$C$ 为一有限常数. 实际上，这是两振子的 $m:n$ 锁相，对应于平均转数

$$m\bar{\omega}_i = n\bar{\omega}_j. \tag{2.3.13}$$

典型的锁相就是 1:1 的情况，即 $\bar{\omega}_i = \bar{\omega}_j$. 为更清楚看到振子同步的情况，我们引入同步分岔树的概念，即计算所有振子的 $\bar{\omega}_i$ 随 $K$ 的变化关系. 在图 2 - 10(a)中，我们给出了 $N=5$ 个振子的同步分岔树，$K=0$ 的 $\bar{\omega}_i$ 即振子 $i$ 的自然频率(由计算事先给定). 振子的号码标在图上. 我们可以看到，同步分岔树非常清晰地反映出振子是如何随 $K$ 的增加一步步达到全局同步. 很显然，这是一个集团化的过程. 例如在图中可看到，$K$ 增加时，两个自然频率与耦合距离上同时相近的 4 号与 5 号振子首先同步形成一个同步集团；$K$ 继续增加，虽然 2 号与 5 号振子在自然频率上相近，但由于空间上不相邻，因此 1 号与 2 号振子同步. (1,2)与(4,5)两个集团在 $K$ 继续增加下合成一个大的集团，最后与自然频率相差极大的 3 号形成一个全局的同步集团.

当系统中的振子数更多时，同步的集团化过程就更为复杂. 图 2 - 10(b)给出了一个 $N=15$ 的情况. 我们仍可看到集团化的过程. 仔细的观察可以发现三类集团化. 第 A 类即规则的集团化，如前面所观察到的空间相近的振子或集团

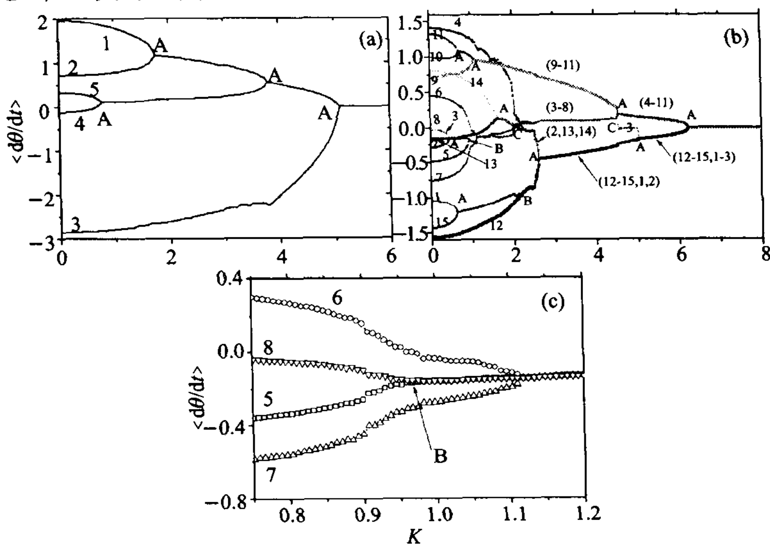



图 2 - 10 (a) $N=5$ 时的同步分岔树；(b) $N=15$ 时的同步分岔树；(c) $N=15$ 的局部放大

的集团化，这一类发生的最多，我们在图中用A表示．如果两个空间上不相邻的振子（或集团）具有相近的自然频率，而空间上处于它们之间的振子（或集团）与它们频率相差较大，则空间上不相邻的振子之间也可以形成同步集团（称为非局域同步）．这非局域集团可以是另外的振子迅速地与其形成更大的同步集团（见图中的B同步点）．为更清楚，在图2-10(c)中我们给出了局部放大图．可以看到振子5和8不相邻，但它们可以先同步，与其相邻的6和7则在5，8形成集团后很快加入进来，我们可看到在$K\approx1.11$附近，同步以三分岔的形式进行．这种效应是局部耦合的后果，它体现了格点空间距离与频率差异之间的竞争．我们将在后面看到，非局域同步在耦合混沌振子系统中也可以观察到．第三类集团化过程为第一类的逆过程，即随着耦合强度的增加，原来在一个集团的振子会分裂成若干小的集团，如图中的(c)所示．这种去同步化总是发生在"边缘"振子上，即由于两个集团的竞争，一个振子会脱离一个集团而加入另外一个集团．

同步分岔树不仅给出了耦合振子系统同步分岔的具体过程，反映了非线性系统的内部有序变化，而且还可以用来作一些具体计算．例如，我们可以根据同步分岔树计算出前面在$K_c$附近的相移$\Delta\theta_i$．对前面计算的$N=5$的情形，当$K<K_c$且$|K-K_c|$很小时，所有振子分为两个同步集团(3)和(1,2,4,5)，所以$\Delta\theta_{1,2,4,5}$是相同的．这样根据关系$\sum_{i=1}^{N}\Delta\theta_i=0$，我们有

$$\sum_{1,2,4,5}\Delta\theta_i=-\Delta\theta_3=4\Delta\theta_i,\qquad i=1,2,4,5.$$

由于振子2与3属于不同的集团，并且$\bar{\omega}_2>0$，$\bar{\omega}_3<0$，由条件$\sum_i\omega_i=0$我们有

$$\Delta\theta_2-\Delta\theta_3=2\pi,$$

由上面二式，很容易可以解出$\Delta\theta_3=-\frac{8\pi}{5}$，$\Delta\theta_{1,2,4,5}=\frac{2\pi}{5}$．这与前面的数值观察完全一样．同样对前面$N=15$个振子的情况也可做类似计算，可以得到$\Delta\theta_i=\frac{14\pi}{15}$$(i=4\sim11)$，$\Delta\theta_j=-\frac{16\pi}{15}(j=1\sim3,12\sim15)$．这些计算均说明在$K_c$附近的相移取决于最后的集团的情况．对一般情况[139]，如果$K<K_c$时系统有两个同步集团（不排除有多个集团的特殊情况），并且有$N_1$个逆时针旋转的振子($\bar{\omega}_i>0$)，则采用类似上面的讨论可知

$$\Delta\theta_i=\frac{2\pi(N-N_1)}{N},\tag{2.3.14}$$

对其余$N-N_1$个顺时针旋转的振子相移则为

$$\Delta\theta_j=-\frac{2\pi N_1}{N}.\tag{2.3.15}$$

对于开放链的情形，当 $K<K_c$ 时的两个集团是可以具体知道的，即我们可以知道当 $K$ 越过临界点 $K_c$ 时一个同步大集团从何处分成两个小集团．回忆前面我们证明 $N\to\infty$ 同步不可达到时引进了

$$X_i=\sum_{j=1}^{i}\omega_j, \tag{2.3.16}$$

这里没有 $\bar{\omega}$ 是因为我们先假设了 $\bar{\omega}=0$．因为 $\omega_j$ 在实际中根据某一分布随机给出，而且可正可负，所以 $X_i$ 是一个随机行走，随 $i$ 可能增加也可能减小．对有限的 $N$，$|X_i|-i$ 的关系可以有多个局部极值，但总存在一个 $i_0$ 使得 $|X_{i_0}|$ 为最大值．这个 $i_0$ 即集团分裂的位置，$i_0$ 对应的 $|X_{i_0}|$ 亦对应于临界值 $K_c$．

### 2.3.4 同步的动力学表现

在前面我们集中讨论了同步过程的平均行为，即 $\bar{\omega}_i$ 为长时间平均，我们看到非常漂亮的同步分岔现象．从平均的角度看，从非同步到全局锁相的过程就是一个不同程度同步的分岔树．另外，我们还集中分析了在全局同步转变点附近的动力学行为，但对于同步分岔树其中的更多地方我们尚不太了解系统的动力学．本小节将对此进行深入分析．

一、从高维准周期到低维准周期的转变

要考察系统的动力学行为有很多手段，其中最有说服力的手段莫过于观察系统的李雅普诺夫指数．知道了系统的李雅普诺夫指数谱，我们就会了解系统吸引子的基本性质．观察指数谱随系统参数的变化，我们就可以了解系统吸引子随参数的变化情况．

在图 2-11(a)中，我们计算了 $N=5$ 个振子的李指数谱随耦合强度的变化情况．若指数中有一个或多个大于零的指数，则说明系统运动是混沌的．若有 $M$ 个指数为零且没有大于零的指数，则说明系统的运动是准周期，即相空间中的吸引子是 $M$ 维的环面(记为 $T^M$)．在前面我们讲到了 Ruelle 与 Takens 的准周期到混沌道路的分析中曾提到高维环面的结构不稳定性[26,27]．实际上在一些情况下(例如系统的作用不是变化非常剧烈的)高维环面也可以以非零测度存在．以我们目前分析的系统为例，我们可以在弱耦合下看到高维准周期的存在．在图 2-11(a)中，当 $K\leqslant 0.75$ 时，我们看到系统的 5 个指数 $\lambda_{1\sim5}$ 均为零，说明现在系统运动在 $T^5$ 上进行，而且随着 $K$ 的改变可以稳定地保持这个 5 维准周期．当 $K>0.75$ 时，可以看到有一个李指数由零变负，零指数数目减少一个，说明这个地方系统的吸引子有一个突变，由 $T^5$ 变为 $T^4$．这个动力学上的突变预示着一个分岔的发生．对比图(2-10)的 $N=5$ 的同步分岔图，我们可以发现正是在这个动力学的突变点处振子 4 和 5 发生同步．继续增加 $K$ 我们还可以发现第二

个,第三个,……动力学突变,每次突变对应于一个零李指数变负,两个振子同步.因此可以说耦合周期振子的同步过程从动力学上看是从高维准周期向低维准周期过渡的过程.在每一个突变点,变负的李指数 $\lambda_i$ 都遵守下面的标度规律:

$$\lambda_i \propto -A(K_c^i - K)^{1/2} \tag{2.3.17}$$

这里 $A$ 为一系数,$K_c^i$ 为突变点.

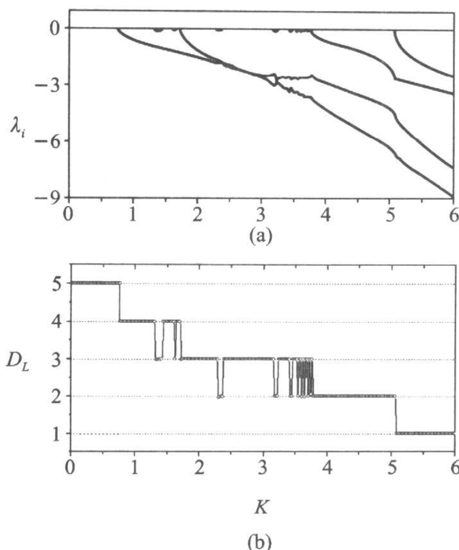



图2-11　$N=5$ 时李雅普诺夫指数谱及其维数随耦合强度的变化情况

从高维准周期向低维准周期的过渡意味着系统运动的吸引子维数降低[140,141].我们可以计算吸引子的维数随 $K$ 的变化.一个最简单的维数计算可以根据李指数谱得到.根据 Kaplan-Yorke 猜想

$$D_L = M + \frac{1}{|\lambda_{M+1}|}\sum_{j=1}^{M}\lambda_j, \tag{2.3.18}$$

这里 $M$ 是一个满足如下条件的整数:

$$\sum_{j=1}^{M}\lambda_j \geqslant 0, \quad \sum_{j=1}^{M+1}\lambda_j < 0, \tag{2.3.19}$$

这里李指数是按照由大到小的顺序排列起来的,即 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_N$.在图2-11(b)中我们计算了 $N=5$ 个振子情况的李雅普诺夫维数 $D_L$ 随 $K$ 的变化,可以看到 $D_L$ 随 $K$ 是台阶变化.在每次同步(突变)发生 $D_L$ 前维持一个整数,在越过同步点后 $D_L$ 减小1.另外我们还可以看到 $D_L$ 的反复上下跳动的行为,这说明在高维准周期中会有低维准周期(或周期)窗口.

下面我们讨论一下同步点附近的情况.在全局同步临界点 $K_c$ 附近,我们观

察到相差的同步跳跃和脉冲现象. 在集团化同步点附近也存在类似的情况. 设振子 $l$ 与 $j$ 在 $K>K_c^i$ 时同步, $K<K_c^i$ 时 $\phi_{lj}(t)=\theta_l(t)-\theta_j(t)$ 会出现相移(非局域化). 我们同样可观察相差的速度

$$\dot{\phi}_{lj}(t)=\dot{\theta}_l(t)-\dot{\theta}_j(t), \tag{2.3.20}$$

当 $\phi_{lj}$ 有相位移动时, $\dot{\phi}_{lj}(t)$ 就会表现出脉冲现象. 在图 2－12(a)－(c)中, 我们给出了在几个不同临界点($T^4\to T^3$, $T^3\to T^2$, $T^2\to T^1$)的情况, 可以看到明显的阵发现象. 这与 $K_c$ 的阵发稍有不同, $K_c$ 附近的阵发的"关"态是不动点, 这里的"关"态是周期态或准周期态. 但它们的共同特点是相邻"开"态的时间间隔 $T$ 都是规则的. 我们在图 2－12(d)中给出了这几种不同情况下 $T$ 在同步临界点附近的行为, 可以发现, 它们与 $K_c$ 附近的临界行为一致, 即

$$\langle T_i\rangle \propto (K_c^i-K)^{-1/2}. \tag{2.3.21}$$

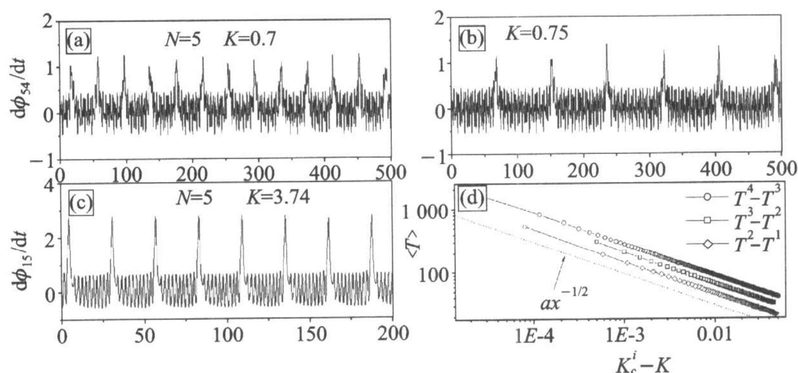



图 2－12　在不同临界点附近的开关阵发现象

二、去同步导致的混沌

在上面我们看到了在振子同步的进程中系统的运动可以是周期的、准周期的(从低维到高维). 由于我们所研究的系统是高维非线性的(耦合作用是非线性的), 因此应该可以观察到混沌现象. 当振子个数 $N$ 比较小, 自然频率与空间距离协调比较好时, 我们通常只能看到规则的运动 $T^n$($n$ 可以从 $N$ 一直到 1), 例如前面所看到的 $N=5$ 的情形. 随着 $N$ 的增加, 自然频率随机给定, 就有可能有混沌运动出现. 在图 2－13 中, 我们计算了 $N=15$ 情况下的最大李指数随 $K$ 的变化. 可以看到, 在 $K$ 的很大范围内都有 $\lambda_{\max}>0$, 说明这些区域的运动是不规则的. 对比李指数与同步分岔树的图, 我们可以知道在这些混沌区, 系统仍处于部分同步的状态. 在图 2－14 中, 我们给出了 Poincaré 截面图来分析系统的动力学, 这里 $\dot{\theta}_1(n)$ 表示的是每次当 $\theta_1(t)$ 穿过 $2n\pi$ 时 $\dot{\theta}_1(t)$ 的值. 很显然当 $K>K_c$

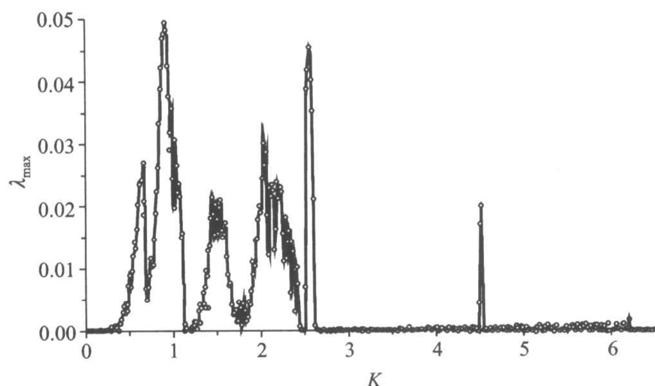



图2-13　$N=15$ 时最大李雅普诺夫指数的变化

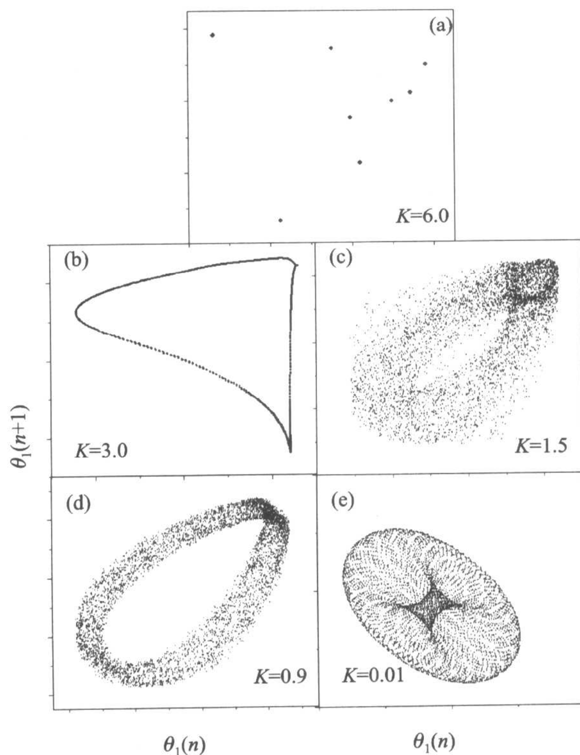



图2-14　$N=15$ 时在不同耦合强度下的庞加莱截面图

时，系统是不动点解，截面上的点只有 $\dot{\theta}_1(n)=\dot{\theta}_1(n+1)=0$. 当 $K<K_c$ 时，系统处于两同步集团情形，系统运动是周期的，在截面上我们可看到8个点，说明这是周期8的解. 通常在两个集团中的振子运动不相同(如果观察另外的集团，可看到周期7解). 一般说来，$N_1$ 个振子的同步集团的运动是周期($N-N_1$)的，

另外 $N-N_1$ 个振子的集团则表现为周期 $N_1$ 运动. 在三集团的区域,我们可以看到二频的准周期(如图(b)所示),这很容易理解. 对现在的情形,我们有 $\sum_{i=1}^{N}\bar{\omega}_i=6\bar{\omega}_1+6\bar{\omega}_3+3\bar{\omega}_9=0$,表明只有两个线性独立的平均频率. 当 $K$ 很小时,我们可以看到系统的准周期具有很高的维数(如图(e)). 在中间的区域,则可看到环面被破坏的混沌运动(见图(c)及(d)).

上述的混沌运动与振子的同步状态有密切的关系. 在图 2-15 中,我们给出两个放大的同步分岔树及其相应的最大李指数的变化. 很清楚可以看出,当原先

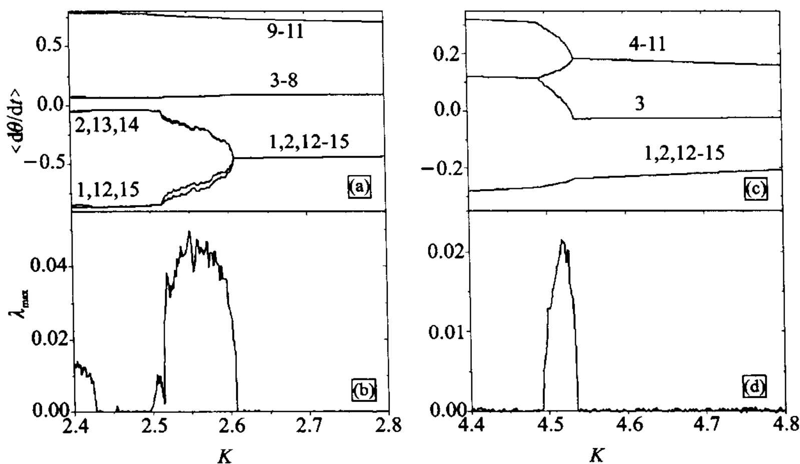



图 2-15 放大的同步分岔树及其相应的最大李指数的变化

同步的两振子(或集团)失去同步时,最大李指数变为正,而当新的同步出现时,指数又变为零,我们把这种现象称为去同步导致的混沌. 当我们观察相差的行为时,可以看到 $\dot{\phi}_{ij}(t)$ 的无规则脉冲. 图 2-16(a)、(b)中给出了 $N=15$ 个振子在 $K=2.56$ 和 2.60 时 $\dot{\phi}_{21}(t)$ 的行为(振子 1 和 2 同步前),可以看到在环面附近的开关脉冲式阵发行为. 增加 $K$ 时,新的长阵发时间间隔尺度会加入到竞争中,当 $K$ 趋近同步点时,会出现无穷长的时间尺度,阵发停止. 为便于观察,在图(c)、(d)中我们给出了 $N=9$ 和 15 两种情况下在同步临界点前的阵发时间 $T$ 与 $K$ 的关系. 可以看到,当 $K$ 离临界点较近时,阵发频繁地进行. 逐步增加 $K$,可以发现有新的 $T$ 逐步加入进来,而加入的方式是台阶式的. 新增加的是时间尺度与原有时间尺度无规地交替出现,导致了阵发的随机发生,正是这种多种时间尺度的竞争导致了前面的去同步混沌[140].

三、阻挫效应

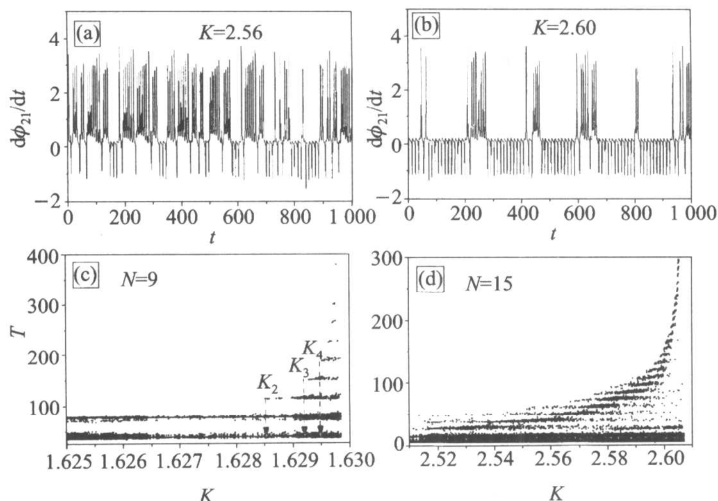



图 2-16 混沌阵发

阻挫效应对耦合振子系统同步的影响近些年引起人们的注意[142~146]. 阻挫在 Heisenberg XY 模型, Frenkel-Kontorova 模型及其他系统相变研究中是一个非常重要的参量. 例如在约瑟夫森结阵列和阶梯实验中, 阻挫起着关键的作用. 在实验上, 阻挫可以由加上一个磁场而很容易实现. 下面我们来讨论这个参量在振子同步过程中的作用[147].

我们仍然采用 $N$ 个正弦耦合的相位振子系统来描述:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + K \sum_{j=i\pm1} \sin(\theta_j - \theta_i - \alpha), \tag{2.3.22}$$

这里 $\alpha$ 即阻挫, 它描述相邻振子之间相位的自然失配(相移), 其他参量与前面相同. 在图 2-17(a)中我们计算了 $N=5$ 时同步分岔树 $\Omega_i$ 随 $\alpha$ 的变化情况. 自然频率 $\{\omega_i\} = \{1.955, 0.718, -2.862, -0.126, 0.315\}$, $K=1.83$(无阻挫时系统达到全局同步态), 可以看出, 在 $\alpha$ 的很大区间内系统仍可保持集团态, 同时平均频率随 $\alpha$ 有一个移动. 在 $\alpha \approx 0.45$ 时, 集团态遭到破坏, 振子出现二集团态; 继续增加阻挫, 振子很快以各自不同的频率振荡(完全非同步态). 在 $\alpha$ 很小的区间我们还可看到多集团态, 这表明阻挫会破坏系统的同步.

实际上阻挫引发的去同步可以由 $N=2$ 振子的情况容易理解. 对 $N=2$, 运动方程为

$$\dot{\theta}_{1,2} = \omega_{1,2} + K\sin(\theta_{2,1} - \theta_{1,2} - \alpha), \tag{2.3.23}$$

引入相位差 $\phi(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t)$ 及自然频率差 $\Delta = \omega_1 - \omega_2$(不失一般性, 设 $\Delta > 0$), 可得到

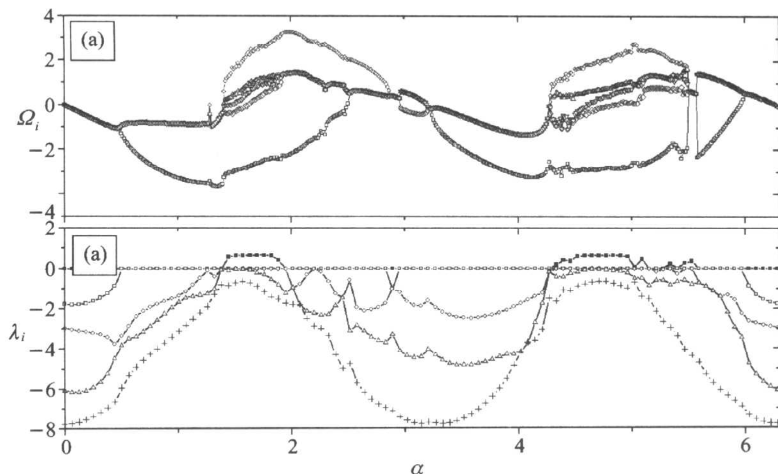



图 2-17 $N=5$ 时同步分岔树 $\Omega_i$ 随 $\alpha$ 的变化情况及其李指数谱变化情况

$$\dot{\phi}(t)=\Delta+2K\cos\alpha\sin\phi. \tag{2.3.24}$$

这正是过阻尼情况的单摆方程.显然当 $2K|\cos\alpha|\geqslant\Delta$ 时方程有不动点解(对应于 $N=2$ 振子系统的同步解),即

$$K\geqslant K_c=\frac{\Delta}{2|\cos\alpha|}. \tag{2.3.25}$$

当 $\alpha\neq n\pi$($n$ 为整数)时,$|\cos\alpha|<1$,因此 $K_c(\alpha\neq n\pi,\Delta)>K_c(n\pi,\Delta)$.特别地,当 $\alpha=n\pi+\frac{\pi}{2}$时,$|\cos\alpha|=0$,因此 $K_c\to\infty$,即此时两个振子的锁相是不能达到的.当 $N>2$ 时,$K_c$ 与 $\alpha$ 的依赖关系更为复杂,但在 $\alpha=n\pi+\frac{\pi}{2}$附近的行为类似,因此我们总可以看到 $\alpha=n\pi+\frac{\pi}{2}$附近的去同步行为.

上述的阻挫引发去同步可以导致复杂的动力学,这在 $N=2$ 的情况下是观察不到的.一方面,与前面讨论的同步动力学类似,去同步伴随着系统由低维准周期(或周期)向高维准周期的转变.而高维准周期在拓扑上是不稳定的,因此阻挫可引发系统的混沌行为.在图 2-17(b)中我们计算了对应于图(a)的同步分岔树的李指数谱 $\lambda_i$.我们可以清楚地看到上述现象(看李指数由零变负与同步的对应及正的最大李指数).

上述混沌的出现伴随着环面的破坏.我们既可以看到由通常的 $T^2$ 向混沌的转变(Ruclle-Takens 道路).也可以看到由高维准周期向混沌的转变,因此这个系统可以用来对准周期迈向混沌的道路进行深入细致的研究.准周期可以有

多种方式失稳而变为混沌运动,这些机制大多是准周期道路与其他道路的结合.以 $T^2$ 为例,它的一种典型方式是通过阵发而使得环面直接遭到破坏,这样在 $T^3$ 出现之前就被破坏.另外一种我们在本系统中看到的机制是环面的倍分岔过程,即单个 $T^2$ 环面可以随 $\alpha$ 改变而出现两个 $T^2$ 环面,进而分成四个、八个、…而进入混沌.通常这种倍分岔过程不像 Feigenbanum 的倍周期道路那样是无限的,在几次分岔之后运动就可变为混沌的.在图 2-18 中,我们给出 $N=5$ 个振子在 $K=1.667$ 时及不同 $\alpha$ 的 Poincaré 截面.截面($\theta_2$,$\theta_3$)上的每一个点是当 $\theta_1$

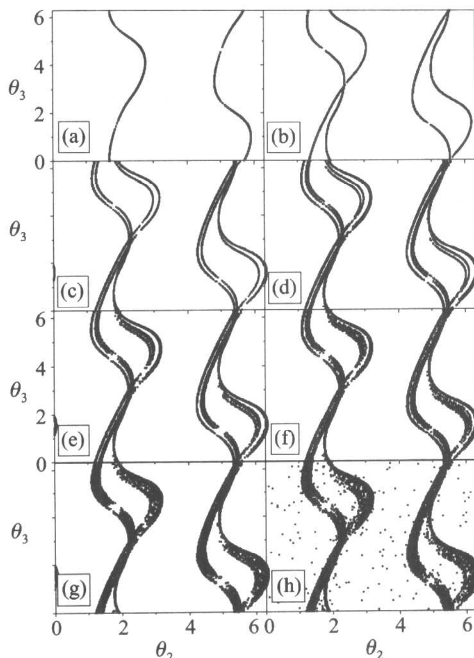



图 2-18 利用庞加莱截面看到的环面倍周期分岔

穿过 $\pi$ 时得到的(取 $2\pi$ 的模).可以看到当 $\alpha=1.38$ 时,截面由四条连续线构成,说明此时系统的运动是 $T^2$ 准周期的.在 $\alpha=1.395$,可以看到前面的每条线分岔成为两条相交的线,表明 $T^2$ 环面经历了一次拓扑的变化(折叠或旋转),这就是环面的倍分岔现象[148,149].显然后者比前者在结构上复杂了.这种倍分岔现象可以发生多次.我们通过仔细观察可以看到 8~9 次倍分岔.在 $\alpha=1.403\,9$,我们看到倍分岔过程终止,环面变为混沌的.这种混沌称为环面混沌,其特点是环面本质仍存在,但其结构已被破坏.当 $\alpha=1.404\,4$ 时,可以看到混沌环面通过阵发变为更大尺寸(危机).

通过高维 Poinceré 截面技术,我们可以对上述倍分岔过程有一个更清楚的

认识.我们可以取当 $\theta_3$ 与 $\theta_4$ 同时穿过 $\pi$ 时的$(\theta_1, \theta_2)$为截面.在图 2-19(a)中画出了根据高维截面的高维分岔图 $\theta_2 - \alpha$.我们可以清楚地观察到在 $\alpha = 1.382$ 及 1.401 8 的倍分岔.在 $\alpha \approx 1.404\ 5$,环面破裂,系统由局部混沌扩展为大范围混沌(危机).对应于分岔图,我们给出相应的李指数谱的变化[图 2-19(b)].对 $T^2$,$\lambda_{1,2} = 0$,$\lambda_{3,4,5} < 0$,我们可以很清楚看到在每一个环面倍分岔点,$\lambda_3$ 由负碰零,再变负,表明一次分岔的发生.在图中我们只粗略给出两次分岔,实际上通过放大参数区还可以看到更多的 $\lambda_3$ 碰零.

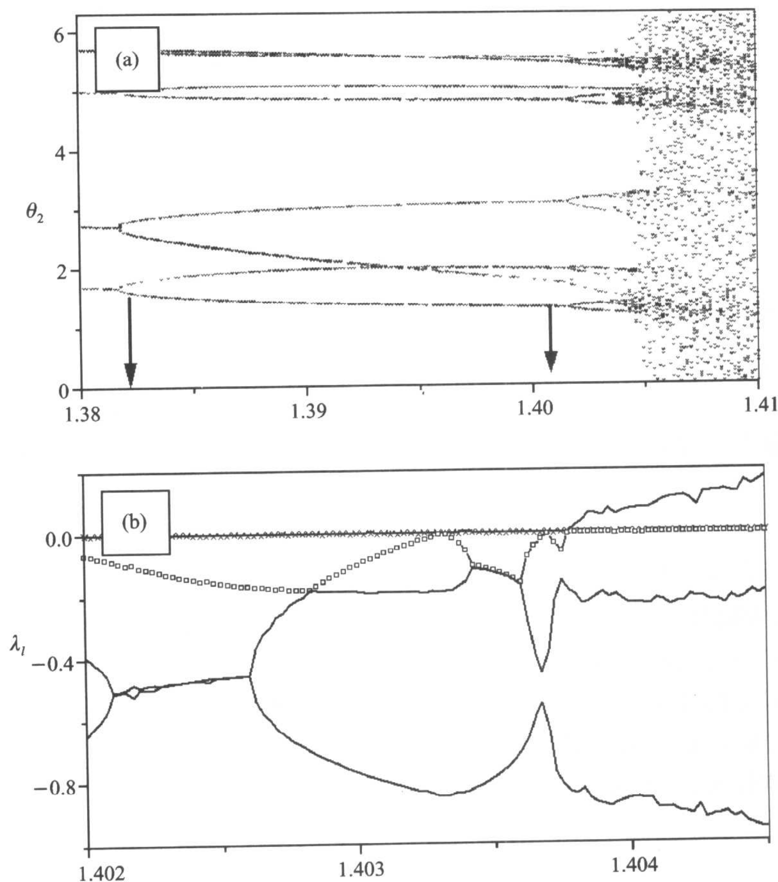



图 2-19 利用高维庞加莱截面看到的环面倍周期分岔到混沌的变化

对于 $T^n(n>2)$如何破裂变为混沌的机制的讨论则要复杂得多.我们一方面可以通过观察李指数谱来分析,另一方面可以通过前面提到的高维 Poinceré 技术.由于这两种方法都比较耗费机时,因此讨论要更困难.初步的分析表明,高

维环面拓扑更不稳定,除了可通过阵发变为混沌外,还可能通过倍分岔进入混沌.但拓扑不稳定性决定了可观察到的倍分岔次数比 $T^2$ 更少.我们在计算 $T^3$ 时只看到一次倍分岔就使得环面破裂成为混沌(可以看到残存的 $T^3$ 环面).总的来说这还是一个尚未解决的问题.

### 2.3.5 耦合极限环同步的振幅效应

到目前为止,我们的讨论仅限于对振子相位之间的关系进行了探讨.这在很多情况下是有意义的,因为旋转(振荡)中最重要的自由度就是相位,只研究相位模型的优点在于可以抓住振子同步的本质.另一方面,有一些现象如振荡死亡(oscillation death)等仅仅用相位模型是无法得到解释的,此时必须考虑振动的振幅对同步动力学的影响[150~157].

我们可以考虑如下的耦合振子模型:

$$\dot{z}_i = z_i(1 - z_i z_i^* + i\omega_i) + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}(z_j - z_i), \tag{2.3.26}$$

其中 $z_j = x_j + iy_j = r_j e^{i\theta_j}$ 是复变量,"$*$"表示其复共轭.上面的耦合是线性的平均场耦合,$\omega_i$ 表示第 $i$ 个振子的自然频率.

在无相互作用时,单个振子方程为

$$\dot{z}_i = z_i(1 - z_i z_i^* + i\omega_i), \tag{2.3.27}$$

用模-幅角变量可以很容易得到:

$$\begin{cases} \dot{r}_i = r(1 - r^2), \\ \dot{\theta}_i = \omega_i. \end{cases} \tag{2.3.28}$$

这正是我们第一章中的极限环运动方程.表示振子以 $\omega_i$ 频率、单位半径 $r_i = 1$ 旋转.自然频率 $\omega_i$ 可以如前那样以分布(对称、单峰)$g(\omega)$随机给定.没有耦合时每个振子按其自然频率在单位圆上转动,加入平均场耦合项时,系统的动力学会发生很大的改变.Matthews 等人讨论了此模型的合作同步行为[155],在数值模拟中他们采用 800 个振子,振子自然频率以分布 $g(\omega) = 1/2\gamma, \omega \in [-\gamma, \gamma]$给定.为讨论集体行为,可如前面那样引入复序参量:

$$Re^{i\phi} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} z_j, \tag{2.3.29}$$

这里 $R$ 代表的是同步程度.在图 2-20 中给出的是 $R(t)$在 $K = 0.8$ 增加 $\gamma$ 时的行为,图(a)-(d)分别对应 $\gamma = 0.6, 0.8, 1.0, 1.2$.当 $\gamma$ 较小时.$R$ 长时间后不依赖于时间,且不为零,说明系统自发地达到了同步.当 $\gamma$ 增加时,$R(t)$表现为大幅度振荡,且会表现出无规则的振荡行为,说明系统存在混沌运动.当 $\gamma$ 很大时,$R(t)$在零附近作小幅振荡 $R(t) \sim O(\sqrt{N})$,说明系统处于非相干态.$R(t)$的行为说明这个系统表现出复杂的动力学行为.

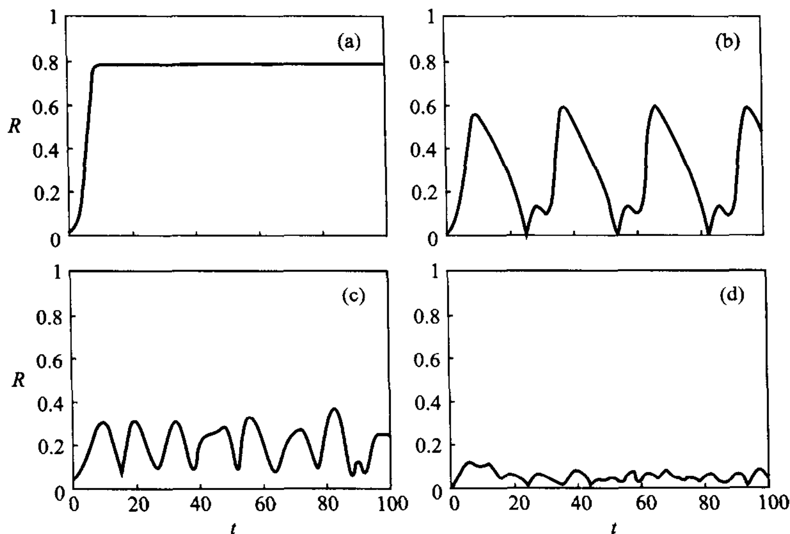



图 2-20 $R(t)$在 $K=0.8$ 时的时间演化行为

在图 2-21 中给出了在平面 $K-\gamma$ 上的相图. 通过这张图我们可以较为清楚地了解系统复杂的动力学. 从图 2-21(a)中可以看到. 整个参数平面被分为四个部分,每一部分的动力学行为都不相同. 图的左上角一大片区域是锁相区(同步区),这部分区域中系统振子达到全局同步,系统有稳定不动点,$R>0$. 由于系统是旋转对称的,因此 $\phi$ 是任意的. 图的右下角一大片区域称为非相干区(非同步区),在这片区域中,每个振子都按各自的自然频率旋转,半径均为 $\sqrt{1-K}$,$R(t)=0$,这两片区域都是我们前面研究过的. 对于位相振子而言,同步区与非同步区之间的边界非常简单,但考虑振子振幅后,这二者之间的边界区域就变得非常复杂. 在相图的右上角称作死亡区,在这个区域中所有振子都无振荡,不动点 $z_j=0$ 是稳定的,$R=0$. 极限环振子由于耦合而产生的集体死亡行为是典型的振幅效应.

耦合引发振动死亡的行为可以从 $N=2$ 个振子的行为来理解. 考虑下面 $N=2$ 个相互作用的线性化振子:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_1(1+\mathrm{i}\omega_1)+K(z_2-z_1), \\ \dot{z}_2 &= z_2(1+\mathrm{i}\omega_2)+K(z_1-z_2), \end{aligned} \tag{2.3.30}$$

为简便,设 $\omega=\dfrac{(\omega_1+\omega_2)}{2}=0$. 这样 $\omega_1=-\omega_2=\Delta$. 对上面方程进行线性稳定性分析可得本征值

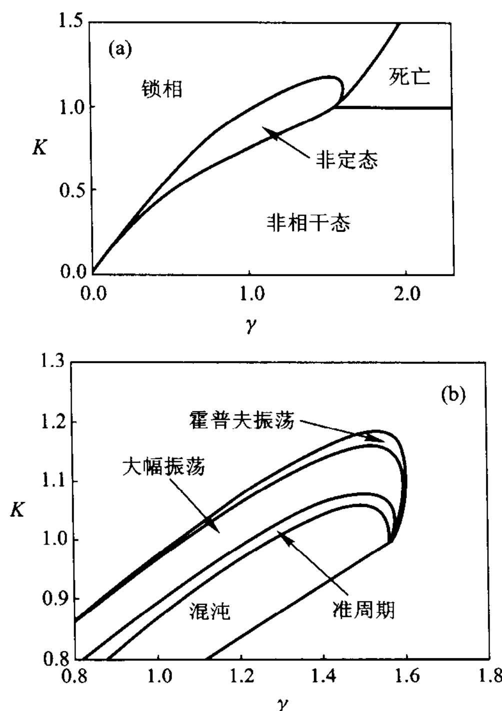



图 2－21　在 $K-\gamma$ 平面上的同步动力学相图

$$\lambda_{1,2} = \mu - K \pm \sqrt{K^2 - \Delta^2}. \tag{2.3.31}$$

上面方程有解 $z_1 = z_2 = 0$，当且仅当 $\lambda_{1,2} < 0$ 时稳定. 这样我们得到振子死亡的稳定区域为

$$\mu < K < \frac{\mu^2 + \Delta^2}{2\mu}. \tag{2.3.32}$$

若固定 $\mu$，可以看到当 $\Delta > \mu$ 且 $K > \mu$ 时，两振子的振动就会由于相互作用而停止. 从物理上看，上面的耦合给每一振子带来了额外的耗散效应，如果二振子自然频率相差较大，每个振子就不会从另外振子得到足够能量以抵消耗散，从而导致振动停止. 这种机制同样适用于前面的非线性振子及多振子的情况，因此它是由于相互作用而带来的一种集体效应.

在锁相区与非相干区之间还有一小片区域，其行为如图 2－20(b)、(c)中 $R(t)$的行为所示，表现为大幅振荡，既有规则的也有非规则的，我们称之为非定态区. 如果进一步研究这个区域的结构的话，会发现它包含丰富的结构，如图 2－21(b)所示. 首先，当 $K > 1$ 时，锁相态会通过 Hopf 分岔失稳，导致一个在锁相态附近的小幅准正弦振荡，我们称之为 Hopf 振荡区. 当 $K < 1$ 时，锁相态也可以

通过鞍结分岔失稳成为一个大幅振荡，$R(t)$可以在 0 与一个很大的值之间振荡，我们称此区为大幅振荡区. 这个区的振荡是周期的. 大幅振荡会继续通过 Hopf 分岔失稳，从而会增加非公度的频率(可能会有多个)，从而出现准周期及高维准周期振荡. 此区称为准周期区. 系统一般可以在此通过 Ruelle-Takens 道路而进入混沌区，如图(2－21)所示. 系统也可以通过亚临界分岔方式由非相干区过渡到混沌区，二者之间有一个非常窄的区域表现为滞后行为，系统动力学依赖于初始条件或处于混沌状态或处于非相干状态. 这种多稳区在非稳态与别的区域交界处也可以发现.

定态解如振动死亡、锁相及非相干区的边界可通过解析近似方法求出. 令 $z_j = r_j e^{i\theta_j}$，系统方程可化为

$$\begin{cases}\dot{\theta} = \omega - \dfrac{KR}{r}\sin\theta, \\ \dot{r} = r(1-K-r^2) + KR\cos\theta.\end{cases} \tag{2.3.33}$$

这里消去了下标"$j$". 对于振动死亡与锁相解，系统的状态都是不动点，上式有 $\omega = \dfrac{KR}{r}\sin\theta$, $r(r^2+K-1) = KR\cos\theta$，这样可得到

$$(KR\sin\theta)^2 = \omega^2(1-K+\omega\cot\theta). \tag{2.3.34}$$

不动点必须同时满足下面的自洽方程：

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} r\cos\theta g(\omega)\mathrm{d}\omega. \tag{2.3.35}$$

振动死亡的边界可由 $z=r=0$ 决定，其他边界则要困难一些，具体的计算要通过解上面方程并对方程解进行线性稳定性分析得到. 主要结果如下：振动死亡与非相干区之间的边界为 $K=1\left(\gamma\geqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$，它与锁相区之间的边界为 $\tan\left(\dfrac{\gamma}{K}\right) = \dfrac{\gamma}{K-1}$，锁相区与非定态之间边界为 $\gamma = \dfrac{\pi K}{4}\left[1+\dfrac{K}{6}+\left(\dfrac{7}{36}-\dfrac{\pi^2}{64}\right)K^2\right]+o(K^4)$，它是相位模型边界结果 $\gamma=\dfrac{\pi K}{4}$ 的推广. 非相干态与非定态之间的边界为 $\dfrac{1}{K} = \dfrac{\pi g(0)}{2} + (1-K)\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{g(\omega)\mathrm{d}\omega}{\omega^2+4(1-K)^2}$，它是相位模型结果 $K=\dfrac{2}{\pi g(0)}$ 的推广. 这些解析结果都与数值模拟符合得很好. 总之，在考虑振子的振幅效应后，耦合系统的同步动力学会更复杂，也值得进一步探索. 上面的模型可推广到其他形式的振子，非线性耦合、近邻耦合，其他自然频率分布情况，这些问题大部分都不太清楚.

## 2.4 耦合混沌系统的完全同步

我们在前面花大笔墨讨论了耦合周期振子的同步行为.一个主要原因是虽然这方面的研究时间很长,但却没有一本中文专著进行详细系统的讨论.而另一个原因,如我们下面看到的,混沌同步在很多方面与周期振子同步根本不同,但有一些方面则有相似性.通过前面的讨论,耦合周期振子系统可以表现出高度合作的有序行为,也可以表现出复杂的动力学.在前面我们看到了同步过程中的混沌行为,可以认为这是混沌同步的一种表现形式.但下面的讨论并不着眼于这种形式的混沌同步.我们所关心的耦合系统的个体是混沌系统.我们将探讨当这些本身会表现出复杂的无规则运动的振子有相互作用后会表现出什么样的行为.我们将会看到,混沌系统同步的内容要比周期振子丰富得多.

早期对混沌同步的研究与控制问题有关.这里我们把混沌同步问题纳入到同步问题本身的大框架中,这在理论上更有意义,因为本身混沌同步问题就是传统的同步研究的发展.混沌同步研究可以借鉴周期运动同步的一些理论和思想方法,但由于其自身的特殊性,因此必须发展新的理论,对其进行重新认识,包括两条混沌轨道同步的可能性、条件及类型等.自本节以后的几节我们将阐述混沌系统的完全同步(精确同步)、广义同步、相同步、滞后(延迟)同步及测度同步等,揭示在耦合混沌系统中的不同程度同步的分岔.

### 2.4.1 两个相互作用混沌系统的同步

一、替代信号驱动混沌同步

下面我们考虑两个完全相同的混沌系统的同步问题[173~185].由于混沌运动众所周知的蝴蝶效应(混沌运动的初值敏感性,即任何两条相邻轨道指数分离),即使两个完全相同系统从完全相同的初始条件出发,其同步轨道也是十分脆弱的,一个极小的扰动即可破坏这种同步性,从而使人们很长时间以来回避对混沌同步的研究.1990年,Pecora与Carroll研究了有相互作用的两个混沌系统,其方案是用一个系统的输出驱动另一系统,即用一个驱动系统

$$\begin{cases}\dot{x}=f_1(x,y),\\ \dot{y}=f_2(x,y)\end{cases}\tag{2.4.1}$$

的混沌信号 $y(t)$ 去驱动一个形式与参数完全相同的响应系统

$$\begin{cases}\dot{X}=f_1(X,Y),\\ \dot{Y}=f_2(X,Y),\end{cases}\tag{2.4.2}$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $X=(X_1,\cdots,X_n)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)$, $Y=(Y_1,\cdots,Y_n)$.显

然对于响应系统而言，$X(t)=x(t)$，$Y(t)=y(t)$为一个解；称为同步混沌解．一个关键问题是这个解能否稳定．我们可以在同步混沌解$(x(t),y(t))$附近对响应系统方程线性化．令 $\delta X=X(t)-x(t)$，$\delta Y=Y(t)-y(t)$代入响应系统方程并取线性项，可得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\delta X\\ \delta Y\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}\delta X\\ \delta Y\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\left.\dfrac{\partial f_1(X,y)}{\partial X}\right|_{X(t)=x(t)}\delta X\\ \left.\dfrac{\partial f_2(X,Y)}{\partial X}\right|_{\substack{X(t)=x(t)\\ Y(t)=y(t)}}\delta X+\left.\dfrac{\partial f_2(X,Y)}{\partial Y}\right|_{\substack{X(t)=x(t)\\ Y(t)=y(t)}}\delta Y\end{bmatrix}. \tag{2.4.3}$$

显然，解$(x(t),y(t))$稳定的条件为上面雅可比矩阵 $M$ 的本征值为负，我们称这些本征值为条件李雅普诺夫指数．因此上面的驱动－响应替代信号系统同步的充要条件为其条件李指数全部为负，系统达到的同步由于轨道完全相同，因而称为完全同步（或精确同步），下面我们以 Lorenz 系统为例，即用驱动系统为

$$\begin{cases}\dot{x}=\sigma(y-x),\\ \dot{y}=-xz+\rho x-y,\\ \dot{z}=xy-bz\end{cases} \tag{2.4.4a}$$

的信号 $x(t)$来驱动响应系统：

$$\begin{cases}\dot{X}=\sigma(Y-X),\\ \dot{Y}=-xZ+\rho x-Y,\\ \dot{Z}=xY-bZ.\end{cases} \tag{2.4.4b}$$

模拟中我们取参数 $\sigma=10$，$b=8/3$，$\rho=40$．为测量同步程度，我们定义距离

$$D(t)=[(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2]^{1/2}. \tag{2.4.5}$$

在图 2－22 中我们计算了 $D(t)$的演化．可以看到 $D(t)$随时间很快趋于零，说明系统到达同步．

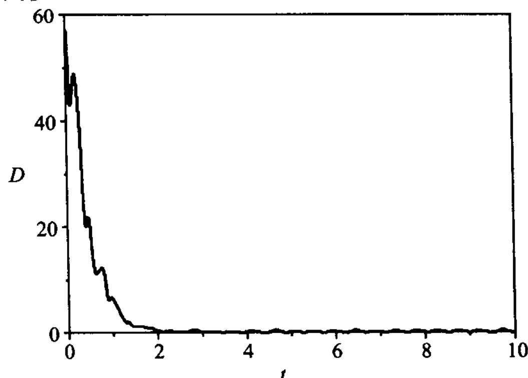



图 2－22 $D(t)$随时间的演化

二、反馈驱动混沌同步

考虑一个混沌系统

$$\dot{x}=f(x),\quad x=(x_1,\cdots,x_n),\tag{2.4.6a}$$

用其产生的混沌信号 $x(t)$ 反馈到另一完全相同的响应系统上：

$$\dot{y}=f(y)-G(y-x),\quad y=(y_1,\cdots,y_n),\tag{2.4.6b}$$

其中 $G$ 为 $n\times n$ 反馈矩阵. 当适当调节 $G$ 矩阵的参数时，此驱动－响应系统也可以达到完全同步状态 $y(t)=x(t)$. 对这样的驱动响应系统，我们仍可计算响应系统沿同步混沌轨道的条件李指数. 当调节参数使得所有条件李指数变为负时，系统即可达到完全同步.

仍以 Lorenz 振子为例，驱动振子与前面相同，设对响应系统的 $Y$ 分量施加反馈：

$$\begin{cases}\dot{X}=\varepsilon(Y-X),\\ \dot{Y}=-XZ-\rho X-Y-\varepsilon(Y-y),\\ \dot{Z}=XY-bZ,\end{cases}\tag{2.4.7}$$

其中 $\varepsilon$ 为可调参数.

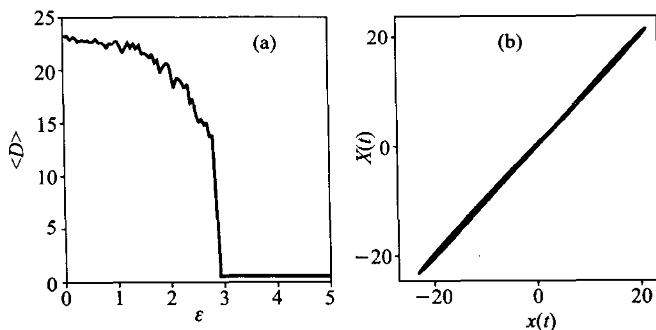



图 2－23 $D(t)$的演化

图 2－23(a)给出了 $D(t)$ 的长时间平均 $\langle D\rangle$ 随参数 $\varepsilon$ 的变化(暂态过程去掉)可以看到 $\langle D\rangle$ 随 $\varepsilon$ 增加逐渐减小，当 $\varepsilon\approx2.95$ 时，$\langle D\rangle\to0$，说明驱动响应系统通过反馈达到同步. 图(b)画出的是在 $\varepsilon=4$ 时的 $X(t)\sim x(t)$ 图，可以看到所有点均处于对角线 $X=x$ 上，也反映出响应系统与驱动信号同步.

反馈信号混沌能否达到不仅取决于反馈的强度，也取决于 $G$ 矩阵的选取. 适当地选取 $G$ 可以使系统同步，否则难以达到.

上面讨论的两种完全同步方式实际上与混沌控制有密切关系. 对比混沌控制方法，我们可以看到同步化实际是一种广义的混沌控制，即将系统控制到同步轨道上. 我们可以把混沌控制的有关方法移植到混沌的同步化问题中来. 但由于

我们的讨论不以控制为目的，而在于了解耦合混沌系统内部的同步分岔，因此后面讨论不再涉及如何使系统达到同步化.

三、相互耦合混沌系统的完全同步

下面考虑两个相同振子之间相互耦合的情况. 设系统的动力学为

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x)+\varepsilon G(y-x),\\ \dot{y}=f(y)+\varepsilon G(x-y),\end{cases} \tag{2.4.8}$$

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$.

当耦合强度 $\varepsilon=0$ 时，两个振子沿各自的轨道演化，尽管它们具有相同的吸引子，但初始条件不同，因此其运动不相同. 小的耦合强度不能使其运动相同. 当耦合强度到达一定程度时，如果 $G$ 矩阵选得好，两条不同轨道就会被“吸引”到一起来，从而达到完全同步.

显然上述耦合系统具有同步解 $x(t)=y(t)$，在此解附近将方程线性化，我们可以得到

$$\dot{\delta}=[Df(x(t))-\varepsilon G]\delta, \tag{2.4.9a}$$

$$\delta=x(t)-y(t)=(x_1-y_1,x_2-y_2,\cdots,x_n-y_n),\ (Df)_{ij}=\left.\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right|_{x(t)}. \tag{2.4.9b}$$

根据线性化方程我们同样可计算沿同步流形 $x(t)=y(t)$ 的李指数(横向李指数). 同样地，当且仅当最大横向李指数为负，完全同步解是稳定的.

我们以两个相同的耦合 Lorenz 振子为例，其动力系统方程为

$$\begin{aligned}&\dot{x}=\sigma(y-x),\\ &\dot{y}=-xz+\rho x-y+\varepsilon(y-Y),\\ &\dot{z}=xy-bz,\\ &\dot{X}=\sigma(Y-X),\\ &\dot{Y}=-XZ+\rho X-Y+\varepsilon(Y-y),\\ &\dot{Z}=XY-bZ.\end{aligned} \tag{2.4.10}$$

在图 2-24 中我们计算了最大横向李指数随 $\varepsilon$ 的变化情况. 可以看到当 $\varepsilon=2.5$ 时 $\lambda$ 由正变负，说明这是同步的转变点.

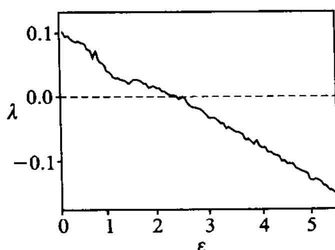



图 2-24 最大横向李指数随 $\varepsilon$ 的变化情况

一个没有讨论的问题在同步点附近的临界情况.由于系统运动的混沌性,在同步临界点附近会有以同步流形为"关"态的开关阵发行为,这里不再讨论.

### 2.4.2 多个耦合混沌振子系统的完全同步

下面我们讨论多个线性耦合混沌振子完全同步的可能性及其失稳分岔.原则上说多个振子同步的问题比较复杂,但对于最近邻耦合的情况现在已经有了一套处理办法.

一、混沌同步态的稳定性分析

我们考虑下面的 $N$ 个相同的扩散耦合的非线性振子[159~161]:

$$\dot{u}_j = f(u_j) + \varepsilon\Gamma(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}), \quad j = 0,1,\cdots,N-1,\ u_{j+N}(t) = u_j(t). \tag{2.4.11}$$

这里 $\dot{u}_j = f(u_j)$描述的单个振子的动力学,$u_j \in \mathbf{R}^n$,$f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 为非线性函数矢量.$\varepsilon$ 为耦合强度,$\Gamma$ 为一 $n$ 维的对角矩阵,对角元为 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$,并且所有的矩阵元都处于 0 到 1 之间,$\gamma_i \in [0,1]$.

很显然同步流形解

$$u_0 = u_1 = \cdots = u_{N-1} = S(t) \tag{2.4.12}$$

为系统的一个解.我们将考察同步解流形 $M = \{u_0 = u_1 = \cdots = u_{N-1} = S(t)\}$ 的稳定性及其失稳后的分岔.容易看出同步流形具有与单个振子完全相同的维数.为分析稳定性,令 $u_j(t) = S(t) + \xi_j(t)$,代入上述方程并对其线性化可以得到

$$\dot{\xi}_j = Df(s)\xi_j + \varepsilon\Gamma(\xi_{j+1} - 2\xi_j + \xi_{j-1}), \tag{2.4.13}$$

这里 $Df(s)$是 $f$ 函数矢量沿同步流形 $S(t)$的雅可比.上述的线性化矩阵是循环三对角矩阵(由于周期边条,在左下与右上角分别有非零矩阵元).我们可以把 $\xi'_j$ 按空间 Fourier 模展开而对角化.即把

$$\xi_j(t) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}\eta_k(t)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} jk/N} \tag{2.4.14}$$

代入线性化方程,则可以得到

$$\dot{\eta}_k = \left[Df(s) - 4\varepsilon\sin^2\left(\frac{k\pi}{N}\right)\Gamma\right]\eta_k, \quad k = 0,1,\cdots,N-1. \tag{2.4.15}$$

这种对角化实际上是使得各种模解耦,从而得到上面模的独立方程.由于 $\mathrm{Re}(\eta_k)$与 $\mathrm{Im}(\eta_k)$满足同样的方程,因此在考察同步态的稳定性只需考察 $k = 0, 1,\cdots,\frac{N}{2}$模式方程即可.这些模式中,最大波数的模(对应最短波长)对应于 $k_{\max} = N/2$,$k = 0$ 的模决定着在同步流形上的运动$\left(\sin\frac{k\pi}{N} = 0\right)$,此模有 $n$ 个李指

数，$\lambda_1^0 \geqslant \lambda_2^0 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n^0$，对应于原振子的李指数.当 $\lambda_1^0 > 0$ 时，同步态则为混沌的，$k \neq 0$ 的所有模式代表同步流形的横向变化.对第 $k$ 个模式，我们可以类似定义横向李指数(TLE)，$\lambda_1^k \geqslant \lambda_2^k \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n^k$.显然同步态稳定的一个必要条件是所有的 $k \neq 0$ 模的最大 TLE 小于 0，即 $\lambda_1^k < 0$.当 $\Gamma$ 为单位矩阵时，很容易看出所有 $k > 0$ 的模式的 TLE 都与 $k = 0$ 模的李指数有如下的关系

$$\lambda_j^k = \lambda_j^0 - 4\varepsilon \sin^2\left(\frac{k\pi}{N}\right). \tag{2.4.16}$$

这个关系由于右边第二项 $\leqslant 0$，因此 $\lambda_j^k \leqslant \lambda_j^0$.这样对足够强的耦合强度 $\varepsilon$，所有 $k > 0$ 的 $\lambda_1^k$ 都可能小于零，这样系统的同步态总是可能稳定的.这个结论对 $\Gamma$ 为单位矩阵是适用的.

如果 $\Gamma$ 不是单位矩阵，则上面的关系不成立，同步混沌态就不一定稳定.尽管我们找不到上面的简单关系，但从(2.4.16)可看出，各种模及不同 $N$ 的 TLE 之间存在一定关系.特别地，对给定的 $\Gamma$，所有有 TLE 可以由 $N = 2$ 个振子的 $k = 1$ 模的 TLE 得出：

$$\lambda_j^k(\varepsilon, N) = \lambda_j^1\left(\varepsilon \sin^2\left(\frac{k\pi}{N}\right), 2\right), \tag{2.4.17}$$

即 $N$ 个振子系统在 $\varepsilon$ 耦合强度下 $k$ 模的第 $j$ 个李指数等于 2 个振子在耦合强度 $\varepsilon \sin^2\left(\frac{k\pi}{N}\right)$ 下 $k = 1$ 模的第 $j$ 个李指数.这个关系使得计算大为简化.特别指出的是，我们考察同步态的稳定性时只需考察最大的 TLE，这样只需计算 $\lambda_1^1(\varepsilon, 2)$ 即可.下面我们考察下面的系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -(\alpha x + \beta y + z), \\ \dot{y} = x + \delta y, \\ \dot{z} = g(x) - z, \end{cases} \tag{2.4.18}$$

其中 $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \leqslant 3, \\ \mu x, & \text{当 } x > 3, \end{cases}$ 对 $(\alpha, \beta, \delta, \mu) = (0.05, 0.5, 0.133, 15)$，上面系统的运动是混沌的.在图 2－25(a)中给出了当 $N = 2$ 及 $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ($x$ 耦合)，$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ($y$ 耦合)，$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($z$ 耦合)及 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (矢量耦合，Vector)时的 $\lambda_1^1(\varepsilon, 2)$ 随 $\varepsilon$ 的变化，可以看到 $x$，$y$ 及矢量耦合都会有 $\lambda_1^1(\varepsilon, 2) < 0$，而 $z$ 耦合总有 $\lambda_1^1(\varepsilon, 2) > 0$，说明前者的同步态可以稳定，而后者同步态永远不稳定.

二、短波长分岔与尺寸不稳定性

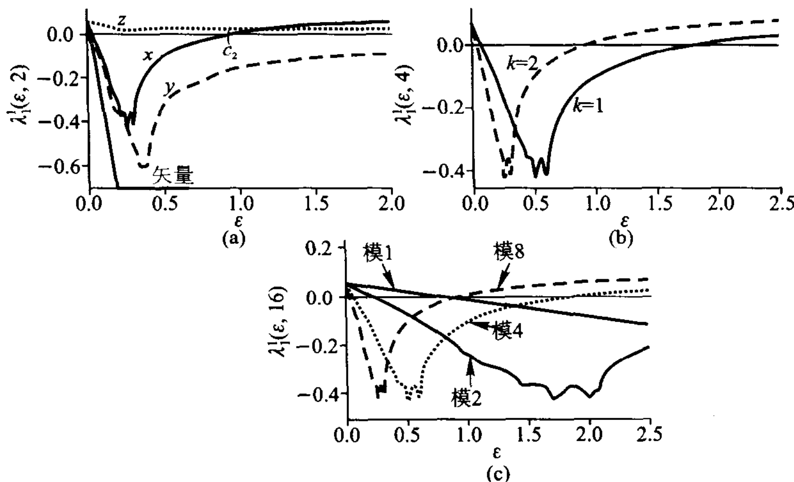



图 2-25　(a) $\lambda_1^1(\varepsilon,2)$随 ε 的变化；(b)中 $N=4$ 的同步态失稳；
(c) $N=16$ 时几个模的最大 TLE 随 ε 的变化

下面考察 $x$ 耦合的情况. 从图 2-25(a)可以看到同步态在 $\varepsilon=\varepsilon_2=0.945$ 时又会失稳. 在图 2-25(b)中我们画出 $N=4$ 的情况. 很显然根据上面的关系我们总有 $\lambda_1^{N/2}(\varepsilon,N)=\lambda_1^1(\varepsilon,2)$，因此，$\lambda_1^2(\varepsilon,4)=\lambda_1^1(\varepsilon,2)$，我们看到对 $k=1$ 和 2 的两个模式，当在同步态稳定后继续增加 ε，首先是 $k=2$ 的模先失稳，导致同步态失稳的第一个分岔. 由于 $k=2$ 对应于短波长，故这种分岔称为短波长分岔(SWB). 这种行为在数值计算与实验中均观察到.

当振子随尺寸 $N$ 增大时，TLE 曲线的行为也有改变. 当 N 足够大时，我们在改变 ε 时总会发现有的模式的最大 TLE 大于零，在这种情况下总有不稳定的横向模，同步混沌态就不会稳定存在. 我们称这种同步混沌态的不稳定为尺寸不稳定性. 在图 2-25(c)中给出 $N=16$ 时几个模的最大 TLE 随耦合强度的变化关系. 可以看到 $k=1$ 的模的最大 TLE 改变最慢，而模式 8 的最大 TLE 在变为负后又变正，其失稳点与模 1 的稳定点几乎重合，这样我们在 ε 的整个区域中都不再看到稳定的同步混沌态.

利用 TLE 的标度关系(2.4.17)我们可以算出同步态稳定存在的临界尺寸 $N_{\max}$，即解 $\lambda_1^1(\varepsilon,N)=\lambda_1^{N/2}(\varepsilon,N)=0$. 由于 $\lambda_1^{N/2}(\varepsilon,N)=\lambda_1^1(\varepsilon,2)$，$N/2$ 模的 TLE 在 $\varepsilon=\varepsilon_1$ 由负穿零，即 $\lambda_1^1(\varepsilon_1,2)=0$，在 $\lambda_1^1(\varepsilon,N)$由正穿零，即 $\lambda_1^1(\varepsilon_2,N)=0$，利用标度关系可知 $\lambda_1^1(\varepsilon_2,N)=\lambda_1^1(\varepsilon_2\sin^2(\pi/N),2)=0$，因而 $\varepsilon_1=\varepsilon_2\sin^2(\pi/N)$，这样

$$N_{\max}=\operatorname{int}\left[\frac{\pi}{\arcsin(\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2})}\right]. \tag{2.4.19}$$

这一结果与数值观察相符得很好.

上面我们讨论了同步混沌流形的稳定性分析与失稳后的分岔问题.上面提到的短波长分岔与由于尺寸不稳定性而引起的同步流形失稳都揭示了在时空混沌内部镶嵌的定性变化,而这种变化仅从表现上不易观察,必须作进一步的分析.

三、单向耦合混沌振子环的快波分岔

Matias 等人于 1997 年用耦合电路实验及数值模拟了单向耦合的振子构成的环上出现的集体周期态,这个集体周期态对时间尺度上比单个振子要快 2～3 个数量级[162～164].他们模拟的是耦合的 Chau 氏电路,动力学方程可写为:

$$\begin{cases}\dot{x}_j=\alpha[y_j-\bar{x}_j-f(\bar{x}_j)],\\ \dot{y}_j=\bar{x}_j-y_j+z_j, \qquad\qquad x_j=x_{j-1},x_1=x_N.\\ \dot{z}_j=-\beta y_j-\gamma z_j,\end{cases} \tag{2.4.20}$$

这里,$\alpha=C_2/C_1$,$\beta=C_2/LG^2$,$\gamma=C_2r_0/LG$,其中 $C$ 表示电容,$L$ 表示电感,$r_0$ 表示电阻.$f(x)$为一分段线性函数:

$$f(x)=\left[bx+\frac{1}{2}(a-b)(|x+1|-|x-1|)\right]. \tag{2.4.21}$$

图 2－26 中画出了其中一个 Chau 氏振子(在电路中由系列元件构成)中的电容 $C_1$ 两端的电位差随时间的演化,(a) 为无耦合的情形,(b) 为有耦合(四个蔡氏振子)时电位差的演化.注意两图中的时间尺度不同(前面用的是毫秒,后面用的是微秒).可以看到启动耦合时,原来的混沌振荡变为(b)的快速振荡(几乎是周期的).两振子信号之间相位相差 π/2.以上面动力学方程的数值模拟虽然没有看到实验上的周期振荡(与实验仪器与参数等复杂因素有关),但仍可以观察到快速的振荡行为.

另外用其他单向耦合振子模型(如 Lorenz 振子)也可以看到类似的观察.这个快速振荡相当于引入了一新的频率,因此属于同步态失稳后 Hopf 的分岔.我们将在下面对其进行机理上的分析.

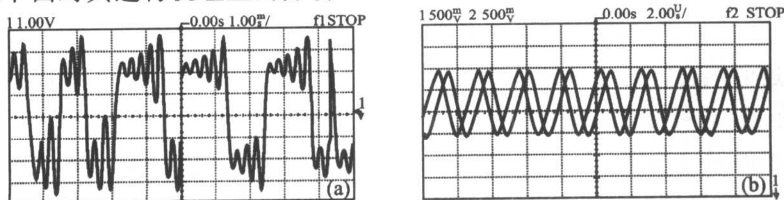



图 2－26 单向耦合 Chau 氏振子电位差的演化,(a) 无耦合的情形;(b) 有耦合的情形

四、混沌同步态稳定性的本征值分析

前面讨论了扩散耦合与单向耦合时同步混沌态的失稳分岔.虽然给出了一些结果,但没有系统的方法.另外前面观察到的尺寸不稳定性、短波长分岔与快波分岔在讨论上基本是独立进行的.因此需要有系统的手段对这些分岔有一个更深入的认识.1998年杨俊忠、胡岗等人提出一种本征值分析方法,不仅可以很容易分析上述分岔,还给出了更为丰富的分岔行为[165,166].

我们考虑如下的 $N$ 个相同的线性耦合的混沌振子体系:

$$\dot{u}_j = f(u_j) + \sum_{k=1}^{m} [(\varepsilon_k - \gamma_k)\boldsymbol{\Gamma}(u_{j+k} - u_j) + (\varepsilon_k + \gamma_k)\boldsymbol{\Gamma}(u_{j-k} - u_j)],$$
$$j = 1,2,\cdots,N. \tag{2.4.22}$$

单个振子的相空间 $u_j \in \mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{f}$ 为非线性函数矢量,$m$ 为耦合距离,$\varepsilon_k$,$\gamma_k$ 为扩散型与梯度型耦合,$\boldsymbol{\Gamma}$ 为 $n \times n$ 常数矩阵.讨论中采用周期边条,$u_{j+N} = u_j$,上述方程所包含非近邻耦合,也包含非对称的梯度耦合,因此完全包含前面讨论的情况,同时又有很多新的扩展,在指导工作控制大空间尺度混沌同步方面起到积极的作用.

我们仍然分析同步混沌态 $u_1(t) = u_2(t) = \cdots = u_N(t) = s(t)$ 的稳定性.同前面类似,令 $u_j(t) = s(t) + \eta_j(t)$,代入上面方程并线性化可得到

$$\dot{\eta} = [Df(s)\hat{\boldsymbol{I}} + \boldsymbol{B\Gamma}]\boldsymbol{\eta}, \tag{2.4.23}$$

这里

$$(\boldsymbol{B\Gamma\eta})_j = \sum_{k=1}^{m} \{(\varepsilon_k - \gamma_k)\boldsymbol{\Gamma}(\eta_{j+k} - \eta_j) + (\varepsilon_k + \gamma_k)\boldsymbol{\Gamma}(\eta_{j-k} - \eta_j)\} \tag{2.4.24}$$

其中 $Df(s)$ 是 $f$ 在同步流形 $s(t)$ 上的雅可比,$\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_N)^{\mathrm{T}}$,$\hat{\boldsymbol{I}}$ 代表 $N \times N$ 的单位矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $N \times N$ 的耦合矩阵,可以将其对角化:

$$\boldsymbol{B\phi}_\nu = \lambda_\nu \boldsymbol{\phi}_\nu, \quad \nu = 0,1,\cdots,N-1. \tag{2.4.25}$$

$\boldsymbol{\phi}_\nu$,$\lambda_\nu$ 为本征矢和本征值.将 $\boldsymbol{\eta}$ 用 $\{\boldsymbol{\phi}_\nu\}$ 展开:$\boldsymbol{\eta} = \sum_{\nu=0}^{N-1} v_\nu(t)\boldsymbol{\phi}_\nu$,可得到复系数 $v_\nu(t)$ 的方程:

$$\dot{v}_\nu(t) = [Df(s) + \lambda_\nu \boldsymbol{\Gamma}]v_\nu(t), \quad \nu = 0,1,\cdots,N-1. \tag{2.4.26}$$

这样上述的耦合就可以全部解耦成各个本征模的演化方程.同步混沌稳定的条件,所有 $v_\nu(t)$ 都稳定,即 $v_\nu \to 0$.

上述的讨论表明,我们可以将同步混沌的稳定性问题分解为两个独立的问题.一是分析(2.4.26)的稳定区域.这个问题不依赖于耦合矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和系统的尺寸 $N$,只依赖于单振子的参数(如 $s(t)$,$Df(t)$ 及事先给定的 $\boldsymbol{\Gamma}$ 矩阵).这里惟一

改变的就是复参数 $\lambda_\nu$，改变它我们就可以在复平面上找到 $v_\nu(t)$收敛的区域，这个区域的临界线只取决于 $\boldsymbol{\Gamma}$ 矩阵及单振子参量．另一个独立处理的问题是分析线性耦合矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的本征值$\lambda_\nu$ 在$\lambda$ 复平面上的分布，即解本征方程(2.4.25)．$\boldsymbol{B}$ 矩阵与耦合 $\varepsilon_k$，$\gamma_k$ 和系统尺寸 $N$ 有关，而与非线性振子的内部动力学无关．最后看 $\boldsymbol{B}$ 矩阵本征值的分布落在本征模稳定区内外的情况作一比较，即可确定同步流形的稳定性．这样我们把一个耦合的问题分解为内部与外部两个独立的子问题，而且每一个问题解决起来都相对原问题容易得多．

图 2－27 给出了 Lorenz 振子在不同 $\boldsymbol{\Gamma}$ 矩阵时临界线的情况，图中的 $S$ 表示稳定区，$U$ 表示不稳定区．对 $\boldsymbol{\Gamma}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 的情况，临界线是 M 形；对 $\boldsymbol{\Gamma}=$

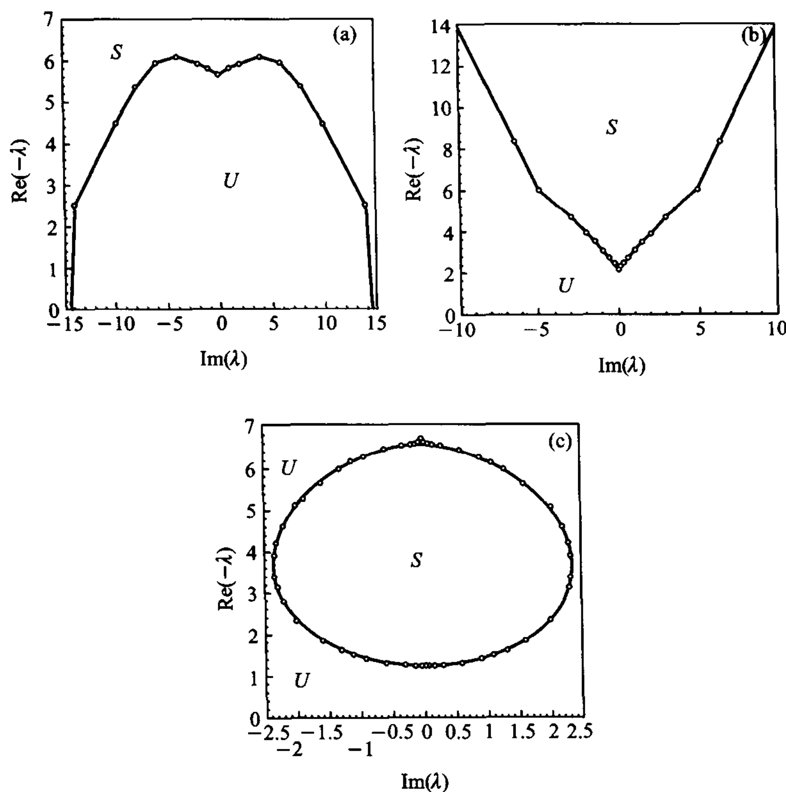



图 2－27 Lorenz 振子在不同 $\boldsymbol{\Gamma}$ 矩阵情况下的临界线

$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$临界线是V形;对 $\boldsymbol{\Gamma}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$临界线则是椭圆形.在图2-28中我们画出了Rössler系统

$$\begin{cases}\dot{x}=-(0.5x+0.05y+z),\\ \dot{y}=x+\alpha y,\\ \dot{z}=\begin{cases}15(x-3)-z,(x<3.0),\\ -z,(x>3.0).\end{cases}\end{cases}\tag{2.4.27}$$

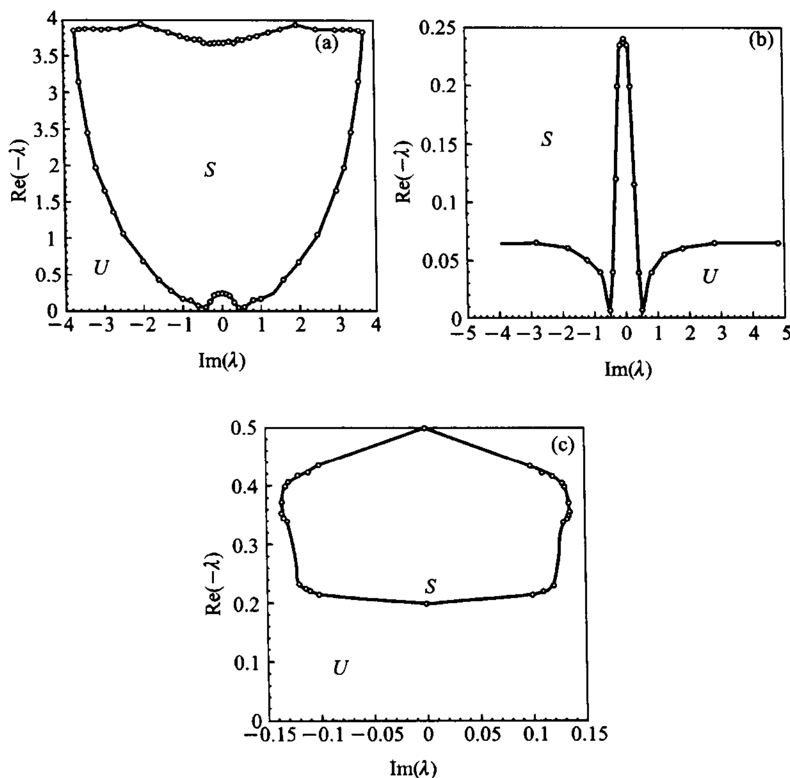



图2-28 Rössler系统在不同 $\boldsymbol{\Gamma}$ 矩阵情况下的临界线

相应与上面三种 $\boldsymbol{\Gamma}$ 情况的临界线.可以看到随着 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的不同,系统的临界线有很大的差别.

另一件事情就是研究耦合矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的本征值分布.这里的 $\boldsymbol{B}$ 矩阵是一个一阶循环矩阵,其本征值可以容易解出:

$$\lambda_k=-2\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_j+\sum_{j=1}^{m}\left[(\varepsilon_j+r_j)e^{i2\pi jk/N}+(\varepsilon_j-r_j)e^{-i2\pi jk/N}\right].\tag{2.4.28}$$

很显然 $\lambda_k=\lambda^*_{N-k}$. 当 $r_j=0$ 时,$\lambda_k$ 均为实的. 梯度耦合使得本征值成为复的. 本征值分布与 $\varepsilon, r$ 及系统尺寸 $N$ 均有关. 改变耦合系数和 $N$ 可以使本征值的分布发生改变,就有可能改变系统同步态的稳定性. 一个有意思的问题是前面讨论的均匀最近邻耦合($\varepsilon_j=\varepsilon, r_j=r, m=1$),本征值的分布都在下面的椭圆上:

$$\left[\frac{\mathrm{Re}(\lambda)+2\varepsilon}{2\varepsilon}\right]^2+\left[\frac{\mathrm{Im}(\lambda)}{2r}\right]^2=1. \qquad (2.4.29)$$

此椭圆与系统尺寸 $N$ 无关,$N$ 的增加只会使本征值在椭圆上的分布越来越密集.

用上述方法可以对前面的几类同步失稳分岔有更清晰的认识. 同步态稳定的条件是除 $\lambda_k=0$(沿同步流型的本征值)外的所有 $\lambda_k$ 均分布于稳定区. 当改变耦合或 $N$,系统的 $\lambda_k$ 分布发生相应的改变. 当有一个 $\lambda_k$ 穿过临界线进入不稳定区时,同步态就会失稳. 在复平面 $\mathrm{Re}\,\lambda-\mathrm{Im}\,\lambda$ 上 $\lambda_k$ 穿过临界线的方式多种多样,这就决定了同步态失稳可以有不同的类型.

1. 尺寸不稳定性:前面我们看到当增加系统尺寸 $N$ 时,同步混沌态会失稳. 在图 2-29 中,我们计算了耦合 Lorenz 系统在 $m=1, \varepsilon=4, r=2$ 时不同尺寸 $N=4,5$ 的本征值分布. 当 $N=4$ 时,除 $\lambda=0$ 在不稳定区外,其他所有 $\lambda$ 均在稳定区,说明此时同步态是稳定的;$N=5$ 时,有两个非零本征值移动到不稳定区. 同步态失稳. 这种尺寸不稳定性很容易理解. 因为增加 $N$ 使体系本征值分布越来越密集,因此总存在临界的 $N_{\max}$ 使一个非零的本征值处于不稳区而导致失稳. 从图中看,首先是 $\mathrm{Re}\,\lambda$ 较小的模失稳,因此这是一种**长波长失稳**.

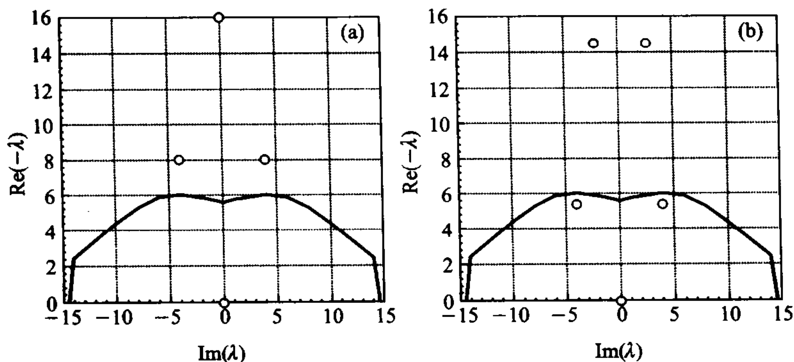



图 2-29 尺寸不稳定性:耦合 Lorenz 系统不同尺寸 $N=4,5$ 的本征值分布

2. 短波长分岔:我们讨论 $r=0$ 的情况,此时所有的本征值分布于实轴上. 在图 2-30 中我们给出了 $N=4$ 个 Lorenz 振子在 $m=1$ 时改变 $\varepsilon$ 本征值分布.

可以看到 $\varepsilon=1.5$ 时同步态稳定，而当 $\varepsilon=1.7$ 时，同步态失稳(有一个非零本征态移动出稳定区)．这种现象是由于当增加 $\varepsilon$ 时，本征值分布向上移动，第一个冲出稳定区的是 $N/2$ 的本征值 $\lambda_{N/2}$．由于 $k=N/2$ 的模是同步态切空间最短($\lambda$ 最大)的模，因此这就是**短波分岔**．

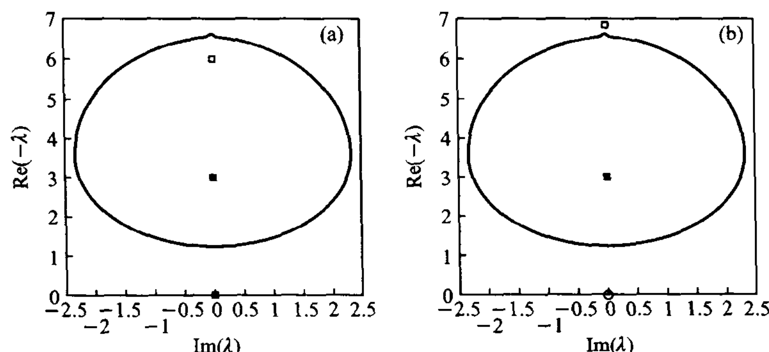



图 2－30　短波长分岔：4 个 Lorenz 振子在 $m=1$ 时改变 $\varepsilon$ 本征值的分布

3．**快波分岔**：这实际上是在改变梯度的耦合时系统的对称性破坏的结果．在图 2－31 中，我们计算 $N=4$ 个 Lorenz 振子在 $m=1,\varepsilon=5$ 时改变 $r$ 的本征值分布．$r=0$ 时，所有本征值在实轴上，且非零本征值均位于稳定区．$r\neq0$ 时，本征值有的变为复的，离开了实轴．增加 $r$ 使复本征值向下移动．$r=4$ 时，由图可见到有一对共轭复本征值穿过临界线，导致同步态失稳．此时出现的新的快波振荡频率即由穿过临界线的那一对本征值的虚部给出(实际上，它与同步态的时间尺度并没有太大的关系)．图中的失稳是一种长波长失稳．

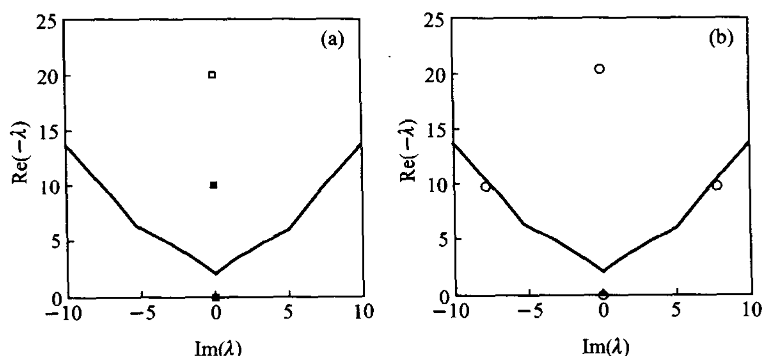



图 2－31　$N=4$ 个 Lorenz 振子在 $m=1,\varepsilon=5$ 时改变 $r$ 的本征值分布

这里的本征值分析不仅可以很好的解释以前观察过的现象,还可以给出同步态失稳时其不稳定流型的维数.同步态的正李指数数目 $M$ 可以通过统计 $\boldsymbol{B}$ 矩阵本征值落入不稳定区的个数得到.另外,用这种方法,可以对大尺寸(因为 $N$ 很大时同步态常常不稳定)系统的同步的控制进行更深入地分析,从而可以设计出更合理的方案,有关讨论见相关文献[167~169].

## 2.5 广义混沌同步

前面我们探讨了耦合相同混沌振子之间的同步行为,在足够强的耦合强度下振子之间可达到完全同步(精确同步).要达到完全同步,就要求振子的动力学特征完全相同,即它们是有相同的非线性函数形式,相同的相空间维数及相同的参数.实际中,要想达到完全相同的动力学特征很困难,特别是它们之间的参数会失配,有时候非线性函数都根本不同或者相空间维数不同.这样原则上完全同步很难实现.但这并不说明振子之间就不会出现其他形式的有序行为.从本节开始我们将讨论几类其他形式的混沌同步,这些形式的同步揭示了耦合混沌振子系统内部的有序行为.我们首先讨论广义混沌同步,它是完全同步形式上的推广[170~188].

### 2.5.1 广义混沌同步的稳定性及判定

现在我们讨论驱动-响应混沌系统.设驱动系统的动力学方程为

$$\dot{x}=f(x),x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n. \tag{2.5.1a}$$

用输出信号 $x(t)$ 驱动另一响应系统

$$\dot{y}=g(y,x),y=(y_1,y_2,y_m),\quad g:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^m. \tag{2.5.1b}$$

在 $x(t)$ 的驱动下,响应系统的演化不仅受到驱动信号的影响,而且还取决于响应系统的初值.有的情况下响应系统的演化 $y(t)$ 即使在有 $x(t)$ 驱动时对取初值仍很敏感(指数敏感性).此时 $y(t)$ 不受 $x(t)$ 控制,我们说响应系统与驱动信号不同步.当响应系统的演化不对自身初值敏感,即在 $y(t)$ 的邻域改变响应系统的初值,响应系统都会趋于同一个解 $y(t)$ 时,我们就可以认为 $y(t)$ 与 $x(t)$ 之间存在某种依赖关系.这种依赖关系不是 $y(t)=x(t)$,它们之间通常有较复杂的依赖关系,甚至可以具有完全不同的维数,因此我们称响应系统与驱动系统之间达到了**广义同步**.

在广义同步情况下,响应系统演化 $y(t)$ 由驱动信号 $x(t)$ 惟一确定,说明二者之间存在一个泛函关系:

$$y=\varphi(x),\tag{2.5.2}$$

其性质我们将在后面加以讨论.需要指出的是这个关系是在长时间后(去掉暂态过程)二者建立的,与时间无关.

一种判定响应与驱动信号实现稳定广义同步与否的简单方法是辅助响应系统,即建立一个与原响应系统完全相同的辅助响应系统(初态不同),用同样的信号 $x(t)$来驱动:

$$\dot{y}'=g(y',t).\tag{2.5.3}$$

如果 $y(0)$与 $y'(0)$位于同一吸引域内,则当 $y$ 与 $x$ 建立广义同步时,$y'(t)$虽然与 $y(t)$初始条件不同,但它们在长时间之后就可以趋于完全相同的解,即

$$y'(t)=y(t).\tag{2.5.4}$$

这个条件是必要的,也是充分的.它体现了前面所谈到的响应系统初始不敏感性.由此我们也可以引入沿广义同步流形的条件李指数.广义同步的实现要求所有的条件李指数(通常只需计算最大条件李指数)为负.

我们以驱动-响应的 Lorenz-Rössler 系统为例.驱动 Lorenz 振子运动方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\sigma(y_1-x_1),\\ \dot{y}_1=\rho x_1-x_1z_1-y_1,\\ \dot{z}_1=x_1y_1-\beta z_1,\end{cases}\tag{2.5.5a}$$

这里 $\sigma=10,\rho=28,\beta=8/3$.用输出的 $y_1(t)$驱动一个 Rössler 振子:

$$\begin{cases}\dot{x}_2=-y_2-z_2,\\ \dot{y}_2=x_2+0.2y_2-\varepsilon[y_2-y_1(t)],\\ \dot{z}_2=0.2+z_2(x_2-5.7).\end{cases}\tag{2.5.5b}$$

在图 2-32(a)中我们计算驱动-响应系统的最大条件李指数 $\lambda$ 随耦合强度 $\varepsilon$ 的变化情况.可以看到当耦合强度较小时,响应系统不受驱动系统的支配,$\lambda>0$,系统存在一个临界耦合强度 $\varepsilon_c$,当 $\varepsilon>\varepsilon_c$ 时,$\lambda$ 由正穿零变负,说明响应

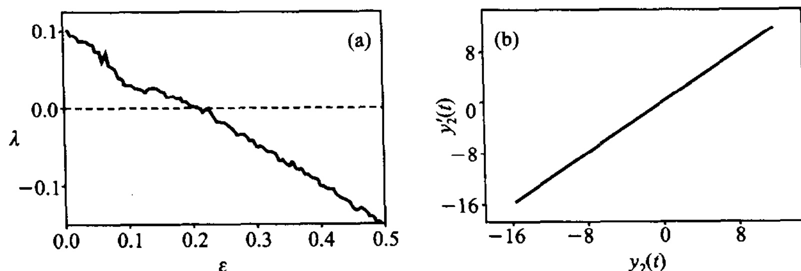



图 2-32　(a) 驱动-响应 Rössler 系统的 $\lambda$ 随 $\varepsilon$ 的变化;(b) 当 $\varepsilon>\varepsilon_c$ 时的 $y'_2\sim y_2$ 关系

Rössler 系统与 Lorenz 系统达到了广义同步，响应系统不再对自身的初始值敏感，在图中 $\varepsilon_c \approx 0.22$. 利用辅助响应系统的方法也可以看到同样的结果，图 2-32(b)中画出的是当 $\varepsilon > \varepsilon_c$ 时辅助系统$(x'_2, y'_2, z'_2)$与原响应系统的 $y'_2 - y_2$ 关系(暂态过程已经去掉)，可以看到 $y'_2(t) - y_2(t)$轨道完全处在对角线上，$y'_2(t) = y_2(t)$，说明此时系统存在同步.

### 2.5.2 广义混沌同步函数关系的连续性和可微性

驱动-响应混沌系统存在广义同步的充分必要条件就是函数关系 $y = \varphi(x)$的建立. 这一函数关系性质的研究是人们需要进一步探讨的课题. 研究表明，函数 $\varphi$ 是连续的，但不一定可微. 我们可以定义一个 Hölder 指数 $\gamma(x)$：

$$\gamma(x) = \min\{1, \liminf_{\delta \to \infty}\{\log \| \varphi(x+\delta) - \varphi(x) \| / \log \| \delta \| \}\}, \quad (2.5.6)$$

$\|\cdot\|$ 表示矢量的模，inf 取所有 $\delta$ 取向中的极小值. 利用 Hölder 指数可以制定：

1° 如果 $\gamma(x) > 0$，则函数 $\varphi(x)$在 $x$ 点连续；

2° 如果 $\gamma(x) < 1$，则函数 $\varphi(x)$在点 $x$ 不可微.

从上面可以看到，当驱动系统在整个混沌吸引子上都有 $\gamma(x) > 0$ 时，$\varphi(x)$在整个同步混沌态连续；当驱动系统在整个吸引子上 $\gamma(x) < 1$ 时，$\varphi(x)$在整个同步混沌态都不可微. 对于临界的 $\gamma(x) = 0$ 的情况，其连续性(可微性)需要进一步分析.

从系统的动力学性质出发，可以计算 Hölder 指数 $\gamma(x)$. 结果表明，对混沌吸引子的任意点 $x$ 都有 $\gamma(x) > 0$，说明广义同步函数 $\varphi$ 是连续的. $\varphi(x)$可以是一阶可微的，也可以是不可微的. 当 $\varphi(x)$不可微时，$y$ 通常比 $x$ 有更高的信息维数，$\varphi(x)$可能会很奇异和野性. 下面我们用驱动响应映像来说明 $\varphi(x)$的性质.

我们考虑下面的驱动-响应系统：

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n), \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n). \end{cases} \quad (2.5.7)$$

这里 $x, y$ 均为矢量(即可能为高维映像). 类似于时间连续系统，映像系统的广义同步也是当响应系统的 $y_n$ 完全由驱动系统 $x_n$ 态决定，即存在从 $x$ 到 $y$ 的一一映射：

$$y = H(x), \quad (2.5.8)$$

如果我们用 $y_{n+1}$代替 $y_n$ 即$y_{n+1} = \widetilde{H}(x_n)$时，这个函数关系更易于找到，因为 $x$，$y$ 通过$y_{n+1} = g(x_n, y_n)$而直接相关. 如果 $x_{n+1} = f(x_n)$是可逆的，则 $y_{n+1} = \widetilde{H}(x_n)$给出的关系与 $y_n = \widetilde{H}(x_n)$完全一样. 这种技术在实际中常常采用.

上面的函数关系可以是连续可微(平滑)的,也可能是连续但不可微(非平滑)的.我们考虑下面的二维广义 Baker 变换:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \beta x_n \\ \dfrac{1}{\alpha} y_n \end{pmatrix}, y_n < \alpha, \\ \begin{pmatrix} \beta + (1-\beta) x_n \\ \dfrac{1}{1-\alpha}(y_n - \alpha) \end{pmatrix}, y_n \geqslant \alpha, \end{cases} \tag{2.5.9a}$$

$x_n, y_n \in [0,1], \alpha < \dfrac{1}{2}, \beta < \dfrac{1}{2}, \alpha \neq \beta.$

这一映射为混沌映射,混沌吸引子的 Hausdorff 维数为 $D_0 = 2$,吸引子在 $y$ 方向具有连续均匀的分布,而在 $x$ 方向则处处不连续.我们用其中的 $x_n$ 来驱动一个线性映射:

$$z_{n+1} = \gamma z_n + \cos(2\pi x_n). \tag{2.5.9b}$$

在图 2-33 中,我们给出了 $\alpha = 0.1, \beta = 0.2$ 时在不同 $\gamma$ 值下的关系 $z_{n+1} = \widetilde{H}(x_n)$.可以看到,当 $\gamma = 0.8$ 时函数关系是分数维的,明显的连续但处处不可微;当 $\gamma = 0.6$ 时,不可微的点减少,曲线在平均意义上可微;当 $\gamma$ 减少到 0.1 时,曲线不仅连续而且可微.注意这三种情况系统均达到广义同步.

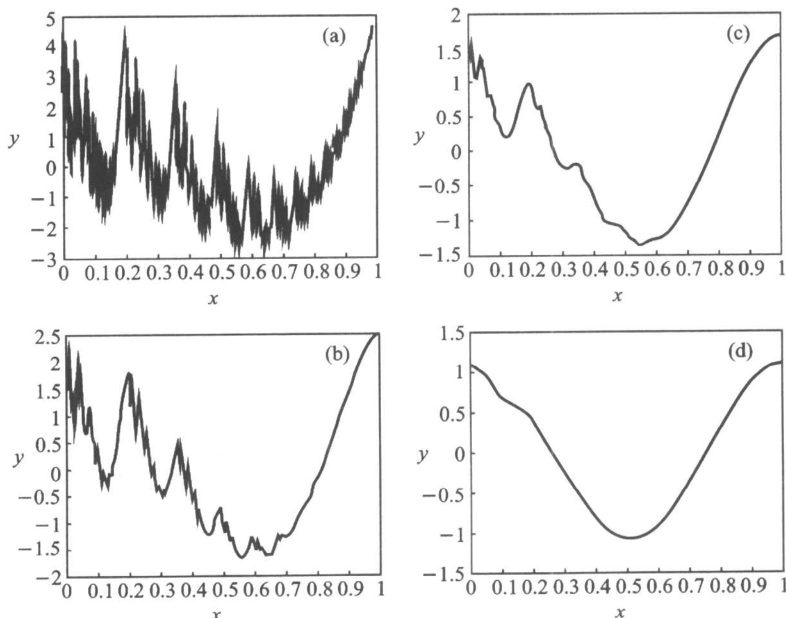



图 2-33 二维广义 Baker 变换驱动线性映射在不同 $\gamma$ 值下的关系 $z_{n+1} = \widetilde{H}(x_n)$

### 2.5.3 广义同步中不稳定周期轨道的作用

混沌吸引子中镶嵌着大量周期轨道，但它们都不稳定．我们可以通过引入时间向前与向后李指数来考察混沌吸引子上的点．给定吸引子上一点 $x(t)$，我们可沿轨道回溯至 $t-T$ 时刻，然后在 $t-T$ 到 $t$ 这段时间内计算这段轨道的李指数谱，称为 *T 向后李指数谱*；同样，若计算 $t$ 到 $t+T$ 时间内的李指数谱，则称为 *T 向前李指数谱*．它们不仅与 $x$ 有关，还与 $T$ 有关．当 $T\to\infty$ 时，我们就可得到系统的向前与向后李指数谱．混沌吸引上的绝大部分点的向前与向后李指数相等，且不依赖 $x$，这些点在吸引了上的测度为 1，称为典型点．另有一些点如不稳定周期轨道上的点，周期轨道的稳定与不稳定流形上的点，它们称为非典型点，在吸引子上所占的测度为零．它们的向前与向后李指数有着典型点完全不同的性质．例如，周期轨道上的点向前与向后李指数谱相同，但不同周期轨道的李指数谱不同；周期轨道的不稳定流形上的点的向前与向后李指数不相等，向前李指数等于典型点的李指数，向后李指数则等于相应的周期轨道的李指数；稳定流形则有相反的特征．尽管这些非典型点占吸引子的测度为零，但它们构成了混沌吸引子的骨架，因此常常起着重要的作用．

对不稳定周期轨道的研究是混沌动力学研究的一个重要方面．最近的研究表明，不稳定周期轨道是系统在有噪声或其他扰动时阵发地破坏系统同步的可能原因[180~185]．对于鲁棒的高质量同步来说，任何驱动系统的不稳定周期轨道都会产生响应系统的一个稳定同步周期轨道．如果对于弱耦合这种产生不能实现，那么系统的同步态就会被很小的扰动破坏．同样，响应系统中的不稳定周期轨道经常会使得原先的稳定响应周期轨道失稳，导致倍周期分岔，产生出新的周期 2 响应（主谐同步）．由周期比 $T_D:T_k=1:p$ 描述，这个 $p$ 为正整数，$T_D$，$T_k$ 分别代表驱动不稳定周期轨道与稳定响应周期轨道的周期．因此，高质量同步与亚谐同步有密切的关系．下面我们可以看到，广义同步中也会产生亚谐同步，这种亚谐同步对广义同步也有重要影响．

我们考虑前面讲义过的广义 Baker 变换（2.5.9a），用它来驱动一个一维系统：

$$z_{n+1}=\arctan(-cz_n)+x_{n+1}+d, \tag{2.5.10}$$

这里 $\alpha=0.1$，$\beta=0.15$，$c=40$，$d=1$．图 2－34 画出了 $z_n$ 与 $x_n$ 的关系．可以看到这个图由两支组成．我们可以讨论驱动系统的一些不稳定体周期轨道的响应．这个广义 Baker 映射有两个不动点 $(x,y)=(0,0),(1,1)$．如果用 $(0,0)$ 作为驱动来作用到响应系统上，响应系统的响应轨道为 $(\cdots,-0.5609,2.5262,\cdots)$，为周期 2 轨道（可直接由图中看到）．如果我们用驱动系统的不稳定周期 2 轨道

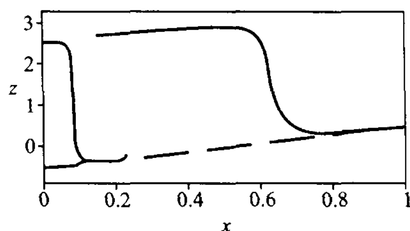



图 2-34　$z_n$ 与 $x_n$ 的关系曲线

$x_n=\left(\frac{\beta}{1-\beta(1-\beta)},\frac{\alpha^2}{1-\alpha(1-\alpha)}\right)$，$y_n=\left(\frac{\beta^2}{1-\beta(1-\beta)},\frac{\alpha}{1-\alpha(1-\alpha)}\right)$来驱动时，我们则可得到 1:1 的响应.另外还可看到周期 3 不稳定轨道驱动得到周期 6 响应轨道的结果(1:2).对于 1:1 的响应，我们可以得到一个很好的函数关系，但对于 $p>1$，响应与驱动之间则无法建立一种函数关系.这一点从图中可以反映出来.在连续时间混沌系统中我们也可以看到这种现象，以耦合 Rössler 为例：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=2+x_1(x_2-4),\\ \dot{x}_2=-x_1-x_3,\\ \dot{x}_3=x_2+bx_3,\end{cases}\qquad \begin{cases}\alpha\dot{y}_1=2+y_1(y_2-4),\\ \alpha\dot{y}_2=-y_1-y_3\\ \alpha\dot{y}_3=y_2+by_3+c(x_3-y_3),\end{cases}\tag{2.5.11}$$

其中 $\alpha=2$，$c$ 为耦合系数.

在图 2-35 中，我们分别给出了驱动系统与响应系统的吸引子图.图中灰色实线为混沌吸引子的驱动及响应.黑色实线相对应，虚线相对应；表示不稳定驱动周期轨道与稳定的响应周期轨道.黑色实线的不稳定轨道与响应轨道是1:1的锁定(详细见图(c)的两条演化轨迹)，而虚线的锁定则为 1:2.

在讨论混沌广义同步时，历史上人们给出几种不同的定义.一种比较普遍的是如果响应系统的行为完全由驱动系统决定，则称为广义同步.准确一点说，即对于单向耦合系统 $\dot{x}=f(x)$，$\dot{y}=g(y,x)$，$x\in\mathbf{R}^m$，$y\in\mathbf{R}^k$，如果存在一个开的同步吸引盆 $B\subset\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^k$，对于 $B$ 中的任意$(x_0,y_{10})$，$x_0,y_{20})$都有 $\lim\limits_{t\to\infty}\|y(t,x_0,y_{10})-y(t,x_0,y_{20})\|=0$，则称 $y$ 与 $x$ 广义同步.另一个关于广义同步的意义是基于 $y$ 与 $x$ 之间泛函关系 $H:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^k$，使得，$\lim\limits_{t\to\infty}\|H(x(t))-y(t)\|=0$(更严格的一个定义还要求 $H$ 是同胚).从前面亚谐同步的分析可以看出，这两个定义是有差异的.前面的 $1:p$ 亚谐同步用第一种定义是符合的，但不符合第二种.第一种定义与辅助响应系统的思想是一致的，且条件更为宽松.第二种定义实际上存在着很多复杂的情形，这些复杂情形都会使得以此来判断广义同步更为困难.所以，在实际中人们普遍采用的是第一种定义方式.

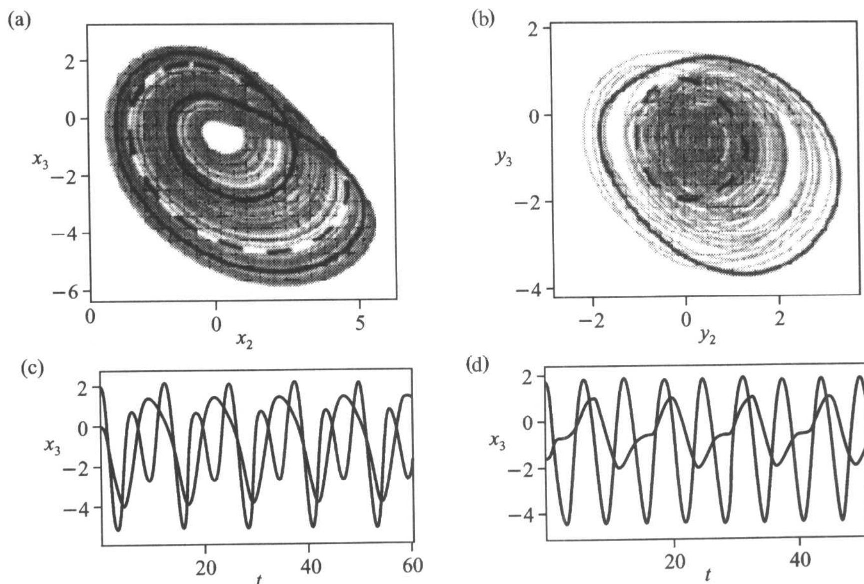



图 2－35 (a),(b):驱动与响应系统的吸引子图;(c)、(d):$x^3$ 的演化轨迹

值得注意的是,亚谐同步可以保证完全同步的稳定性,但对广义同步则未必.虽然亚谐同步可以与广义混沌同步同时存在,但在有亚谐同步存在时,广义混沌同步仍然可能被破坏.因此亚谐同步对广义同步的影响仍然不是非常清楚.

### 2.5.4 相互耦合混沌振子系统的广义同步

前面我们在讨论广义同步时,采取的模型总是驱动响应系统.这样做的优点是对驱动系统没有反馈作用,易于探讨函数关系.而实际上我们遇到更多的是相互之间有作用的振子系统,特别是当振子都不相同时,我们无法找到类似于完全同步那样的流形,因此振子之间能否建立某种程度的同步以及如何建立都是不太清楚的问题.本节我们试图研究有相互耦合的混沌振子之间的广义同步问题[186].

考虑相互耦合的系统,我们仍可采用前面的辅助响应系统方法.由于耦合是双向的,因此每一个振子既是驱动系统又是响应系统.这样就需要建立多个辅助响应系统.如图 2－36 所示,对两个振子系统,我们需要对 1 和 2 分别引入辅助系统 1′和 2′.考虑两个相互耦合振子:

$$\dot{x}_{1,2} = F_{1,2}(P_{1,2}, x_{1,2}) + \varepsilon D(x_{2,1} - x_{1,2}), \tag{2.5.12}$$

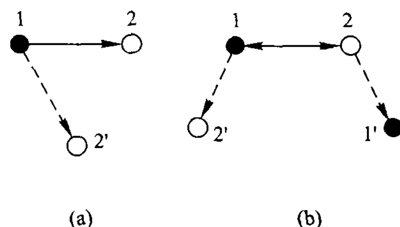



图 2-36 双向耦合的振子系统广义同步的辅助响应系统方法示意图

其中 $x_{1,2}(t)$代表单个振子在相空间的流，$F_{1,2}$为非线性函数矢量，$P_{1,2}$为振子的参数，$D$ 为耦合矩阵，$\varepsilon$ 代表耦合强度．相应的辅助系统的动力学方程为

$$\dot{x}_{1,2}=F_{1,2}(P_{1,2},x'_{1,2})+\varepsilon D(x'_{2,1}-x_{1,2}), \tag{2.5.13}$$

当对于某一 $\varepsilon$，我们对不同的初始条件 $x_{1,2}(0)$，$x'_{1,2}(0)$时在长时间有

$$\lim_{t\to\infty}\|x'_1(t)-x_1(t)\|=0,\lim_{t\to\infty}\|x'_2(t)-x_2(t)\|=0, \tag{2.5.14}$$

则认为整个系统达到了广义同步．

以 $x$ 耦合的两个 Lorenz 系统为例，取 $\sigma=10$，$b=\dfrac{8}{3}$，$r_{1,2}=40,35$．我们可以定义第 $i$ 个振子与其辅助系统的距离为

$$D_i(t)=\|x_i(t)-x'_i(t)\|=\sqrt{(x'_i-x_i)^2+(y'_i-y_i)^2+(z'_i-z_i)^2}. \tag{2.5.15}$$

在图 2-37 中，我们给出了 $D_{1,2}(t)$在不同耦合强度下的演化．在(a)和(b)中，$\varepsilon=7.0$，可以看到 $D_{1,2}(t)$随时间无规则地振荡，说明此时振子之间关联很弱．增加 $\varepsilon$，当 $\varepsilon=10.0$ 时，可以发现 $D_2(t)\to0$，而 $D_1(t)$仍然是强烈振荡的．这说明在振子 1 的驱动下，2′与 2 达到同步，表明振子 2 可以跟随 1 演化，$D_1(t)\neq 0$ 说明此时 1 振子并未受到 2 的指挥．从这里可以看出，对相互耦合的两个不同振子，两个耦合方向是不等同的，即两个方向并不在同一耦合强度上同时同步．当继续增加 $\varepsilon$ 时，我们看到不仅 $D_2(t)\to0$，$D_1(t)$也趋于零，即此时不仅 1 可以“指挥”2，2 也可以反过来“指挥”1．此时我们认为系统达到了全局的广义同步态．在图 2-38 中，我们画出相应系统的 $D_{1,2}(t)$长时间平均与最大条件李指数随 $\varepsilon$ 的变化关系，可以看到在第一个阈值点 $\varepsilon'_c\approx8.4$，$D_2=0$，$\lambda_T$ 有一个由正穿零变负；在 $\varepsilon=\varepsilon_c^2\approx13.4$ 时，系统达到全局广义同步．

对于 $N>2$ 个振子

$$\dot{x}_i=F_i(P_i,x_i)+\varepsilon D(x_{i+1}-x_i)-D(x_i-x_{i-1}), \tag{2.5.16}$$

讨论的方法类似，即同样引入 $N$ 个辅助子系统：

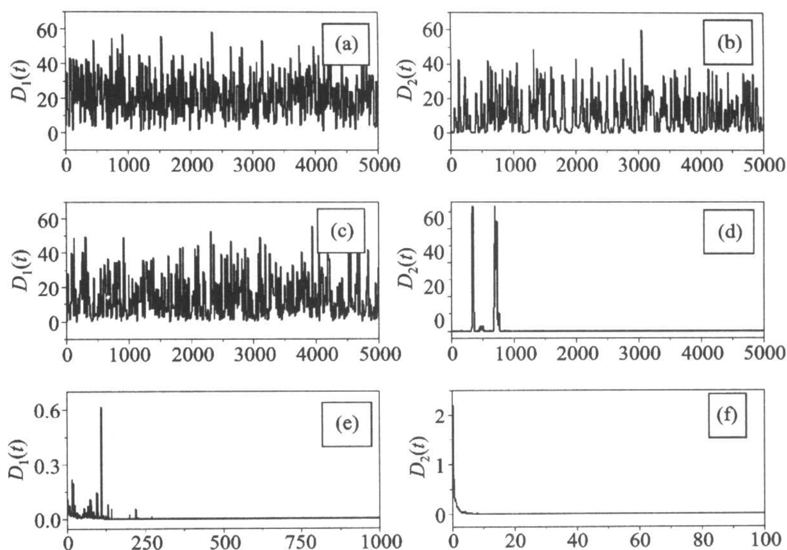



图 2－37 $D_{1,2}(t)$在不同耦合强度下的演化

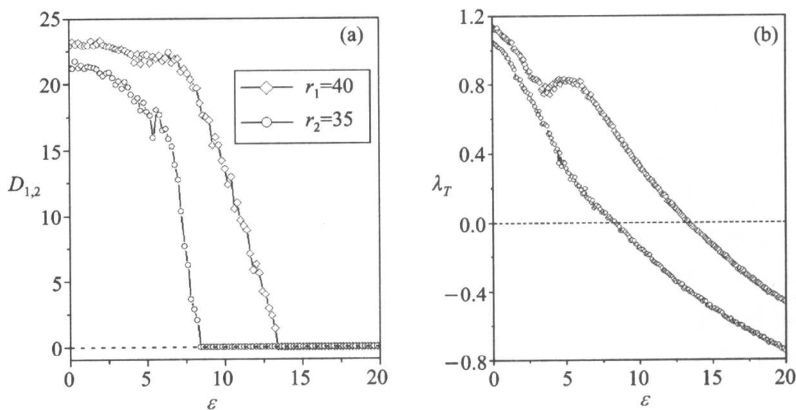



图 2－38 $D_{1,2}(t)$长时间平均与最大条件李指数随 ε 的变化关系

$$\dot{x}'_i = F_i(P_i, x'_i) + \varepsilon D(x_{i+1} - x'_i) - \varepsilon D(x'_i - x_{i-1}), \qquad (2.5.17)$$

例如，在图 2－39(a)中，我们给出了 $N=3$ 个振子的辅助系统图．以 Lorenz 振子为例，我们讨论 $r_{1,2,3}=50,55,60$ 的情况，同样计算 $D_{1,2,3}$ 和最大条件李指数，我们可以看到随着 ε 的增加，振子一个一个地被同步，通过部分广义同步而达到整体广义同步，如图(b)，(c)所示．

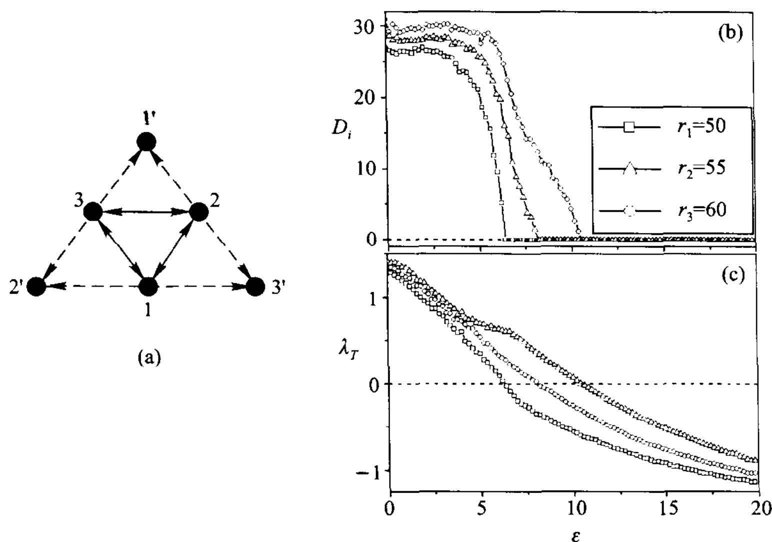



图 2-39 (a):$N=3$ 个振子的辅助系统图;(b)、(c):$D_{1,2,3}$和最大条件李指数随 $\epsilon$ 的变化

## 2.6 混沌系统的相同步

我们在讨论极限环系统的同步问题时,曾花大量笔墨讨论其相位的动力学与同步行为.一个重要原因是相位的概念在极限环(周期振荡)中非常关键,在同步过程中起着决定性的作用.对混沌运动来说,它也是一种振荡,但要复杂得多.另外,对混沌系统的同步分析大量地集中于轨道,而对其中部分自由度则很少讨论.本节中我们将探讨混沌系统的相位动力学与同步.由于这种同步与人们传统的极限环同步非常相似,因此一经提出就引起了研究者的兴趣,特别是研究化学反应、生物、医学、工程的科学家们在不同方面的讨论大大丰富了这一课题的内容.

### 2.6.1 混沌振子的"相位"

传统的关于非线性振动混沌动力学的研究中,人们更多关心的是吸引子的初值敏感性,这由李指数和 KS 熵准确地给出,它反映了相邻轨道之间差异的膨胀或收缩性质.对一个 $n$ 维系统,我们有 $n$ 个李指数,称为李指数谱,混沌运动是局限于相空间的有限范围的(吸引子的回归性质).因此混沌吸引子除了拉伸效应(由李指数描述),还必须有折叠效应.而折叠效应即反映出旋转的性质,它体现在计算李指数谱的切空间中.这种折叠效应长期以来被人们忽略,最近引起

了人们的关注.通过这方面的研究,人们搞清楚了一些以前尚不清楚的混沌内部分岔[189,190].关于这方面的讨论可参考有关文献,我们这里不准备对此进行详细讨论.下面关于混沌的相位动力学的讨论集中于轨道本身的旋转性质(回归性质)而非切空间的旋转性质.在自治系统的混沌运动中,它代表的是零李指数的旋转性质.

尽管大家迄今为止一直认为混沌运动的旋转性质非常重要,但“相位”本身的定义问题长期以来一直没有讨论得非常清楚,尤其是当混沌吸引子是高维的时候.下面的讨论则基本上反映了目前为止对混沌系统相位动力学的认识.

1. 振荡极值法

选取系统的某一变量的时间序列 $x(t)$,记录 $x(t)$ 每次达到极大值的时间 $t_1, t_2, \cdots t_n \cdots$.再以此定义混沌轨道的相位为:

$$\varphi(t) = 2\pi \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + 2\pi n, \tag{2.6.1}$$

这里 $t$ 取 $t_n$ 与 $t_{n+1}$ 之间的值即用线性的内插法定义出相位,$2\pi n$ 则代表相位转过的圈数,这种定义得到的 $\varphi(t)$ 是分段线性的,它不考虑相邻极大值之间的相位涨落.我们在后面讨论的可激发系统即是采用这种定义相位的方式.

2. 轨道投影法

对高维轨道我们可设法将其投影到低维空间,特别是对三维的情况,我们可将其投影到一个二维平面上.如果在平面上的投影有较好的旋转性(都围绕一个中心旋转),则可采用类似周期转子的相位定义:

$$\tan \varphi(t) = y/x. \tag{2.6.2}$$

以 Rössler 系统为例,其运动方程为:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega y - z, \\ \dot{y} = \omega x + a y, \\ \dot{z} = \sigma + z(x - c), \end{cases} \tag{2.6.3}$$

当 $a = 0.165, \sigma = 0.2, c = 10, \omega = 1.0$ 时,在 $x - y$ 平面振子具有极好的相干旋转性质,此时的相位就可以用上面的定义.

对少数相空间有很好对称性的混沌吸引子来说,可以通过适当变换使上面的定义仍可使用.一个典型的例子就是 Lorenz 系统.它有两个旋转中心,但它们是关于 $(x,y)$ 反射对称的($(x,y) \to (-x,-y)$,Lorenz 运动方程形式不变).因此我们可以采取如下变换:

$$Z = z - (r-1), Y = \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{2b(r-1)}, \tag{2.6.4}$$

使得双吸引子变为单个相干性极好的旋转.此时相位可方便地引入:

$$\phi(t) = \arctan(Y/Z). \tag{2.6.5}$$

3. Hilbert 变换构造复变量法

考虑一标度实时间序列 $x(t)$，构造其复空间：

$$\Psi(t)=x(t)+\mathrm{i}\tilde{x}(t)=A(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(t)},\tag{2.6.6}$$

$\tilde{x}(t)$由 $x(t)$的 Hilbert 变换得到：

$$\tilde{x}(t)=P.V.\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(t')}{t-t'}\mathrm{d}t'\right],\tag{2.6.7}$$

这里 $P.V.$表示积分的 Cauchy 主值. 由此就可将复变量 $\Psi(t)$的辐角和模直接给出，其中 $\phi(t)$即我们所引入的相位. Hilbert 变换可视为 $x(t)$与$\dfrac{1}{\pi t}$的卷积. 因此 $\tilde{x}(t)$的 Fourier 谱等于 $x(t)$与$\dfrac{1}{\pi t}$谱的乘积. 对物理上重要的 $\omega>0$, $\tilde{s}(\mathrm{i}\omega)=-\mathrm{i}s(\mathrm{i}\omega)$，即 $\tilde{x}(t)$与 $x(t)$间相位差为 $\pi/2$.

有了相位变量之后，我们就可以讨论混沌振子的相位动力学. 根据相位，我们可以定义混沌轨道的旋转频率：

$$\omega(t)=\mathrm{d}\phi(t)/\mathrm{d}t,\tag{2.6.8}$$

在许多情况下，我们还比较关心其长时间平均效应，即平均旋转数：

$$\bar{\omega}(t)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\omega(t)\mathrm{d}t.\tag{2.6.9}$$

上面三种引入相位的方式有如下特点：① 它们本质上都是高维空间混沌在低维投影的定义，因此选择不同的投影子空间可能会导致不同的相位演化方式；② 相位的定义与混沌轨道的旋转特性有很大的关系，如果轨道在相空间中有多个旋转中心上面的所有定义则无法运用. 在图 2－40 中画出了两种轨道旋转方式. 对第一种所有轨道都不得围绕同一中心旋转，此时的相位可由上面的任一种方法引入，而且结果基本一致；对第二种轨道演化，可以看到轨道在有大圈旋转外，还有若干小圈，且它们不在同一中心，此时用前面的方法都无法反映轨道的真实旋转，必须考虑新的定义相位的方法. 另外，对 Lorenz 振子而言，尽管通过变换可以得到一个旋转中心，但其中丢掉了许多信息，比如轨道在两个旋转叶之

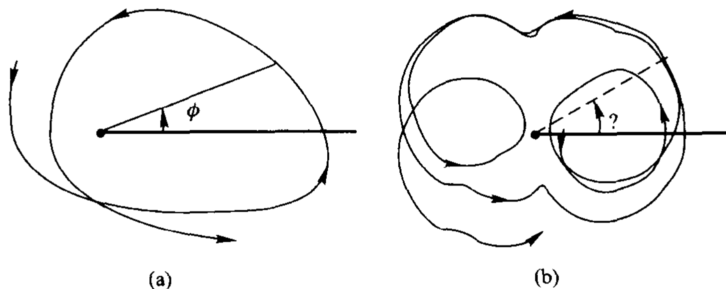



图 2－40　两种不同的轨道旋转方式

间的跃迁就根本没有反映出来.

4. 主模分解法

混沌轨道的多中心旋转显然反映了用单一相位来描述是不完全的,需要考虑引入其他相位来描述.一种简单有效的方法是 Yalcinkaya 与赖英诚于 1997 年提出的[189],其基本思想就是通过一定方式将多中心旋转模式分解为多个独立的单中心旋转模式.对单中心旋转模式(称为恰当旋转),其时间序列的极大值数目与穿零(取截面)数目是相同的.因此我们只需要分析一个时间序列,将其分解成独立的恰当旋转模式就可以较准确反映出混沌轨道的旋转性质[191~193].时间序列的主模分解法即是如此,其基本步骤如下:

① 对时间序列 $x(t)$,构造两条平滑线 $x_{max}(t)$ 与 $x_{min}(t)$,它们分别连接所有的 $x(t)$ 的极大值与极小值;

② 计算 $\Delta x(t)=x(t)-\frac{1}{2}[x_{max}(t)+x_{min}(t)]$;

③ 将 $\Delta x(t)$ 作为 $x(t)$,继续重复上面①和②,直到 $\Delta x(t)$ 对应于恰当旋转;

④ 将 $\Delta x(t)$ 定为 $x(t)$ 的第一个内禀主模,$C_1(t)=\Delta x(t)$;

⑤ $x_1(t)=x(t)-C_1(t)$,对 $x_1(t)$ 作①~④的分析,得到第二个模 $C_2(t)$;

⑥ 重复上面步骤以得到其他模 $C_3(t),C_4(t),\cdots$,直到 $C_M(t)$ 没有明显的变化为止(上面的所有模式中 $C_1(t)$ 是最快的,其他振荡依次减慢).

这样我们看到一个 $x(t)$ 可以分解为若干的恰当旋转,即 $x(t)=\sum_{j=1}^{M}C_j(t)$.可以证明这些恰当旋转主模之间是几乎正交的,因此它们是相互独立的[194].这样对每一个主模 $C_j(t)$,我们再用 Hilbert 变换构造其复平面 $\Psi_j(t)=A(t)e^{i\phi_j(t)}$,就可以自然而然引入 $M$ 个独立的相位 $\phi_1(t),\phi_2(t),\cdots,\phi_M(t)$,从而也可计算出其旋转数 $\bar{\omega}_1,\bar{\omega}_2,\cdots,\bar{\omega}_M$.

以 Lorenz 振子为例,参数取 $\sigma=10,b=8/3,r=28$,在图 2-41(a)中我们给出了 $y(t)$ 与其 Hilbert 变换 $\tilde{y}(t)$ 平面上的轨迹,可以看到不止一个旋转中心.采用上面的主模分解法,在图(b)中我们给出了 $C_1(t)\sim\tilde{C}_1(t)$ 复平面上的轨迹.可以看到尽管运动复杂,但都围绕同一中心旋转,此时 $C_1(t)$ 的相位可以方便地给出.

通常,对一个混沌系统来说所需的主模数目 $M$ 是很小的,图 2-42 画出了 Lorenz 系统不同模式的相位 $\phi_j(t)$ 的演化,斜率最大的是 $C_1(t)$ 的相位,然后随斜率减少依次是 $\phi_2(t),\phi_3(t),\cdots$ 可以看到各个模的旋转数 $\bar{\omega}_j$(即相位演化 $\phi_j(t)$ 的斜率)明显不同,其中 $\bar{\omega}_1=20.68,\bar{\omega}_2\approx\bar{\omega}_1/2,\bar{\omega}_3\approx\bar{\omega}_1/3,\bar{\omega}_4\approx\bar{\omega}_1/5,\bar{\omega}_5\approx$

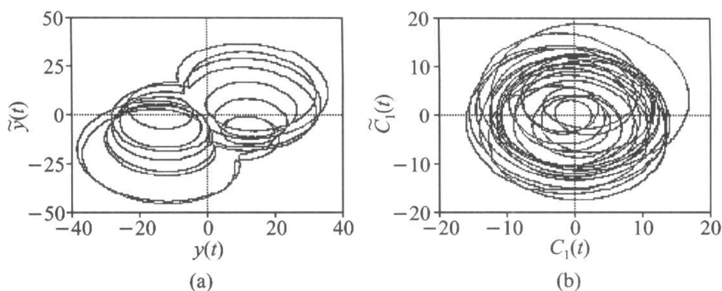



图 2-41 (a) $y(t)$与$\tilde{y}(t)$平面上的轨迹;(b) $C_1(t)-\tilde{C}_1(t)$复平面上的轨迹

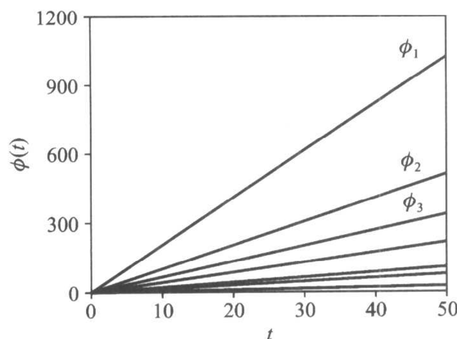



图 2-42 Lorenz 系统不同模式的相位 $\phi_j(t)$的演化

$\bar{\omega}_1/10, \bar{\omega}_6 \approx \bar{\omega}_1/14, \bar{\omega}_7 \approx \bar{\omega}_1/45$,可见 $\bar{\omega}_j$ 随 $j$ 的增加而迅速趋于零.对 Lorenz 系统,大约 7 个模就足够描述系统的相位动力学了.

可以验证,相位 $\phi_j(t)$演化不是均匀的旋转.一般情况下 $\phi_j(t)$的演化可以写为

$$\phi_j(t) = \bar{\omega}_j t + F_j[A_j(t)], j = 1, 2, \cdots, M. \tag{2.6.10}$$

由于系统的混沌性,在 $\tau \geqslant \bar{\omega}_j^{-1}$ 的时间尺度上 $A_j(t)$本质上是随机变量,因此第二项实际是随机项.这样 $\phi_j(t)$围绕均匀旋转 $\bar{\omega}_j t$ 就是一种布朗运动.引入 $\Delta\phi_j(t) \equiv \phi_j(t) - \bar{\omega}_j t = F_j[A_j(t)]$.在图 2-43(a)中给出的是 $\Delta\phi_1(t)$的演化,有些像分数布朗运动.这可以由分析 $\Delta\phi_1(t)$的首次回归时间 $\tau$ 的分布 $\rho(\tau)$得以验证.对分数布朗运动来说,$\rho(\tau)$遵守下面的幂律:

$$\rho(\tau) \sim \tau^{H-2} \tag{2.6.11}$$

其中有 $H$ 称为 Hurst 指数[195].图(b)画出了 $\rho(\tau)-\tau$ 关系(双对数).可以看到

很好的幂律,且 Hurst 指数 $H\approx0.74$.这证实了上面的推测.

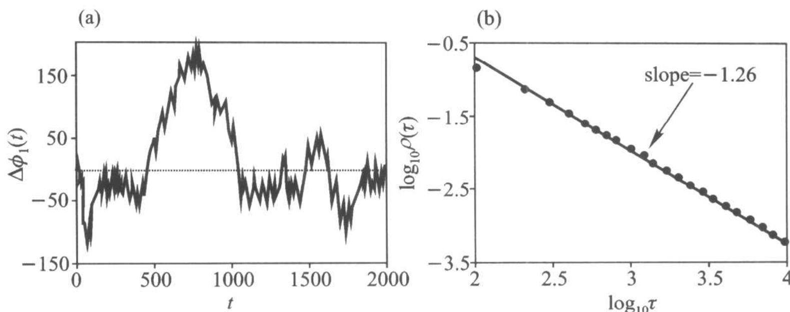



图 2-43 (a) $\Delta\phi_1(t)$的演化;(b) $\rho(\tau)-\tau$ 关系(双对数)

在后面讨论中,我们将集中于混沌系统的相位对外来驱动的响应以及振子之间相位的协调(相同步).为方便,我们仍集中讨论具有较好恰当旋转性质的振子系统.这一方面可以避免相位定义本身的问题,另一方面可以揭示混沌振子之间的相同步与周期振子同步之间的相似性与差异,利用主模分解方法讨论相同步至今仍是一个不清楚的课题,值得深入研究.

### 2.6.2 驱动混沌振子的相同步

当我们用外力驱动一个混沌振子时,混沌振子会对驱动作出一定的响应.前面讨论的完全同步,广义同步都涉及这方面的内容.现在我们问一个问题:振子的"相位"会对外力驱动作出什么样的响应?对于周期驱动的非线性周期振子我们通过标准映射和圆映射得出了丰富的结果,并在许多实验和实际观察中得到验证.利用外力驱动一个混沌振子主要有两种方式:一种是类似周期振子,加上一个周期外力,另一种是用另外一个混沌信号来驱动.我们下面主要讨论这两类驱动.我们关心的是当混沌振子本身仍保持混沌状态时其相位的响应情况[196~204].

一、周期驱动混沌振子的相同步:1∶1 同步

在讨论这种同步之前,我们先简单介绍一下这方面的一些实际观察手段,它们在后面都会用到.

一个最常考察的量是振动的旋转数,它可以由定义的相位 $\phi(t)$直接给出.在实际计算中,可以采用更简单的办法:

$$\bar{\omega}=\lim_{t\to\infty}2\pi\frac{N_t}{t}, \tag{2.6.12}$$

这里 $N_t$ 是在 $t$ 时间内观察到的信号 $x(t)$的穿零次数,也可以是 $x(t)$的极大值

(或极小值)个数.考察振子的平均频率可以直接观察它与外力频率之间的关系.

另一个可以考察的是相位 $\phi(t)$ 的分布 $\rho(\phi)$.一个自治的混沌系统,其相位分布 $\rho(\phi_1)$ 是近乎均匀地在 $0\sim2\pi$ 内的分布;当加上外力出现同步时,在每一时刻相位分布 $\rho(\phi,t)$ 都是非均匀的,通常是一个单峰分布,分布的尖锐程度反映出同步的程度.

另一个与相位分布函数相关的技术就是所谓的闪频技术,以外力周期 $T=2\pi/\omega_0$ 为间隔,每隔 $T$ 时间记录 $\phi_n$,我们可以看到 $\{\phi_n\}$ 的分布情况.同步的出现意味着这些点密集地分布于 $0\sim2\pi$ 的一个小区间.

另一个间接的技术是可以分析信号 $x(t)$ 的功率谱.当混沌振子与外力锁相时,动力学过程就会有很强的关联.定义 $x(t)$ 与 $x+nT$ 的关联 $C(\tau)=\langle x(t)x(t+\tau)\rangle$,可以看到 $C(\tau)$ 在 $\tau\to\infty$ 时有一个周期性的尾巴,在 $\tau=nT$ 时有极大值.这意味着在外力频率 $\omega_0$ 及其谐频 $n\omega_0$ 处对应于功率谱的尖峰.功率谱与关联函数有如下关系:

$$S=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t C^2(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{2.6.13}$$

$S(\omega_0)$ 在发生同步时会表现出共振峰.这些量的好处是不必考察相位,因此与相位的引入方式无关.

还可以计算系统的李指数.同步的发生意味着内部分岔的出现,它必然反映在系统的动力学上.考察李指数在同步前后的变化可使我们对相同步的形成有更深刻的理解.

下面我们以周期驱动的 Rössler 振子为例来分析相同步.我们把驱动加在 $x$ 变量的方程上:

$$\dot{x}=-y-z+A\cos\omega_0 t,\dot{y}=x+0.15y,\dot{z}=0.4+z(x-8.5). \tag{2.6.14}$$

在图 2－44 中,我们画出了 Rössler 振子的旋转数 $\bar{\omega}/\omega_0$ 在不同 $A$ 下与 $\omega_0$ 的关系.可以看到在 $\omega_0$ 的一个相当宽的范围内 $\bar{\omega}/\omega_0=1$,表明 Rössler 振子与外力发生相同步(锁相).对一些 $A$ 的值,我们还可以看到,$\bar{\omega}/\omega_0=\frac{1}{2}$ 和 2,说明除了 1:1 的同步外,其他比例的锁相行为仍然可以看到.在图 2－45 中,我们给出频闪图.可以看到在 $A=0.6,\omega_0=1.025$ 时频闪的位置分布非常集中,说明此时振子相位与外力之间有很好的相干性,发生了同步;当 $A=0.6,\omega_0=1.05$ 时,频闪的分布分散于吸引子的各处,说明此时的相干性很差,振子与外力尚未达到同步.此外,通过频闪图我们还可看到 1:2 共振,即在频闪图中可看到所有的频闪点落在两个相对集中的区域.

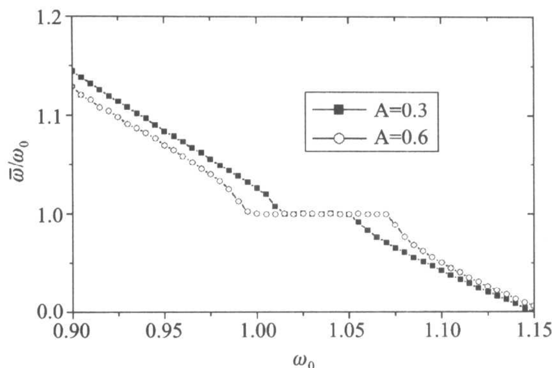



图 2-44 Rössler 振子的旋转数 $\bar{\omega}/\omega_0$ 在不同 $A$ 下与 $\omega_0$ 的关系

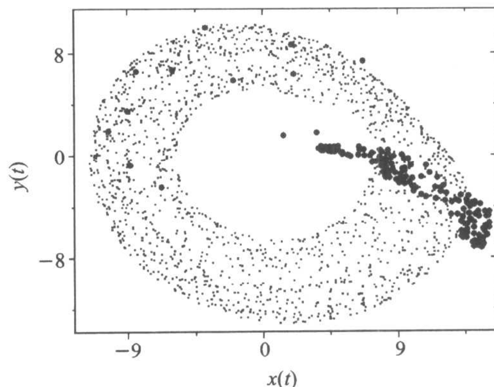



图 2-45 频闪图

如果我们观察系统最大李指数,如图 2-46 所示,可以看到除了一些周期窗口外,最大李指数会一直保持为正,说明即使振子与外力发生了相同步,系统仍然保持混沌的特性,因此相同步仍是混沌意义下的同步,它揭示的是混沌系统内部的自由度与外力的协作行为.尤其有意义的是系统的第二个李指数,系统未发生同步时它一直为零,而当相同步发生时,第二个李指数由零变负,说明相同步的发生意味着吸引子发生了拓扑性质的变化,这一变化使得我们联想起前面对周期振子同步时的拓扑变化.说明混沌相同步与周期振子同步有相似性.

二、周期驱动混沌振子的相同步:交替锁相行为

上面讨论的稳定 1:1 同步发生在有较好相干性的混沌振子系统(具有恰当转动性质)中.这类系统由于相干性而具有相对较窄的内部时间尺度范围.当混

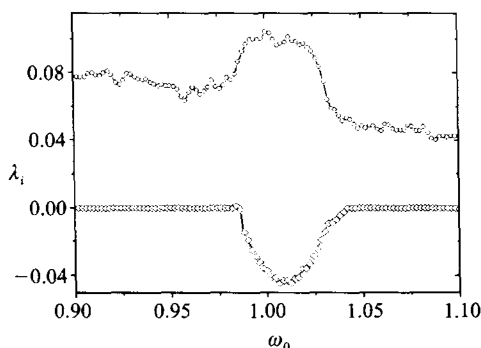



图 2－46　周期驱动 Rössler 系统的李指数谱

沌振子的相干性较差时，就具有较宽的时间尺度，此时其相位较难以“驯服”．人们进行过人的呼吸心跳同步的研究，发现呼吸节律与心跳之间可以发生各种比例的锁相，随着时间的推移，人的生理状态也会发生相应改变，此时锁相就在各种不同比例之间来回转换[201]．心脏动力学的混沌性质大家早已熟知，因此用周期驱动的混沌振子来描述或许也会揭示类似现象．

下面以周期驱动的 Lorenz 振子为例加以讨论：

$$\dot{x}=\sigma(y-x),\dot{y}=rx-y-xz,\dot{z}=x-bz+E\cos(\Omega t),\qquad(2.6.15)$$

这里 $\sigma=10,r=28,b=8/3$．我们此处仍采用前面定义相位 $\phi(t)$的方式，这样可计算 Lorenz 振子的旋转数 $\omega$．当系统取上述参数且 $E=6$ 时，我们画出 $\omega-\Omega$ 与 $\Omega$ 的关系图，如图 2－47 所示(实线)．可以看到，在 $\Omega\approx8.25\sim8.4$ 之间有一个“平台”，但这个“平台”并不平，而且它没有位于 $\omega-\Omega=0$ 上．当 $r$ 很大时，自治 Lorenz 方程不包含鞍点，此时相位具有很好的相干性，可以有好的相同步．为与小 $r$ 对比，图中画出了当 $r=210,E=3.0$ 时的 $\omega-\Omega\sim\Omega$ 曲线(虚线)，可以看

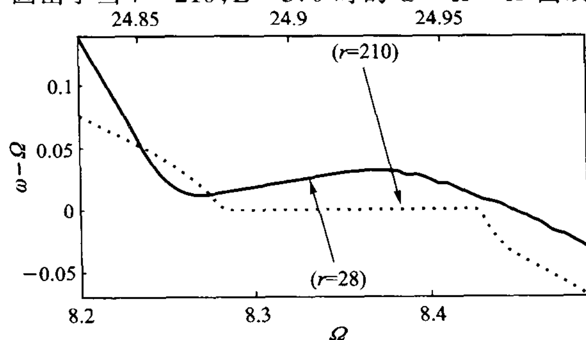



图 2－47　$\omega-\Omega$ 与 $\Omega$ 的关系图

到一个 $\omega=\Omega$ 很长的平台.因此对小 $r$ 来说,周期驱动不能使 Lorenz 振子具有很好的相同步,那么这里面究竟发生了什么呢?

图 2－48 中我们画出 $\Omega=8.29,E=6$ 时 $\Delta\phi(t)=\phi(t)-\Omega t$ 的演化情况.

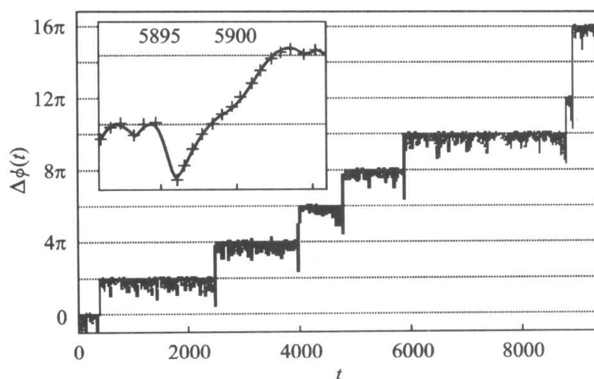



图 2－48　$\Delta\phi(t)=\phi(t)-\Omega t$ 的演化情况

可看到时间序列由 $\Delta\phi$ 保持固定的长片段及其短促的相跃迁组成,跃迁幅度主要是 $2\pi$,但也有更长的如 $4\pi$.显然在一段时间内的平台表示 Lorenz 振子相位与外力锁定,但由于不严格的 1:1 锁相,这个锁相过一段时间会打破.小图中我们把局部的跃迁放大,可看到相位差的变化是均匀的,说明虽然此处 1:1 锁相失稳,但它可能是其他比例的锁相.通过引入广义相位差:

$$\Delta\phi_{m,n}(t)=m\phi(t)-n\Omega t,\tag{2.6.16}$$

我们可以确认每两个 1:1 片段之间是否存在 $m:n(m\neq n)$锁相.在数值计算中这可以通过改变 $m,n$ 直至看到 $\Delta\phi_{m,n}(t)$在跃迁时间段内是一个平台为止.在实际观察中的确观察到 $m:n(m\neq n)$的同步片段.这说明 Lorenz 振子与外力的非完美相同步实际上是 1:1 与其他比例 $m:n(m\neq n)$的交替同步.

这种非完美相同步的机制可用不稳定周期轨道来解释.我们知道,混沌吸引子中存在无数的不稳定轨道,它们构成整个吸引子的骨架.当对混沌系统施加一个小的周期外力时,每个周期态都可看作一个周期驱动振子.令周期态的旋转数为 $\omega_i$.在参数空间锁相区(即 Arnold 舌头)对应于周期力频率 $\Omega$ 与周期轨道转数 $\omega_i$ 的有理数比率.一般情况下,$\Omega=\omega_i$ 即 1:1 的效应最强.如果一些周期轨道的 $\omega_i$ 相互间较为接近,则这些轨道锁相的主 Arnold 舌头会重叠.当这些舌头有共同的重叠区时,则在此参数区我们就可以看到好的相同步.在这个重叠区之外,同步运动会被一种称为"小孔"的阵发所打断.特别是如果在参数区找不到所有这些 Arnold 舌头的共同重叠区时,系统就会表现为非完美的相同步,1:1 与

$m:n(m\neq n)$的同步随时间交替[202~204].

在图2-49中给出了一些周期轨道在周期外力作用下的锁相区域.实线画出的是周期7轨道的锁相舌头,为1:1锁相.短划线是周期15轨道的Arnold舌头,为14:15锁相;点状线为周期20的锁相区,为18:20锁相.可以看到这些舌头没有完全重叠(还有其他舌头,没有画出).因此在部分重叠的参数区,我们可以看到交替相同步.

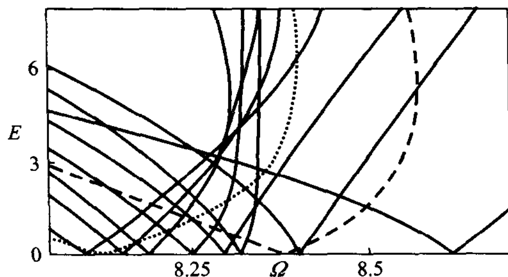



图2-49　一些周期轨道在周期外力作用下的锁相区域

三、驱动响应系统的混沌相同步

当我们不用周期外力而改用另一个混沌信号来驱动一个混沌振子(通常这两个振子是同类型的,但参数有失配)时,类似地可以讨论锁相行为.这时我们需要同时计算驱动与响应振子的旋转数.以Rössler振子为例,我们用一个振子来驱动另一个振子:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-\omega_1 y_1-z_1,\dot{y}_1=\omega_1 x_1+ay_1,\dot{z}_1=\sigma+z_1(x_1-c),\\ \dot{x}_2=-\omega_2 y_2-z_2+\epsilon(x_1-x_2),\dot{y}_2=\omega_2 x_2+ay_2,\dot{z}_2=\sigma+z_2(x_2-c).\end{cases} \tag{2.6.17}$$

我们固定$\omega_1=1,a=0.165,\sigma=0.2,c=10$,然后计算$\bar{\omega}_1$与$\bar{\omega}_2,\bar{\omega}_1\approx\omega_1$.当我们取$\epsilon=0.2$时,在图2-50(a)中我们画出$\bar{\omega}_1$与$\omega_2$的变化关系.可以看到在大部分区域有$\bar{\omega}_2\approx\omega_2$,但在$\omega_2$与$\omega_1$差别较少处可以看到,虽然$\omega_2$改变,但$\bar{\omega}_2=\bar{\omega}_1\approx\omega_1$不随之改变,这个平台对应的即为相同步区.此时如果考察两个振子振幅之间关系的话,二者之间几乎没有关联,且系统仍保持混沌.这一点可由计算响应系统的李指数看到,如图2-50(b)所示.在相同步区,$\lambda_1>0$.另外,与我们前面看到的周期驱动相同步类似,第二个李指数在相同步时由零变负.当$\omega_1$与$\omega_2$差别很大时,我们还可以看到一系列其他的锁相平台:$m\bar{\omega}_1=n\bar{\omega}_2$,这里不再详细讨论.

驱动混沌振子的相同步仍有许多问题值得探讨,例如同步内部复杂的动力

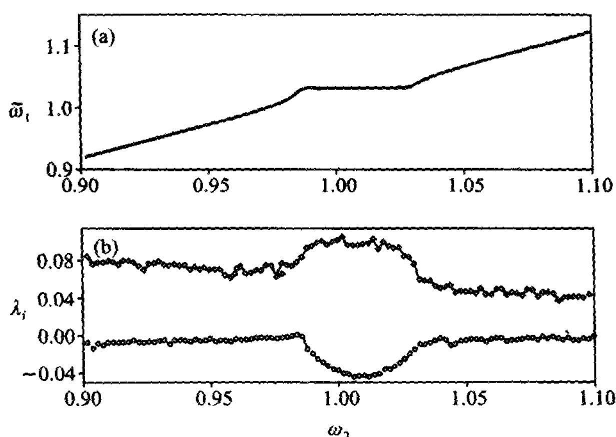



图 2－50 (a) $\bar{\omega}_1$ 与 $\omega_2$ 的变化关系；(b) 响应系统的李指数

学变化，噪声的影响等等，以及相同步与其他的关系问题，我们将在后面涉及部分课题.

### 2.6.3 两个耦合振子系统的相同步

一、相同步的发生与动力学表现

我们考虑两个相互耦合的 Rössler 振子，它们的参数之间有失配：

$$\begin{cases}\dot{x}_{1,2} = -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + \varepsilon(x_{2,1} - x_{1,2}),\\ \dot{y}_{1,2} = \omega_{1,2}x_{1,2} + ay_{1,2},\\ \dot{z}_{1,2} = f + z_{1,2}(x_{1,2} - c),\end{cases} \tag{2.6.18}$$

$a=0.15$，$f=0.5$，$c=10$，$\omega_{1,2}=1.0\pm\Delta$，$\Delta$ 为参数失配幅度，$\varepsilon$ 为耦合强度. 两个 Rössler 振子的相位 $\phi_{1,2}(t)$ 与平均频率 $\Omega_{1,2}$ 均与前面定义一样. 在图 2－51(a) 中我们给出了 $\Delta=0.015$ 时在不同耦合强度下两振子相位差 $\phi_1(t)-\phi_2(t)$ 的演化. 当 $\varepsilon=0.01$ 时，两振子的相位显然完全没有同步，相位差随时间的变化近乎为一直线，其斜率即为平均频率差. 增加 $\varepsilon$ 到 0.027 时，可以看到相位差的变化为 $2\pi$ 的跳跃，在每一个平台 $\phi_1$ 与 $\phi_2$ 可以暂时锁定，但由于相同步仍未达到，暂时的同步会失稳，出现相跃迁. 当 $\varepsilon=0.035$ 时，可以看到 $\phi_1-\phi_2$ 不再出现相跳跃(至少在计算的观察时间内)，说明两振子之间相位达到同步. 为考察两振子其他自由度的相干情况，图(b)画出了 $\varepsilon=0.035$ 时的 $A_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ 与 $A_2=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$ 的关系图，显然它们的演化是混沌的，相互之间几乎没有关联. 因此，相同步的发生意味着在混沌内部发生了动力学分岔.

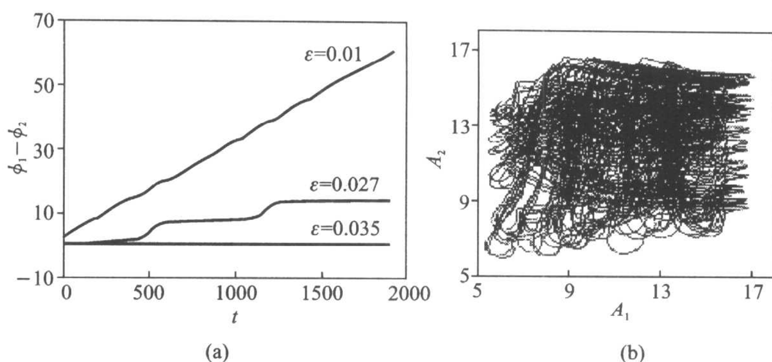



图 2－51 (a) 不同耦合强度下 $\phi_1(t)-\phi_2(t)$的演化；
(b) $\varepsilon=0.035$ 时的 $A_1$ 与 $A_2$ 的关系图

在图 2－52 中，我们画出了相应参数下 $\Delta\Omega=\Omega_1-\Omega_2$ 随 $\varepsilon$ 的变化情况（圆点线）. 可以看到随着 $\varepsilon$ 的增加，两个旋转数逐渐靠近. 当 $\varepsilon\approx0.0295$ 时，$\Delta\Omega=0$，$\Omega_1$ 与 $\Omega_2$ 两支融为一体，说明此时系统发生了相同步[205~221].

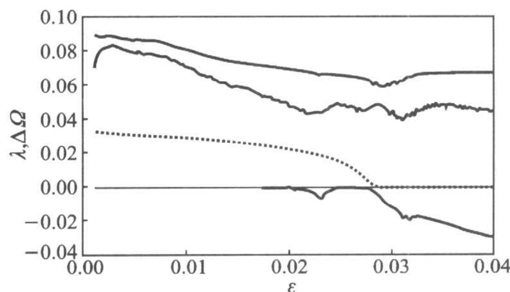



图 2－52 $\Delta\Omega=\Omega_1-\Omega_2$（圆点线）和李指数谱
（四条线）随 $\varepsilon$ 的变化情况

这种动力学分岔可以从系统的李指数谱反映出来. 如图 2－52 所示，我们给出耦合的前 4 个李指数. 当 $\varepsilon$ 很小时，系统的 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 为正，$\lambda_3$ 和 $\lambda_4$ 为零，说明混沌运动局限于一个超混沌的二维环面上. 当 $\varepsilon$ 接近相同步的阈值时，$\Delta\Omega\to0$ 意味着相同步，两个零李指数的简并被破坏，$\lambda_4$ 由零变为负，说明由于相同步的发生而使得混沌吸引子的维数降低. 这个现象与我们前面观察到的耦合极限环系统同步时的拓扑性质变化一致.

上面的相同步可以近似地计算. 利用 $A_i=\sqrt{x_i^2+y_i^2}$ 与 $\tan\varphi_i=y_i/x_i$，将耦合系统变换到极坐标系，可以得到：

$$\dot{A}_{1,2}=aA_{1,2}\sin^2\phi_{1,2}-z_{1,2}\cos\phi_{1,2}+\varepsilon(A_{2,1}\cos\phi_{2,1}\cos\phi_{1,2}-A_{1,2}\cos^2\phi_{1,2}),$$

$$\dot{\phi}_{1,2}=\omega_{1,2}+a\sin\phi_{1,2}\cos\phi_{1,2}+\frac{z_{1,2}}{A_{1,2}}\sin\phi_{1,2}-\varepsilon\left(\frac{A_{2,1}}{A_{1,2}}\cos\phi_{2,1}\sin\phi_{1,2}-\cos\phi_{1,2}\sin\phi_{1,2}\right)$$

$$\dot{z}_{1,2}=f-cz_{1,2}+A_{1,2}z_{1,2}\cos\phi_{1,2}. \qquad (2.6.19)$$

设 $A_i$ 的变化比 $\phi_i$ 慢得多，我们利用绝热消去法($\dot{A}_{1,2}=0$)，可以得到相位 $\phi$ 的方程.令 $\phi$ 方程中的$\frac{z_i}{A_i}\sin\phi_i$ 项为零($z$ 的变化是脉冲的，大部分时间 $z_i$ 很小，$z_i/A_i\to 0$)，并令 $\phi_i=\omega_0 t+\theta_i$，我们可得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\theta_1-\theta_2)=2\Delta-\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{A_2}{A_1}+\frac{A_1}{A_2}\right)\sin(\theta_1-\theta_2), \qquad (2.6.20)$$

这是过阻尼的单摆方程，当

$$\varepsilon>\varepsilon_c=\frac{4\Delta A_1A_2}{(A_1^2+A_2^2)}, \qquad (2.6.21)$$

上述方程有不动点解，耦合系统发生相同步.对应前面的参数，当 $\Delta=0.015$ 时，由于 $\Delta$ 很小，两振子的振幅几乎没有差别，可以认为 $A_1\approx A_2$，此时 $\varepsilon_c\approx 2\Delta=0.3$，与数值结果 0.029 5 非常接近.

二、大失配时的相同步与倍周期分岔

上面的研究表明在两振子参数失配很小时混沌系统的相同步行为与耦合极限环系统的同步非常相近.有些情况下，两个振子之间可能会有较大的参数失配，因此也有必要进行研究[213~216].

在图 2-53(a)、(b)中，我们给出了在不同参数失配下的同步分岔树.当 $\Delta$ 很小时，两振子的旋转数曲线平滑地靠近融合.随着 $\Delta$ 的增大，可以观察到其中一个振子的旋转数(较大的)仍以连续的方式改变.而另一个振子的旋转数则在某一耦合强度时突然有一个跳跃，以不连续的方式发生相同步.如果研究振子的振幅 $A_i=\sqrt{x_i^2+y_i^2}$ 时，就会发现相同步前后旋转数小的以小幅振荡，而旋转数大的振子则以大幅振荡.如果将轨道想像成粒子的轨迹时，就不难理解上面的突变.前者具有小的角动量，而后者具有大的角动量，因此小旋转数的振动更易被影响而发生不连续的变化.

如果观察系统的李指数就会发现，当 $\Delta$ 很大时，最大李指数不再总保持为正.$\Delta$ 越大，最大李指数沉降越厉害，当 $\Delta$ 大到一定程度时，就会出现一个有限的 $\varepsilon$ 区 $\lambda_{max}=0$ 甚至小于零.对于大的 $\varepsilon$，系统又会恢复到混沌状态，而且是以倍周期分岔的方式进行的.图 2-53(c)给出了当 $\Delta=0.1$ 时的动力学分岔图.系统在 $\varepsilon=0.152$ 时发生相同步，而后相同步一直保持，但系统运动状态变为周期运动，随着 $\varepsilon$ 增加，运动会出现一系列倍周期分岔.这种分岔是由耦合引起的，有很强

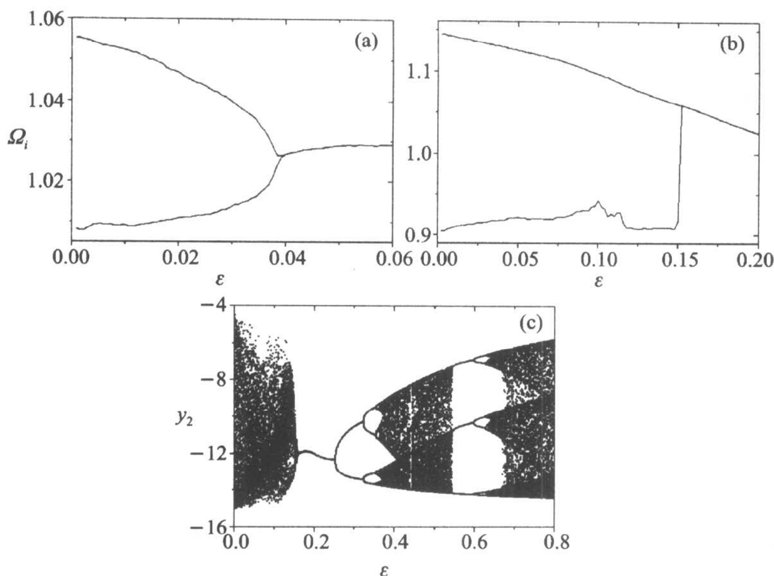



图 2－53 (a) Δ＝0.02、(b) Δ＝0.1 的同步分岔树；(c) 当 Δ＝0.1 时的动力学分岔

的非线性因素，解析上不易分析．另外当 Δ 更大时，系统首先达到相同步，而后迅速进入不动点状态($\lambda_{\max}<0$)，这就是我们在前面耦合周期振子系统中所看到的"振动死亡"现象．

三、耦合混沌系统的交替相同步

我们在前面的讨论中以 Rössler 振子为基本模型．它反映了许多与周期振子相似的同步行为．但在实际中尚有许多混沌系统无法有好的相位描述的．对于这类系统一个处理方法就是利用主模分解方法引入相位，但这在操作比较困难．这里我们选用耦合 Lorenz 系统，它既可用主模分解方法，也可用对称折叠引入相位方法来处理，我们采用后者．

我们所研究系统的运动方程为：

$$\begin{cases}\dot{x}_{1,2}=\sigma(y_{1,2}-x_{1,2})+\varepsilon(x_{2,1}-x_{1,2}),\\ \dot{y}_{1,2}=r_{1,2}x_{1,2}-y_{1,2}-x_{1,2}z_{1,2},\\ \dot{z}_{1,2}=-bz_{1,2}+x_{1,2}y_{1,2},\end{cases}\tag{2.6.22}$$

这里 $\sigma=10$，$b=8/3$，$r_{1,2}=r_0\pm\Delta$，$r_0=37.5$，$\Delta=2.5$．在图 2－54(a)中，我们计算了两个振子的旋转数 $\Omega_{1,2}$ 随 $\varepsilon$ 的变化关系．与 Rössler 振子锁相过程非常不同，一方面 $\Omega_{1,2}$ 曲线本身随 $\varepsilon$ 有复杂的变化，先下降再上升，更重要的是二者的同步方式与 Rössler 振子非常不同．在临界点 $\varepsilon_c$，

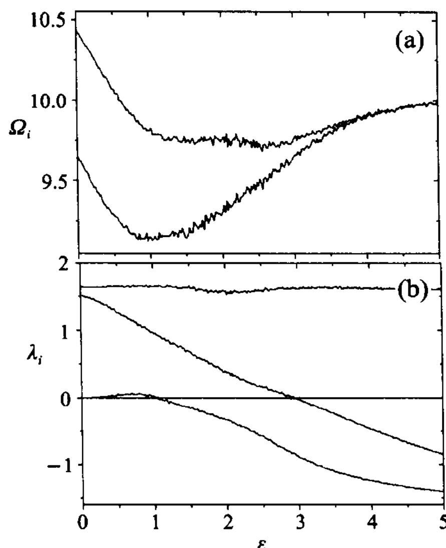



图 2-54 (a) Lorenz 振子的旋转数 $\Omega_{1,2}$ 随 ε 的变化；(b) 李指数谱的变化

$$|\Omega_i - \Omega_c| \propto (\varepsilon_c - \varepsilon)^{\beta}, \tag{2.6.23}$$

对 Rössler 振子系统来说 $\beta \approx 1/2$，但对 Lorenz 系统 $\beta > 1$. 二者的不同还不仅于此，李指数谱的变化也完全不同，如图 2-54(b)所示. 对 Lorenz 系统而言，我们没有看到同步点零指数变负的现象，几个李指数突变的地方在同步分岔树上完全没有对应. 这些都说明对于一般耦合混沌系统而言，相同步并非都同 Rössler 振子那样简单.

在图 2-55(a)中，我们画出了 $\varepsilon = 0.2$ 时相位差的演化. 可以看到除了许多平台之外，尚有一些较缓的相位跳跃. 我们仔细观察这些跳跃过程. 定义 $m:n$ 相差：

$$\phi_{m:n}(t) = [n\phi_1(t) - m\phi_2(t)]/\max\{m, n\}, \tag{2.6.24}$$

$m, n$ 为正整数，显然 $m = n = 1$ 对应于 1:1 情况，即图(a)中的一系列平台. 在跳跃过程，我们可以调整 $m, n$ 以观察 $\phi_{m:n}(t)$. 当它在一段时间内对选定的 $m, n$ 是一个平台，则说明在这段时间内系统处于 $m:n$ 的锁相片段. 在图(b)-(e)中，我们画出了在图(a)中的不同跳跃阶段的 $m:n$ 的锁相过程，我们可以看到诸如 10:9，50:43，25:22，5:4 等不同锁相片段，这些我们都标于图上. 可以看到两个振子在未完全相同步之前是处于交替相同步阶段，这在前面的周期驱动情况非常一致，理论上也可以用不稳定周期轨道理论来解释. 每一个周期轨道可

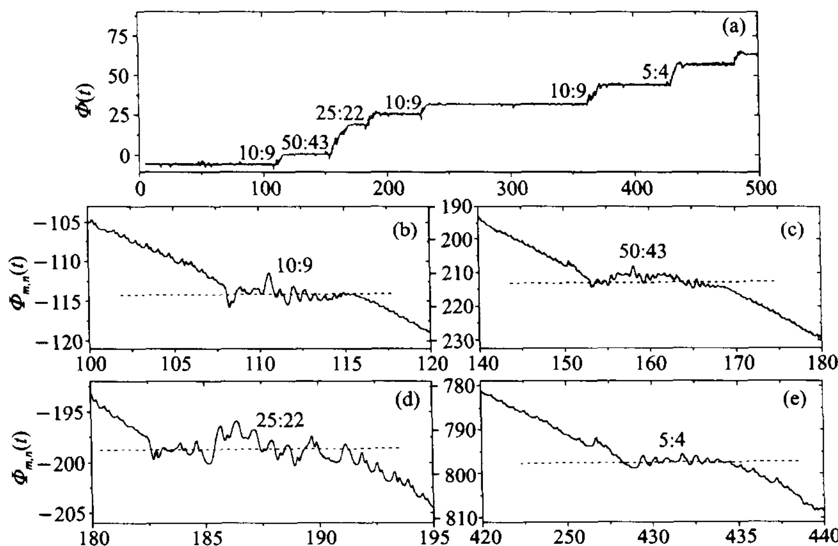



图 2-55　(a) $\varepsilon=0.2$ 时相位差的演化;(b)-(e) 图(a)中不同跳跃阶段的 $m:n$ 锁相

看作一个极限环,我们就可以考察两个极限环的同步过程.这里不再详述[216,217].

在图 2-56 中,我们计算了一段时间(通常很长)$T$ 内 $m:n$ 片段的个数.由于 $m\neq n$ 的片段统计上比较困难,我们只画出出现较多的 10:9 片段.可以看到在 $\varepsilon\approx\varepsilon_c'$时,系统会出现交替相同步,随着 $\varepsilon$ 增加,1:1 与 $m:n(m\neq n)$片段数目都在增加,当 $\varepsilon\approx\varepsilon_c^2$时达到最高峰,然后片段个数都下降.1:1 片段逐渐融合(因而个数下降,但平均长度增加),10:9 片段个数迅速减少,在 $\varepsilon\approx\varepsilon_c^{LE}$ 时几乎消

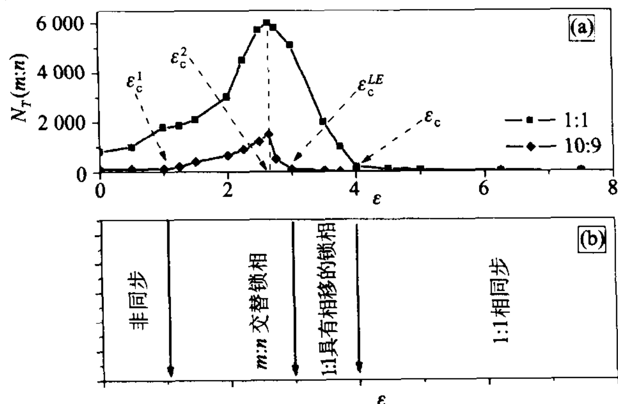



图 2-56　很长一段时间内 $m:n$ 片段的个数统计;(b) 同步相图

失.1∶1 片段在 $\varepsilon \approx \varepsilon_c$ 时全部融合成一个(无相位跳跃),系统进入完全的 1∶1 相同步.很有意思的是上面的几个临界点在李指数谱上有对应,如 $\varepsilon_c$ 对应于一个李指数变负,$\varepsilon_c^{LE}$ 对应于另一个李指数变负.对应于图(a),我们画出了一张系统的相图,如图(b)所示.

### 2.6.4 耦合混沌振子链的相同步

一、多个振子的同步分岔树

当系统由多个振子构成时,考察它们相位之间的关系是很有意义的课题.同步分岔树此时自然作为一个重要的观察工具反映出随着耦合强度变化系统的内部分岔.另外,由前面 $N=2$ 的讨论可以看到,相同步意味着耦合系统相空间维数的减少,因此从相同步的角度来考察混沌的内部变化是有理论意义的.

我们仍以耦合 Rössler 系统为例:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = -\omega_i y_i - z_i + \varepsilon(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}), \\ \dot{y}_i = \omega_i x_i + a y_i, \\ \dot{z}_i = f + z_i(x_i - c). \end{cases} \tag{2.6.25}$$

这里 $a=0.165, f=0.2, c=10, i=1,2,\cdots,N, \omega_i=\omega_0+\Delta_i, \Delta_i$ 为参数失配,$\Delta_i \in [-\Delta, \Delta]$,$\varepsilon$ 为耦合强度,上面为最近邻耦合.后面部分结果我们还会讨论 $y$ 耦合的,但是基本结果几乎没有影响.

在图 2-57(a)中,我们画出 $N=3$ 个 Rössler 振子的 $\Omega_i-\varepsilon$ 图(同步分岔

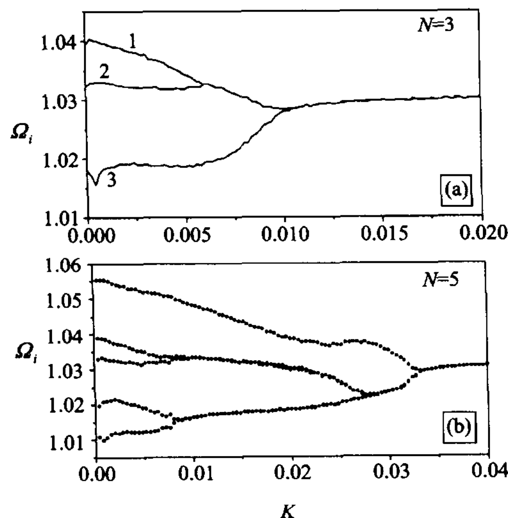



图 2-57 3 个和 5 个 Rössler 振子的同步分岔树

树)，$\omega_0=1.0$，$\Delta_3=-0.012$，$\Delta_2=0$，$\Delta_1=0.006$. 可以看到当 $\epsilon$ 很小时，各 $\Omega_i$ 都不相等. 随着 $\epsilon$ 的增大，相互之间比较接近的 1 和 2 振子发生相同步. 然后这个集团再与第二个振子相同步. 这一图像与周期振子的同步分岔是非常相似. 对于图 2-57(b)中 $N=5$ 的情况我们也可看到通过集团化到达整体相同步的道路. 所有这些同步分岔都非常清晰，反映了振子之间通过耦合有序的自我组织.

对更多的 $N$，当 $\Delta_i$ 以随机方式给定时，其分岔树则要复杂得多. 它同样反映出振子之间的固有频率差距与空间二者之间的竞争. 我们在耦合周期振子系统中也看到类似的图像. 我们还可以观察到非局域相同步，这个问题我们将在后面进一步讨论.

二、从高维超混沌到低维超混沌

我们还需要进一步考察耦合系统在相同步过程中的动力学变化. 在图 2-58 中我们画出了 $N=3$ 和 5 个振子(与前面参数相同)的头 $2N$ 个李指数随 $\epsilon$ 的变化情况. 可以看到 $N$ 个李指数在相同步过程中始终保持为正，而小 $\epsilon$ 时(无相同步)另 $N$ 个李指数均为零. 若动力学系统的李指数谱中有超过一个大于零. 我们将其称为超混沌运动，它比一般的混沌(一个正李指数)运动要更为混乱. 因此耦合系统与相同步的过程中始终保持为超混沌运动，相同步分岔的动力学转变在零李指数上. 对应于每一次相同步分岔，零李指数中都有一个变负，零指数的简并度下降. 零指数个数越多，说明运动在维数越高的超混沌环面上进行. 如果我们把分岔过程反过来看(耦合强度逐渐降低，在时空系统中等效于增加系统尺寸)，则可以看到从低维超混沌向高维超混沌的转变. 而这种动力学转变的机制则是系统的各级去同步，从而使吸引子维数不断增加. 这一机制可用来探讨时空

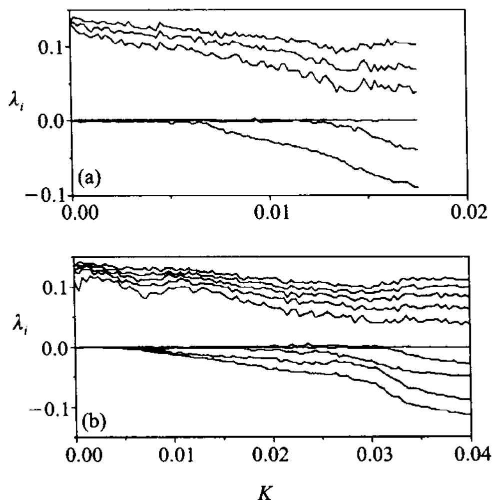



图 2-58　$N=3$ 和 5 个振子的头 $2N$ 个李指数随 $\epsilon$ 的变化

系统从低维混沌向高维混沌的转变[218].

当耦合系统的振子个数比较多时,如果它们的固有频率相差不大,则上面的由高维超混沌向低维超混沌的变化仍可以反映出来.在图 2-59(a)中我们画出了 20 个振子($y$ 耦合)自然频率以 $\omega_j=\omega_1+\delta(j-1)$方式分布的旋转数在不同耦合强度下的情况.$\delta=2\times10^{-4}$,$\omega_1=1.0$,$\varepsilon=0.003$ 和 0.006 时系统在耦合链两头出现同步集团,集团不断增大,在 $\varepsilon=0.009$ 时形成一个整体的同步集团.图 2-59(b)给出了相应参数下李指数谱(前 40 个)的分布情况.正李指数的个数在系统形成整体相同步时仍可保持为 $N$ 个.另外 $N$ 个简并的李指数随着 $\varepsilon$ 的增加不断沉降,一直到整体同步时 $N-1$ 个零指数变为负.

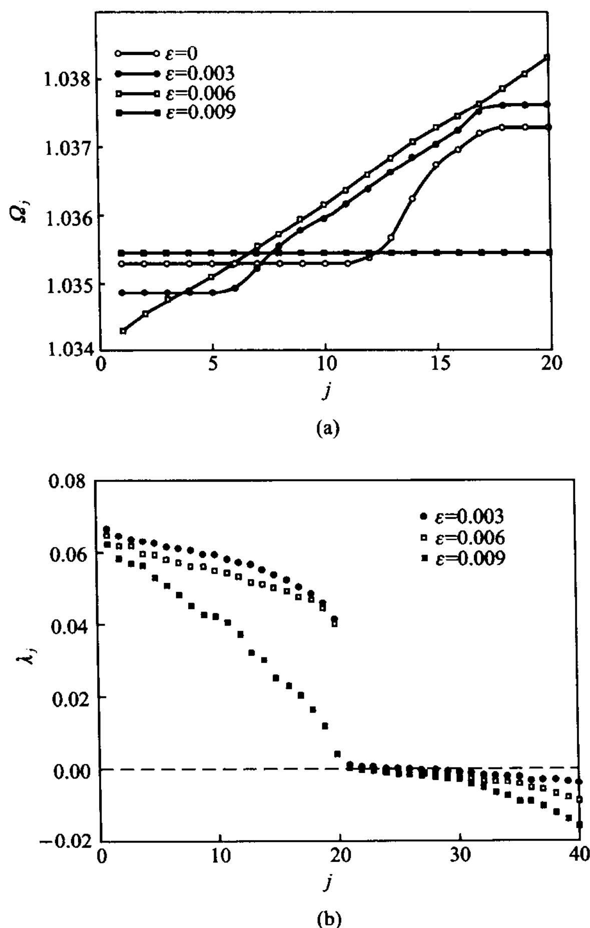



图 2-59 (a) 20 个振子($y$ 耦合)的旋转数在不同耦合强度下的情况;(b) 李指数谱的分布

三、大频率失配下的混沌抑制

振子之间的参数失配较大时,混沌会受到抑制.这在前面 $N=2$ 的情况可以看到.对于大 $N$ 的情况,当 $\varepsilon$ 增加时,系统的正李指数数目会逐渐减少.我们仍考虑自然频率 $\omega_j=\omega_1+\delta(j-1)$ 的情况,但 $\delta$ 较大.这时系统的相同步集团化与小 $\delta$ 不同,不是只在两端形成两个同步集团,而是分成许多个小的同步集团. $\Omega_j$ 的分布图也成为阶梯状,阶梯之间的变化是不连续的(注意小 $\delta$ 时的 $\Omega_j$ 曲线是比较平滑的).

在图 2-60(a)中,我们给出了系统时空演化行为.在所有图中最小值由白色区域给出,黑色表示最大值.各图中左边是 $\sin\phi_j=y_j/A_j$ 的演化,中间的给出了相差 $S_j=\sin^2[(\phi_j-\phi_{j+1})/2]$ 的演化.右边的则是振幅 $A_j$ 的演化.在图中我们可以看到一些白色的点($A_j$ 演化)或黑色的点($S_j$ 的演化)规则地出现在格点的一些位置上.这些都是缺陷振子,它们处于两个同步集团的边界处.因此各集团之间的边界是不平滑的.两个同步集团的频率差等于缺陷点出现的频率.当改变 $\varepsilon$ 出现同步集团的改变时,处于边缘的缺陷的演化就不是周期的而是混沌的.

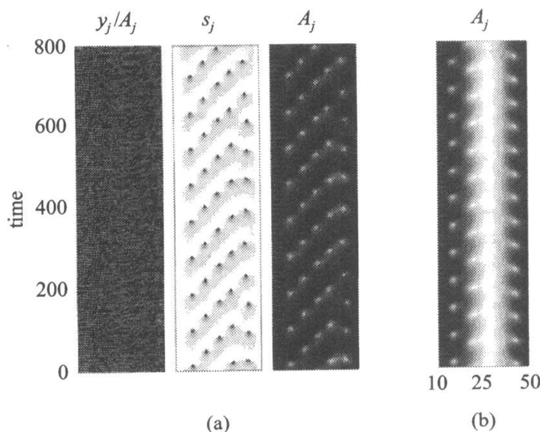



图 2-60 (a) 相同步的系统时空演化行为;(b) 振动抑制现象

当参数失配更大时,振子系统会出现振动死亡的现象.这种现象在大数目振子系统中表现为部分振子的振动振幅很小(有的 $A_j\to0$,但有的不为零).在图 2-60(b)中给出了线性分布 $\omega_j$ 的 $\delta=1.5\times10^{-2}$, $\omega_1=1.0$ 时 $N=50$ 个振子在 $\varepsilon=0.75$ 时的时空动力学.可以看到振动抑制的现象.这种现象的机制是耦合 $\varepsilon$ 带来的额外阻尼,从而使一些振子的耗散增加的结果[219].

四、非局域相同步

我们研究的耦合振子系统在很多情况下考虑最近耦合方式.在研究耦合周

期振子同步时我们曾看到不相邻振子之间的锁相行为.那么,这种非局域的同步是否具有普遍性呢?其背后的机制是什么呢?下面我们讨论耦合混沌振子系统的非局域相同步现象就是这种类型[220].我们将会看到,空间位置比较邻近的振子并不形成相同步,相反空间位置比较远,参数比较相近的振子反倒可以形成相同步.

我们先构造下面的耦合系统,它由两个不同自然频率的 Rössler 振子构成,其中第二个振子受到一个周期外力的驱动:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -\omega_1 y_1 - z_1 + \varepsilon(x_2 - x_1), \dot{y}_1 = \omega_1 x_1 + 0.15 y_1, \dot{z}_1 = 0.2 + z_1(x_1 - 10), \\ \dot{x}_2 = -\omega_2 y_2 - z_2 + \varepsilon(x_1 - x_2), \dot{y}_2 = \omega_2 x_2 + 0.15 y_2 + A\sin \Lambda t, \dot{z}_2 = 0.2 + z_2(x_2 - 10).\end{cases} \tag{2.6.26}$$

我们想考察是否有这样的情况:振子二在周期力驱动下不会形成锁相,而第一个振子不直接受到周期力作用却会发生相同步.

在图 2-61 中我们画出了 $\omega_1 = 1.0, \omega_2 = 0.65, A = 1.0, \varepsilon = 0.1$ 时 $\Omega_{1,2}/\Lambda$ 与 $\Lambda$ 的变化关系.我们很清楚地看到第一个振子被外来驱动同步(曲线的平台

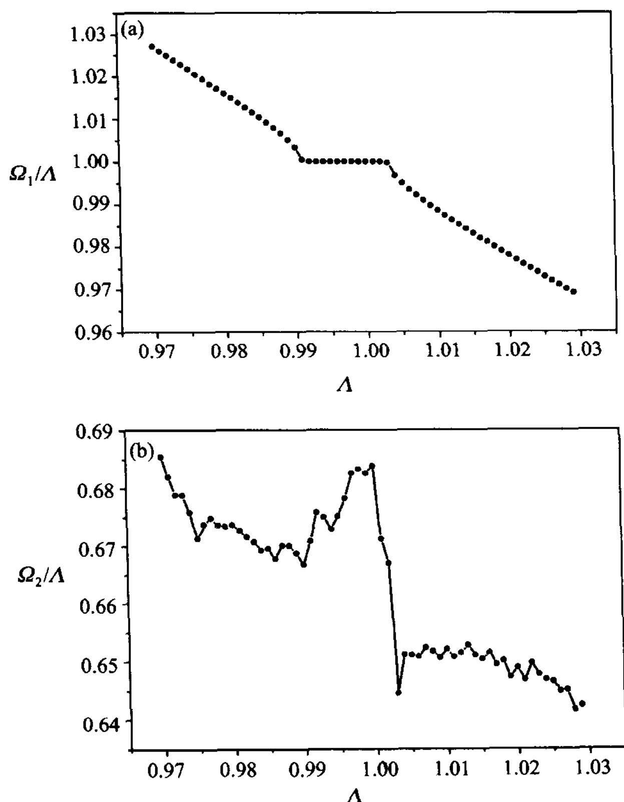



图 2-61 $\Omega_{1,2}/\Lambda$ 与 $\Lambda$ 的变化关系

部分),虽然外力并没有直接作用.与此形成对照的是,直接被作用的第二个振子却没有与外力形成相同步.

为考察这种非局域相同步的动力学根源,我们可以对各振子的信号进行频谱分析.图2-62中给出了这样的频谱图.图(a)是处于非局域相同步状态下($\Lambda=1.0$)$x_1(t)$的功率谱.可以看到它在$\Lambda=2\pi f$处有一尖峰,说明第一个振子被外力同步.图中的$f_1$为无外力驱动时的峰,说明两振子的耦合在非局域相同步中起了重要作用.图(b)中的$x_2(t)$功率谱也有一个峰,但其位置远离$f=\Lambda/2\pi$,说明外力与它并未形成同步.但在$f$处有一个小的尖峰.正是这一小的频率成分对非局域相同步起到了信号传递的作用,它通过振子间耦合传递给第一个振子,从而实现了非局域相同步.这一机制对多个振子的非局域相同步也是有效的.考虑由方程(2.6.26)描述的$N$个 Rössler 系统.在图2-63中我们给出了$N=5$个振子的同步分岔树.可以看到在$\varepsilon\in(0.04,0.05)$之间时,非局域相同步发生在集团(2.3)与5之间.我们在图2-64中分别给出不同耦合强度下($\varepsilon=0.01$, 0.03,0.045,0.1)五个振子的频谱,其中$\varepsilon=0.045$对应于(2,3)与5的非局域相同步.从图中我们发现,当$\varepsilon$很小时,振子的峰位置均不同,说明没有同步;随着$\varepsilon$的增加,一些具有相近自然频率、位置近邻的振子开始出现相同步,且形成集团(最高峰位于相同位置).在图(c)中可以发现振子2,3和5的最高峰位相同,说明非局域相同步形成.在图(c)中还可以看到处于非相同步状态的振子(如

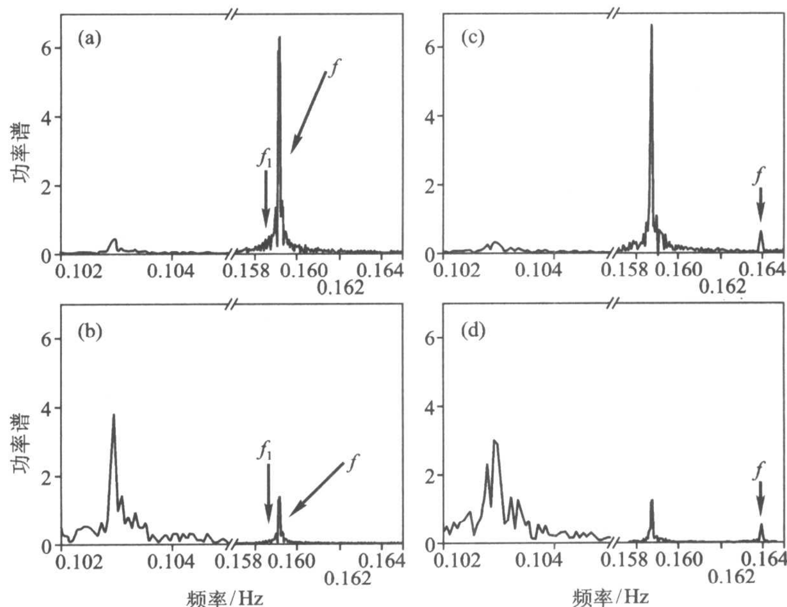



图2-62 非局域相同步状态下的功率谱

振子 1),虽然其主峰与(2,3,5)主峰不同,但在(2,3,5)主峰位置仍可看到一个小的次峰.正是这一小的同步频率部分对非局域相同步的形成起着至关重要的作用,通过振子 1 的信号传递作用使得非局域同步得以实现.

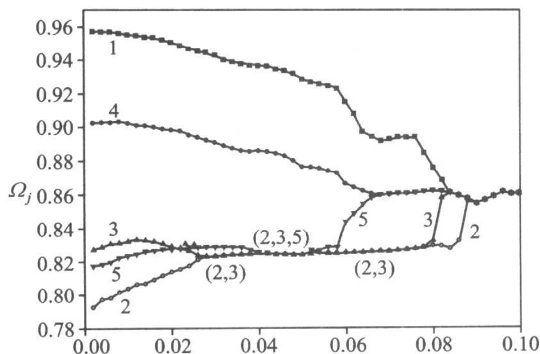



图 2-63 $N=5$ 个振子的同步分岔树

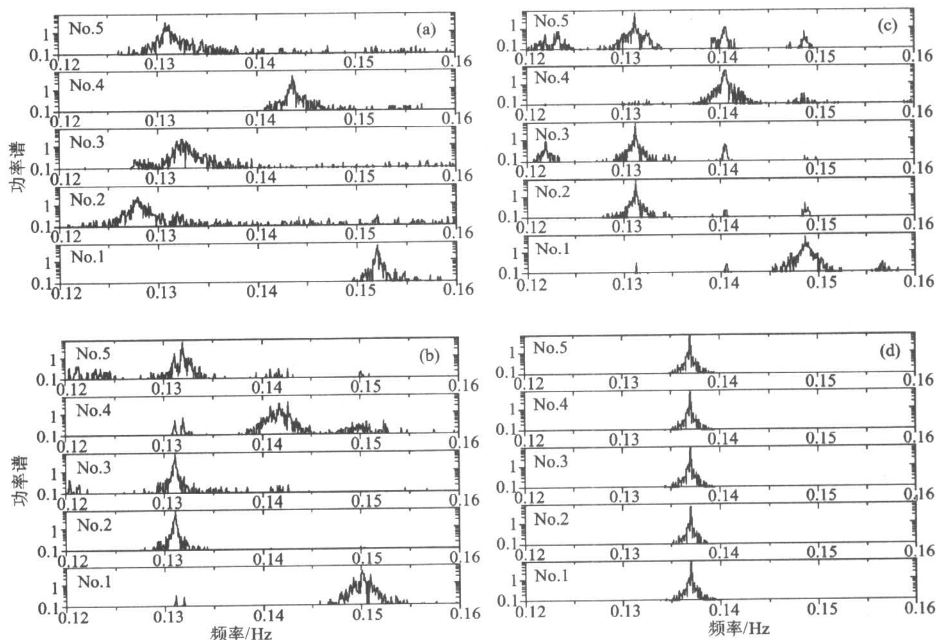



图 2-64 不同耦合强度下五个振子的频谱

对于大的 $\varepsilon$,所有振子的主峰位置相同,因而系统达到整体相同步.更大尺寸的耦合系统中也同样可以看到非局域相同步现象,而且出现的机会更为频繁.

五、相同步的加强效应

耦合系统的同步化在实际应用中有重要意义.同步化在耦合激光器件、输运过程中可以大大提高系统的输运效率.因此,如何将同步进行优化是值得探讨的问题.从前面的相同步讨论可以看出,相位是混沌运动中相对容易驾驭的自由度.下面我们通过讨论揭示相同步可以通过对系统加上一个非对称耦合而大大加强(总的耦合大小不改变)[221].这个加强效应的机制是非对称耦合导致的"同步波"以及非局域相同步.

我们先考察下面的非对称耦合的 Rössler 振子系统:

$$\begin{cases}\dot{x}_i = -\omega_i x_i - z_i + (k+\delta)(x_{i+1} - x_i) - (k-\delta)(x_i - x_{i-1}),\\ \dot{y}_i = \omega_i x_i + a y_i,\ \dot{z} = f + z_i(x_i - c),\ i = 1,2,\cdots,N,\end{cases} \tag{2.6.27}$$

其中 $a=0.165$, $f=0.2$, $c=10$, $k$, $\delta$ 分别为扩散与梯度耦合强度. $\omega_i = 1.0 + \Delta_i$, $\Delta_i$ 是在 $-\Delta$ 与 $\Delta$ 之间分布的随机数,当 $\delta=0$ 时,系统就是我们前面讨论的最近邻耦合链.其相同步我们已作了分析,当 $k$ 很大时,系统就可以达到整体对称相同步.当 $N$ 很大时,通常需要 $k$ 很大才会保证系统整体同步,那么我们是否可以在 $k$ 不大时通过其他方式使系统达到整体同步呢?

我们考虑 $\delta\neq 0$ 的情况.在图 2-65 中我们计算了 $N=100$ 个振子系统在 $\Delta=0.1$, $k=0.6$ 时改变 $\delta$ 的旋转数 $\Omega_i$ 的分布.当 $\delta=0$ 时,由图(a)可以看到系统有许多小的同步集团,但它们彼此不同,说明系统远没有达到整体同步.在图(c)

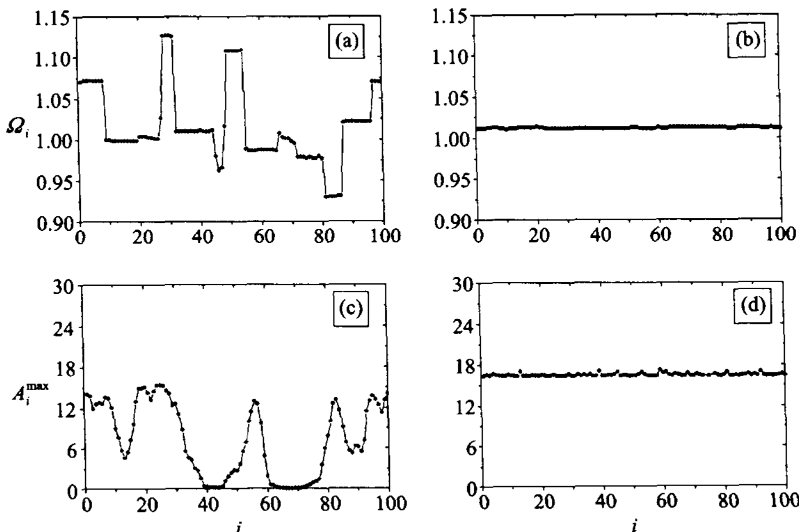



图 2-65 $N=100$ 个振子系统改变 $\delta$ 时 $\Omega_i$ 和最大振幅 $A_i^{max}$ 的分布

中我们画出了振子的最大振幅 $A_i^{\max} = \max\left[\sqrt{x_i^2 + y_i^2}\right]$的分布,可以看到振子的振幅非常不均匀,有的很大,有的几乎为零,此即前面看到的振荡抑制现象.当我们加上一个非对称的梯度耦合,$\delta \neq 0$,系统的同步行为有很大变化.图(b)给出的是 $\delta = 0.3$ 时的 $\Omega_i$ 分布,可以看到旋转数分布已成为一个平台,所有振子已达到整体相同步.当我们观察 $A_i^{\max}$ 的分布时,我们惊讶地发现此时所有振子的振荡幅度已经几乎相同.通过非对称耦合,我们不仅实现了系统的整体相同步化,还消除了振荡抑制的现象.

为更好地观察这种同步加强效应,我们可以引入旋转数差:

$$\Delta\Omega = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\Omega_i - \bar{\Omega})^2}\,, \tag{2.6.28}$$

这里 $\bar{\Omega}$ 为所有振子旋转数的平均,$\bar{\Omega} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Omega_i$,在图 2-66 中我们分别给出了 $\Delta = 0.3$ 和 0.5(比上面的自然频差异更大)时在不同扩散耦合 $k$ 下 $\Delta\Omega$ 随 $\delta$ 的变化曲线.$\Delta\Omega$ 在某一 $\delta$ 会突然下降到零,表明改变 $\delta$ 可以实现系统的整体相同步化.

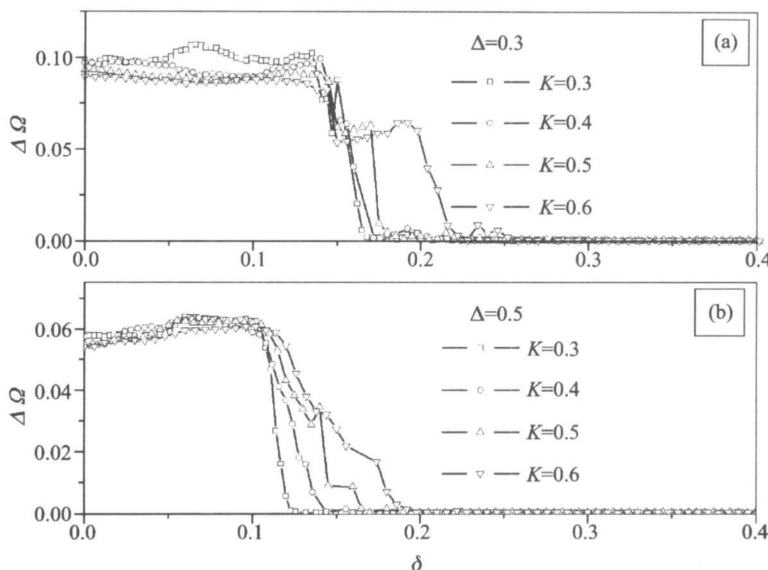



图 2-66 $\Delta = 0.3$ 和 0.5 时不同扩散耦合下 $\Delta\Omega$ 随 $\delta$ 的变化曲线

为揭示这种转变的机制,我们考虑上面的 Rössler 系统.不同的是,首先,所有振子的 $\omega_i = \omega$ 都相同;其次,我们对第一个振子的 $x$ 变量施加一个周期驱动:

$$\dot{x}_1 = -\omega x_1 - z_1 + (k+\delta)(x_2 - x_1) - k[x_1 - 10\sin(\omega_0 t)], \tag{2.6.29}$$

这里 $\omega=1.2,\omega_0=1.0,k=0.9$. 在图2-67(a)中，我们给出了 $N=50$ 时 $\Omega_i$ 在不同 $\delta$ 的分布. 当 $\delta=0$ 时，可看到只有与周期驱动邻近的格点会与其同步，此时我们认为简谐波是局域的，它只能传播有限距离. 当 $\delta\neq0$ 时，我们可以观察到越来越多的振子被周期力同步，这反映出简谐波的非局域化. 在 $\delta_c\approx0.55$ 时，所有振子都被简谐波同步，此时"同步波"可在整个链上传播. 在图(b)中，我们给出每个振子的 $\omega_0$ 频率成分的强度：

$$P_i(\omega_0)=\left|\int_{-\infty}^{\infty}x_i(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}\mathrm{d}t\right|,\tag{2.6.30}$$

可以看到当 $\delta=0$ 时，对于 $i>4$，$P_i(\omega_0)/P_1(\omega_0)\to0$，增加了 $\delta$，$P_i(\omega_0)/P_1(\omega_0)\neq0$的格点也不断增加；在 $\delta_c\approx0.55$ 时同步波可传遍整个系统.

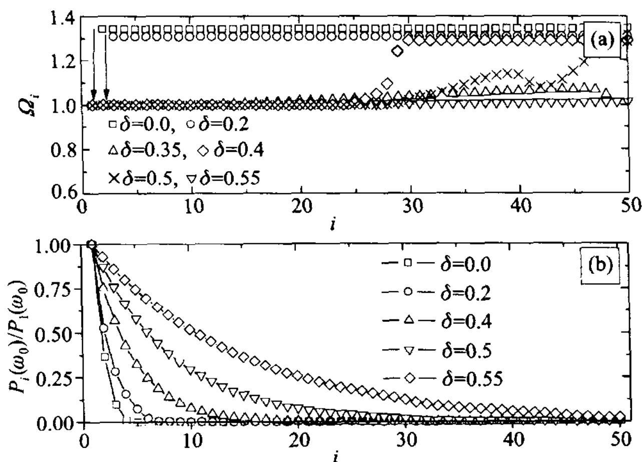



图2-67　(a) $N=50$ 时 $\Omega_i$ 在不同 $\delta$ 的分布；(b) 振子的 $\omega_0$ 频率成分的强度分布

上面的机制虽然是对于周期驱动讨论的，它对于混沌驱动也适用. 因此可以说，我们所看到的相同步加强行为是同步波非局域化转变的结果. 这一同步波会引起格点中频率相近的振子形成同步集团，这些振子在空间上可以不相邻，这就造成了前面所讨论的非局域相同步. 这些小集团反过来又会影响附近振子，从而形成更大集团. 这种机制不依赖于具体系统. 在图2-68中，我们给出 $N=100$ 个 $x$ 耦合的 Lorenz 振子的 $\Omega_i$ 分布，其方程为：

$$\begin{cases}\dot{x}_i=\sigma(y_i-x_i)+(k+\delta)(x_{i+1}-x_i)-(k-\delta)(x_i-x_{i-1}),\\ \dot{y}_i=r_ix_i-y_i-x_iz_i,\dot{z}_i=-bz_i+x_iy_i,\end{cases}\tag{2.6.31}$$

参数 $\sigma=10,b=8/3,r_i=40+\Delta_i,\Delta_i\in[-10,10],k=50$，可以看到 $\delta=0$ 时 $\Omega_i$ 分布几乎没有同步集团. 当加上 $\delta$ 时，系统会逐渐形成三大集团(见图(b),(c))；

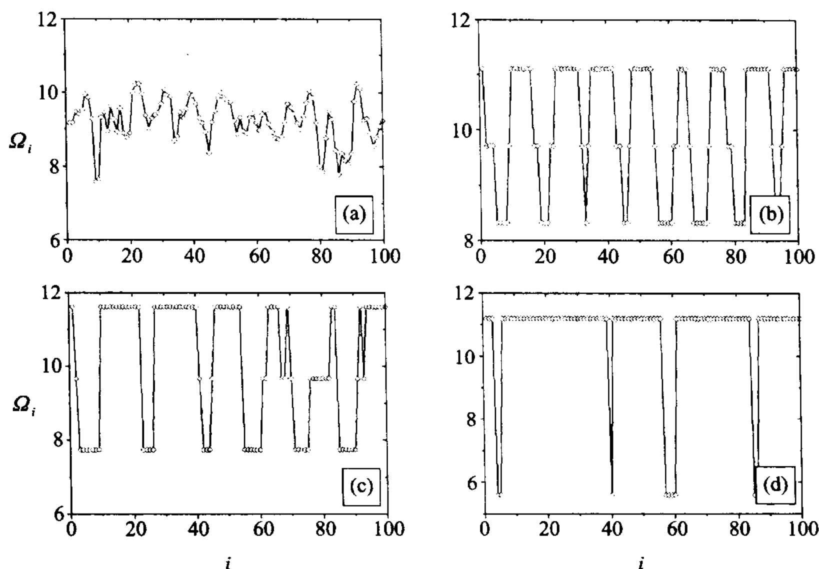



图 2-68 $N=100$ 个 $x$ 耦合的 Lorenz 振子的 $\Omega_i$ 分布

当 $\delta=k$ 时,系统只有一个很大的集团和一个小的同步集团,这也说明非对称耦合可以加强相同步.由此可见,这一机制有其普遍性.

六、耦合相同混沌振子的相位有序现象

对振子相同步的讨论大多集中于不同振子的情况.人们一个直觉是耦合的相同振子的相位动力学应该非常简单,因为振子的振动频率已经相同.另一个人们通常的印象是小耦合通常只会导致小的系统的时空行为,特别是振子都是混沌的情况.只有耦合较大时才会对系统动力学构成大的影响.很多情况下这种观念是对的,但并不尽然,混沌系统内部存在无数的周期轨道,它们都不稳定,但相互作用会使得系统的轨道之间发生共振,这个小的共振可能使得周期轨道稳定化,从而可能观察到系统的有序现象[222~227].下面的一个现象是 2001 年占萌等人发现的[228],他们通过对耦合的 Rössler 系统的研究发现一种广义扩展相(generalized splay state,GSS):在很小的耦合强度下,所有振子的运动都在相同的周期轨道上,但振子之间有不同的相位.这种在弱耦合下出现的有序现象来源于系统内部的共振.

研究的系统是近邻耦合的相同 Rössler 振子:

$$\begin{cases}\dot{x}_j=-\omega y_j-z_j+\varepsilon(x_{j+1}-2x_j+x_{j-1}),\\ \dot{y}_j=\omega x_j+0.165y_j,\\ \dot{z}_j=0.2+z_j(x_j-10),j=1,2,\cdots,N,\end{cases} \tag{2.6.32}$$

数值模拟中 $\omega$ 取 0.99，单个 Rössler 系统的运动是混沌的. 在图 2-69 中我们给出了 $x-y$ 平面上 $N=2$ 和 20 个振子在 $\varepsilon=3\times10^{-4}$（$\ll\varepsilon_c$，$\varepsilon_c$ 为系统发生完全同

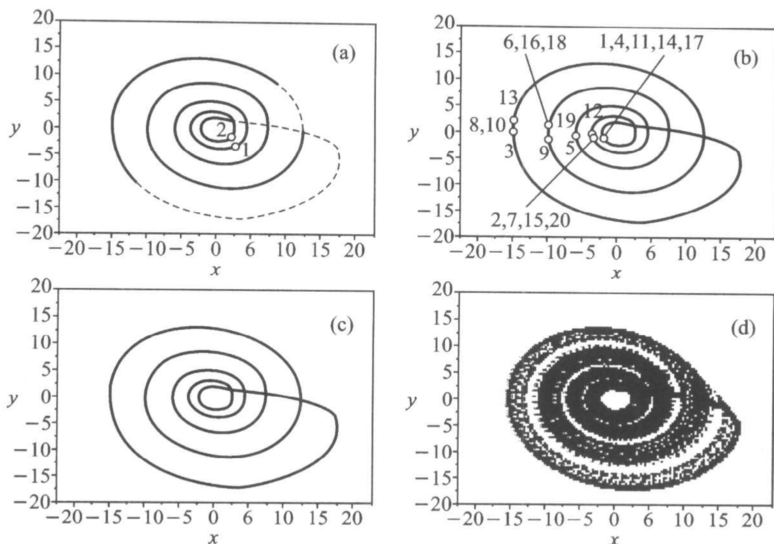



图 2-69 小耦合下 $x-y$ 平面上 2 和 20 个振子在任一时刻的位置图

步的阈值）时振子在任一时刻的位置图. 为方便观察，在图(c)中我们现出 $\omega=0.99$ 时单个振子的周期与轨道（注意，$\varepsilon=0$ 时这个轨道是不稳定的！），它在 $\varepsilon=0$ 时镶嵌于图(d)的混沌吸引子中. 当我们用前面相位的定义 $\phi_j=\arctan(y_j/x_j)$ 时，会发现这些振子大约处于相同的相位，似乎不奇怪. 但如果我们仔细观察这些振子的分布时，会惊奇地发现，它们均处于周期 5 轨道上（不管 $N=2$ 或 20），但处于不同位置上，因此相互之间有一个时间延迟，$N$ 较大时若干振子会形成一个集团，这种状态被称为广义扩展态. 在小 $\varepsilon$ 的一个范围内我们都会看到这种有序行为.

这种扩展态说明在弱相互作用下，耦合虽然不会改变单个振子的吸引子结构，但却会改变其稳定性，使得原先不稳定的观察不到的东西可以看到了. 由于耦合非常弱，能出现这样的有序结构的机制只有通过共振来实现. 为了证实这一点，并且更深入理解这种结构，下面计算受驱动单个振子：

$$\begin{cases}\dot{x}_i=-\omega y_i-z_i+\varepsilon[\Phi(t-\tau_{i-1})+\Phi(t-\tau_{i+1})-2x_i],\\ \dot{y}_i=\omega x_i+0.165y_i,\\ \dot{z}_i=0.2+z_i(x_i-10),\end{cases}\tag{2.6.33}$$

$\Phi(t)$为图 2－69(c)的周期 5 信号.在图 2－70(a)中,我们画出了 $\Delta_i=\tau_i-\tau_{i-1}$ 与 $\theta_i=\tau_{i+1}-\tau_{i-1}$ 在 $\varepsilon=3\times10^{-4}$ 的关系图.可以看到对一个固定 $\theta_i$,$\tau_i$ 有多重响应分支.我们再把 $N=2$ 与 20 的振子相位分布情况画在分支图上,可以看到它们都分布在图中画出的线性的交点上.这些线是共振线:$\Delta_i,\theta_i=\frac{nT}{5}$,$n=1,2,\cdots,5$,其中 $T$ 是周期 5 轨道的周期($T\approx30.98$).这使得我们对扩展态的有序结构有进一步的理解:它的确是系统共振的结果.至于系统为什么选择了周期 5 轨道,可以从单个 Rössler 系统的回归统计看出来,如图 2－70(b)所示.$P(T)$在 $T\approx30.98$ 时有最高峰,这个峰的位置恰好是周期 5 轨道的周期.这说明,对 Rössler 振子来说,运动最有可能在周期 5 轨道附近进行,因而会以其发生共振效应.一般情况 $P(T)\propto e^{-\lambda_m(T)T}$,$\lambda_m(T)$ 为周期为 $T$ 的不稳定周期轨道对应的最大李指数.

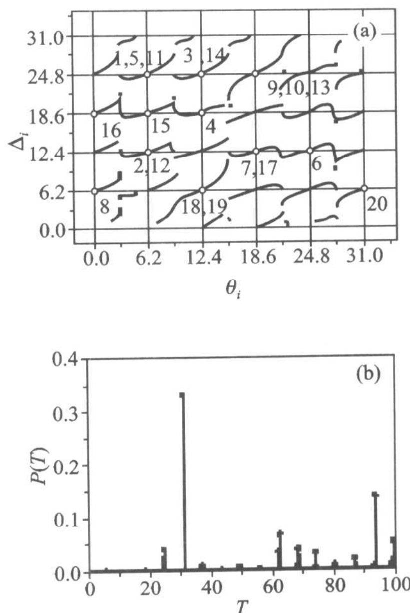



图 2－70 (a) $\Delta_i$ 与 $\theta_i$ 在小 $\varepsilon$ 的关系图;(b) 单个 Rössler 系统的回归统计

值得指出的是,这种广义扩展相位态在其他耦合系统如 Chau's 电路,Lorenz 振子,Hindmarsh-Rose 神经元模型中都可以看到,因此在弱耦合下,通过共振出现有序结构有其普遍性.胡岗、张英等研究了类似的模型,发现了更复杂的结构,以及从完全同步态到部分同步混沌态、周期态、准周期态等各种分岔[229~231].限于篇幅在此不一一介绍,有兴趣的读者可参考后面的文献.

### 2.6.5 相同步与广义同步的关系

对耦合混沌系统来说,其同步行为由于系统动力学的复杂性而有不同程度的表现.迄今为止,我们已观察到诸如完全同步(精确同步)、广义同步、相同步等不同形式的同步.这些同步由于是在不同系统中发现,它们之间的关系(后面会提到)就是非常重要的问题.通常,完全同步被认为是最强的一种,它要求振子之间的轨道演化在长时间后完全相同.广义同步为稍弱的一种,它是针对不同振子而言的.因为振子不同,自然无法要求轨道完全相同,但可以要求两轨道演化之间形成某种泛函关系.从这个意义上讲,完全同步是广义同步的特殊形式.相同步是指两振子之间的相位之间锁定,但其振幅可以无关联.通常认为广义同步为

稍强的同步，相同步稍弱[232]. 但下面我们会看到，二者之间的强弱关系是依赖具体情况的，有时系统会先达到相同步而未达到广义同步[187,233,234].

我们考虑下面的驱动－响应 Rössler 系统：

$$\begin{cases}\dot{x}_d = -\omega_d y_d - z_d, \dot{y}_d = \omega_d x_d + 0.15 y_d, \dot{z}_d = 0.2 + z_d(x_d - 10),\\ \dot{x}_r = -\omega_r y_r - z_r + \varepsilon(x_d - x_r), \dot{y}_r = \omega_r x_r + 0.15 y_r, \dot{z}_r = 0.2 + z_r(x_r - 10),\end{cases} \tag{2.6.34}$$

这里的下标 $d$, $r$ 分别代表驱动振子与响应振子，$\varepsilon$ 为耦合强度. $\omega_{d,r}$ 通常不相等. 对于系统的相同步，我们用 $\Omega_d = \Omega_r$ 确定；对于广义同步，我们用响应系统的最大条件李指数 $\lambda_c^1$ 由正变负来确定.

在图 2－71 中，我们画出了在 $(\omega_d, \omega_r) = (0.98, 1.0)$ 及 $(\omega_d, \omega_r) = (0.8, 1.0)$ 两种情况下的 $\Omega_{d,r}$ 和 $\lambda_c^1$. 当 $\omega_d$ 与 $\omega_r$ 相差较小时，响应系统可以与驱动系统在较小的耦合强度下发生相同步. 例如，在(a)中，系统可以在 $\varepsilon \approx 0.08$ 相同步. 而此时我们计算最大条件李指数发现，在 $\varepsilon \approx 0.18$ 时，$\lambda_c^1$ 由正变负，系统进入广义同步状态，这一结果与我们的预期相符. 但当驱动系统与响应系统的参数失配增大时，广义同步的阈值没有大的变化，而相同步需要的阈值增大，这样就有可能出现这样的情况：改变耦合强度，系统首先进入广义同步，然后才进入相同步状态. 在图(c)，(d)我们画出参数失配较大的情况，可以发现，系统在 $\varepsilon \approx 0.13$ 进入广义同步，而此时 $\Omega_d$ 与 $\Omega_r$ 还远没有融合，说明此时相同步还未达到.

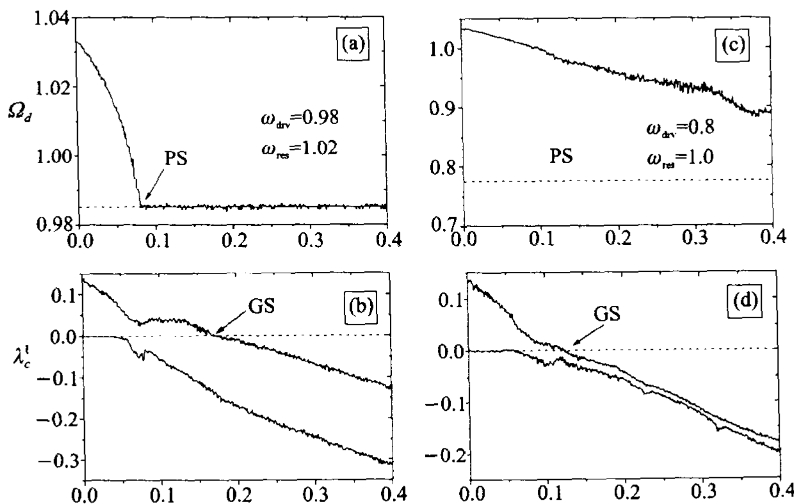



图 2－71 $(\omega_d, \omega_r) = (0.98, 1.0)$ 及 $(\omega_d, \omega_r) = (0.8, 1.0)$ 时的 $\Omega_{d,r}$ 和 $\lambda_c^1$

为更清楚地看到这种顺序的转变,我们在图 2-72 中给出了系统的相图,其中 $\Delta$ 描述 $\omega_d$,$\omega_r$ 的差异:$\omega_d = 1.0 - \Delta$, $\omega_r = 1.0 + \Delta$. 图中的棱形线表示相同步的临界线,方块线表示广义同步的临界线. 在每一条线上方都是同步的区域. 从图中我们可以看出,当 $\Delta$ 很小时,广义同步线始终在相同步的上方,说明相同步比广义相同步要弱. 当 $\Delta \approx 0.028$ 时,可以看到广义同步线下降,与上升的相同步线融合. 在 $0.028 \leqslant \Delta \leqslant 0.035$ 之间,两条线几乎完全重合,说明此时两种同步可以同时到达. 当 $\Delta \geqslant 0.035$ 时,广义同步的线几乎没有变化,而相同步线一直上升超越广义同步线,此时相同步成为更强的同步,需要更强的耦合才能达到. 为方便分析,我们用圆点线给出了 $\lambda_c^2 = 0$ 的线,由于 $\lambda_c^2 = 0$ 变负意味着吸引子发生了拓扑性质的变化. 我们称其为拓扑线. 可以看到当 $\Delta$ 小的时候,拓扑线与相同步线完全重合. 这与我们对小参数失配时相同步的动力学变化一致(系统的一个零李指数变负). 当 $\Delta \approx 0.02$ 时,系统发生第一个分岔,拓扑线与相同步线分开. 这一分岔导致了广义同步线由原先较为平坦变为开始下降,一直到 $\Delta \approx 0.028$ 与相同步线重合(第二个分岔). 当系统的第三个分岔(相同步线与广义同步线分离)发生时,拓扑线不再有明显变化. 因此可以看出,广义同步与相同步强弱关系的转变是由于改变参数失配而导致的系统拓扑性质的变化.

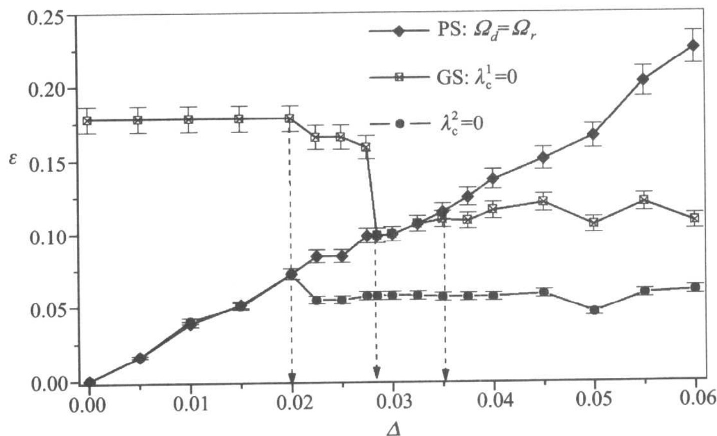



图 2-72 $\Delta - \varepsilon$ 相图,棱形线表示相同步的临界线,方块线表示广义同步的临界线

我们在驱动响应的 Lorenz 系统中也可以看到这种强弱关系的转变. 因此广义同步与相同步的关系不是固定的强弱关系. 当驱动振子与响应振子有很大的差异时,相位则成为较难以同步的自由度,而轨道之间形成某种泛函关系则相对较容易. 只有驱动与响应系统差异很小时,才会有相同步先于广义同步的情况发生.

## 2.7 其他形式的混沌同步

混沌系统由于其复杂性而存在不同程度的同步.其中,完全同步、广义同步、相同步都是其中具有代表性的类型,因而得到了充分的研究.人们在研究过程中还提出过其他一些类型的同步,下面主要介绍滞后同步和测度同步.

### 2.7.1 滞后同步

对于两个相互作用的混沌系统 $\dot{x}_1 = F_1(x_1)$ 与 $\dot{x}_2 = F_2(x_2)$(其中 $x_{1,2} = (x^1_{1,2}, x^2_{1,2}, \cdots, x^n_{1,2})$),若建立了如下的关系:

$$x_1(t+\tau_0) = x_2(t), \tag{2.7.1}$$

则称两个系统建立了滞后同步[235~241],其中 $\tau_0$ 为滞后时间.

我们仍讨论两个相互作用的 Rössler 振子:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,2} = -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + \varepsilon(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} = \omega_{1,2}x_{1,2} + ay_{1,2}, \\ \dot{z}_{1,2} = f + z_{1,2}(x_{1,2} - c), \end{cases} \tag{2.7.2}$$

参数仍然取 $a = 0.165$, $f = 0.2$, $c = 10$, $\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \Delta$.在计算中 $\omega_0 = 0.97$, $\Delta = 0.02$,我们改变 $\varepsilon$ 来观察系统的同步行为.对于这样同样的系统,我们曾讨论过其相同步.由于 $\Delta$ 较小,相同步可以在小 $\varepsilon$ 时达到.为研究滞后同步,可以引入所谓的滞后函数(亦称为相似函数):

$$S^2(\tau) = \frac{\langle [x_2(t+\tau) - x_1(t)]^2 \rangle}{\sqrt{\langle x_1^2(t) \rangle \langle x_2^2(t) \rangle}}, \tag{2.7.3}$$

其中$\langle\cdot\rangle$是信号沿轨道的时间平均:$\langle f(t) \rangle = \lim\limits_{x\to\infty} T^{-1}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$.实际上这是信号 $x_2(t)$与 $x_1(t)$关联函数的一种变形,因此测量的是二者的相关强度.很显然当 $x_1(t)$与 $x_2(t)$互不相关时,$S(\tau) \approx \sqrt{2} \sim o(1)$.当 $x_1(t)$与 $x_2(t)$完全相等时,$S(\tau)$在 $\tau = 0$ 处会有最小值 0;如果二者有一个时间延迟 $\tau_0$,即 $x_2(t+\tau_0) = x_1(t)$,则 $S(\tau_0) = 0$,即在 $\tau = \tau_0$处有最小值 0.当 $x_1(t)$与 $x_2(t)$有一定关联时,$S(\tau)$一般是在 0 与$\sqrt{2}$之间振荡.$S(\tau)$的极小值 $\sigma = \min_\tau S(\tau)$反映了信号之间存在的某种锁相关系.

在图 2-73 中我们画出不同耦合强度的 $S(\tau)$.当 $\varepsilon$ 很小时,$S(\tau)$在所画的时间范围内是减函数,但实际是仍然是振荡的(大的 $\tau$ 部分没有画出),是在$\sqrt{2}$附近的振荡,表明此时 $x_1(t)$与 $x_2(t)$之间关联很弱;增大 $\varepsilon$,可以看到 $S(\tau)$的

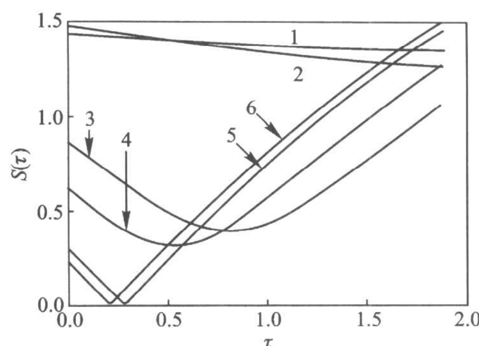



图 2-73 不同耦合强度的 $S(\tau)$

最小值也随之下降,当 $\varepsilon=0.15$ 和 0.2 时,可以发现 $S(\tau)$在某一 $\tau_0$几乎降到 0,说明此时 $x_1(t)$与 $x_2(t)$之间已经形成了很好的延迟关系:$x_2(t+\tau_0)\approx x_1(t)$.对其他自由度 $y_{1,2}(t)$与 $z_{1,2}(t)$也可看到类似的情况,因此两个 Rössler 系统之间达到了滞后同步.在图 2-74 中给出的是 $x_1(t)-x_2(t)$的关系图;可以看到在 $\varepsilon=0.2$ 时(已达到滞后同步 $x_1(t)$与 $x_2(t)$之间还是较混乱的关系.如果我们画出 $x_1(t+\tau_0)-x_2(t)$的关系图(其中 $\tau_0$为 $S(\tau)$的最小值时的 $\tau$ 值),则可以看到在滞后同步达到时所有的点都落到对角线上,说明 $x_2(t+\tau_0)=x_1(t)$.

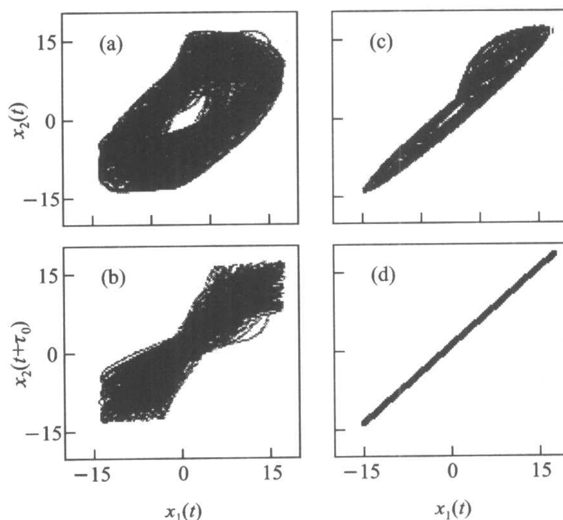



图 2-74 $x_1(t)-x_2(t)$和 $x_1(t+\tau_0)-x_2(t)$的关系图

在图2－75中我们分别给出了二振子的旋转数差、$S(\tau)$的最小值和李指数谱(前4个)随$\varepsilon$的变化情况.在$\varepsilon=\varepsilon_p$时,$\Omega_2-\Omega_1\to 0$,系统达到相同步.可看到李指数谱中有一个零指数在$\varepsilon_p$处沉降为负,这与我们前面的结果一样.当$\varepsilon=\varepsilon_1$时,可以看到$\sigma$降为零(小突起是周期窗口),说明系统达到了滞后同步.当我们观察李指数谱时,在$\varepsilon_1$附近另一个零指数变负,一个正指数降为零,这说明系统达到滞后同步伴随着耦合系统吸引子维数的变化.由于$x_2(t+\tau_0)=x_1(t)$,系统的吸引子收缩到一个Rössler振子的情况,只不过有一个时间延迟$\tau_0$(从李指数谱中一个正指数可以看出来).

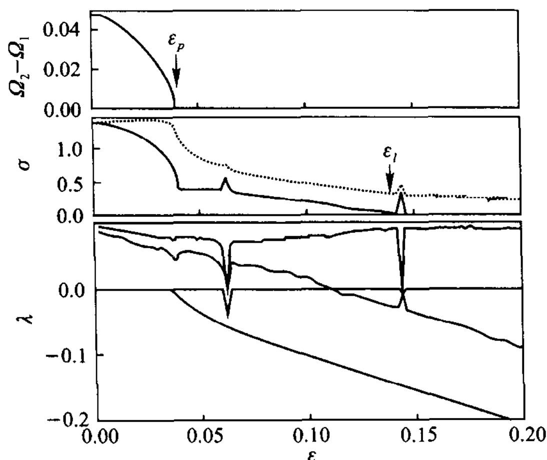



图2－75 二振子的旋转数差、$S(\tau)$的最小值和李指数谱随$\varepsilon$的变化

上面的延迟时间$\tau_0$可以估算出来.在前面分析相同步时我们用极坐标变量变换和绝热消去得到了两振子相同步后的相差为$\theta_1-\theta_2=\arcsin\left[\dfrac{4\Delta A_1A_2}{\varepsilon(A_1^2+A_2^2)}\right]$.对于滞后时间则为

$$\tau_0=(\theta_1-\theta_2)/\Omega, \tag{2.7.4}$$

$\Omega=\Omega_1=\Omega_2$为耦合为$\varepsilon$时的旋转数.若$\Delta$很小,$\tau_0\approx\arcsin(2\Delta/\varepsilon)/\Omega$.当$\Delta=0.02$,$\varepsilon=0.15$和0.2时,$\tau\approx\arcsin(0.04/\varepsilon)/0.97\approx0.28$和0.21,这一结果与图2－73中$S(\tau)$最小值的位置相符得很好.

在前面$\varepsilon_1$的位置与第二个零李指数变负的位置不是很一致,其原因在于滞后流形由于系统的混沌性而对微扰比较敏感.在大部分时间内系统可以处于同步流形上,但会被阵发打断.

### 2.7.2　测度同步

对于哈密顿系统的合作行为的研究大多数局限于统计物理的范畴，从非线性动力学角度进行的探讨很少．对于哈密顿系统而言，不可能出现像前面所研究的同步形式．对于哈密顿系统，相空间体积的守恒使得系统中不可能出现吸引性质的不动点或轨道，刘维定理决定了轨道不可能塌缩．下面讨论的一种哈密顿系统的合作现象——测度同步是从更广义（统计）的意义下的一种同步形式，与前面的轨道同步有本质的不同[242]．

测度同步指的是这样的现象：考虑两个相互作用的哈密顿系统（总体仍保持哈密顿）$(x_i(t), y_i(t))(i=1,2)$．对于不同轨道上的不同初始条件，当相互作用很小时，两条轨道$(x_{1,2}(t), y_{1,2}(t))$覆盖的区域不相交，当耦合强度增加时，这些区域会逐渐变宽且相互接近．在某一临界耦合强度，这两片区域会突然融合成一个单一的区域．继续增加耦合，两条轨道会总是处于同一区域．下面我们考虑下面的$[0,2\pi]\times[0,2\pi]$上的二维标准映射：

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n + \alpha\sin x_n, & \mod 2\pi, \\ y_{n+1} = y_n + \alpha\sin x_n, & \mod 2\pi. \end{cases} \tag{2.7.5}$$

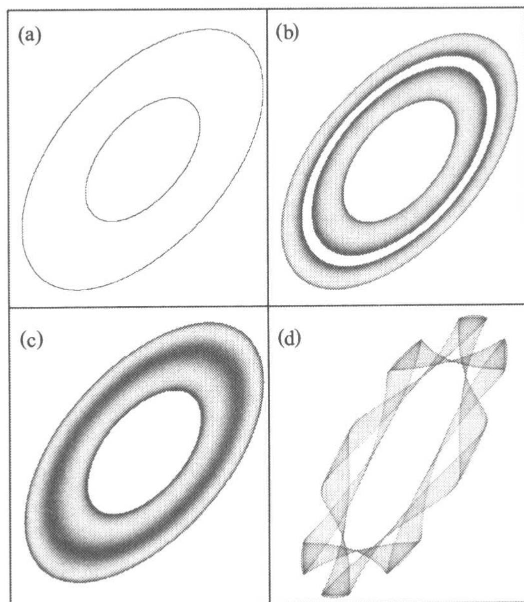



图 2－76　测度同步：$(X_n^i, Y_n^i)$在不同相互作用的相图

$\alpha$ 为惟一非线性参量,对于较大的 $\alpha$,标准映射系统既有规则的准周期轨道,也有混沌轨道.我们考虑 $N=2$ 个相互作用的标准映像.在图 2-76 中画出的是 $(X_n^i, Y_n^i)$ 在不同相互作用 $K$ 的情况.可以看到当 $K=0$ 时[图(a)],两个环面区相互不交叉;当 $K=3.1\times10^{-3}$ 时[图(b)],两个环面都变厚,相互靠近;$K=3.4\times10^{-3}$ 时[图(c)],两个区域突然融为一体,说明系统进入测度同步.在大 $K$ 时这种同步仍然保持,但有一些窗口,系统表现为非同步化,如图(d)所示.这些窗口来自于频率共振.

测度同步在 1999 年由 Hampton 和 Zanette 提出后至今跟踪研究较少,未成为一个热点[243].尽管哈密顿系统中存在测度同步,但是一方面由于以前的 KAM 定理已经作了深刻阐述,另一方面由于实际中的大多数系统不是保守的,因此关于测度同步方面的追踪研究就相对比较少.实际上,关于哈密顿系统合作行为的研究主要集中于其他许多方面,包括扩散、热传导等[244~247].这里提出的测度同步概念来理解哈密顿系统的合作现象仍不失为一个新颖的角度.

## 2.8 耦合时空混沌系统的同步

到目前为止,我们所涉及的同步行为都仅限于耦合的低自由度系统.在实际应用中,我们会遇到大量的系统,其子系统往往可能具有较大的自由度,另外可能不仅包含时间变量,还有空间变量.其同步问题的研究有重要的意义.对这个问题的研究大体有几种模式,一种是将时间空间变量都离散化,即研究耦合映像之间的同步行为;另一种是指将空间离散化,其同步问题可以通过研究耦合振子链之间的同步来达到.最直接的方法就是研究两个相互作用的偏微分系统.下面我们以耦合的一维复 Ginzburg-Landau 系统(CGLE)来阐述耦合时空混沌系统的同步的研究现状.在此之前,我们先简单回顾一下一维 CGLE 的动力学行为.

### 2.8.1 一维复 Ginzburg-Landau 方程(CGLE)

一维 CGLE 可以写作:

$$\frac{\partial A(x,t)}{\partial t}=(1+i\alpha)\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial x^2}+A(x,t)-(1+i\beta)|A(x,t)|^2A(x,t), \tag{2.8.1}$$

其中 $A(x,t)$ 为复变量,它是在实际问题中经无量纲化抽象出来的序参量.CGLE 是研究湍流和时空结构的重要方程之一[248].它的普适性在于,任何时空系统在出现超临界 Hopf 分岔时在分岔点附近的序参量方程都可以写为 CGLE 的形式,这可由对称性分析得到.CGLE 的动力学行为极其丰富,多年来成为人们研究时空混沌斑图结构的重要模型系统之一.

方程(2.8.1)具有下面的行波解(周期边界条件 $A(x+L,t)=A(x,t)$，$L$ 为系统尺寸)：

$$A(x,t)=A_0 e^{i(qx-\omega t)}, \tag{2.8.2}$$

其中波数 $-1\leqslant q\leqslant 1$ 由边界条件决定：

$$q=2\pi m/L,\qquad m=0,\pm 1,\pm 2,\cdots, \tag{2.8.3}$$

系数 $A_0=\sqrt{1-q^2}$. 行波的振荡频率为：

$$\omega=\beta+(\alpha-\beta)q^2, \tag{2.8.4}$$

当 $1+\alpha\beta<0$ 和 $-q_c\leqslant q\leqslant q_c$ 时，上述的平面波会通过 Eckhaus 不稳定性失稳. 因为当 $\alpha\beta\rightarrow -1$ 时，$q_c\rightarrow 0$，所有的平面波在 $\alpha-\beta$ 参数空间中从下面越过

$$\alpha\beta=-1 \tag{2.8.5}$$

的临界线时都会失稳，这条临界线称为 Benjamin-Feir(BF)线(或 Newell 线). 在这条线上，系统表现为三种不同的湍流状态，即相湍流(**PT**)区，振幅湍流(或缺陷湍流)(**AT**)区以及 PT 与 AT 的共存区(bichaos, **BC**). 这些时空混沌行为近年来得到了深入的研究，有兴趣的读者可参阅综述性文献和专著[10,48,99,249~252]. 在图 2-77 中，我们给出了 $\alpha-\beta$ 参数平面的相图，其中更复杂细微的结构没有画出.

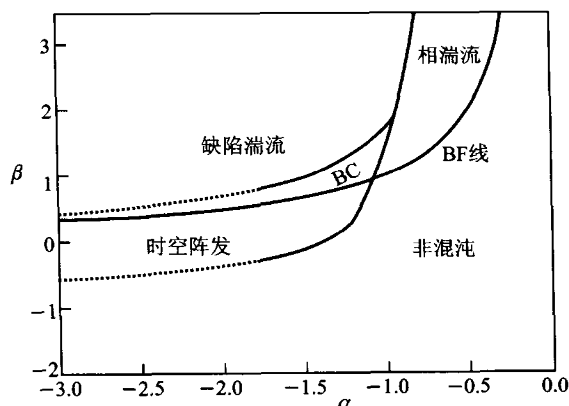



图 2-77 复 Ginzburg-Landau 方程 $\alpha-\beta$ 参数平面的相图

由于 $A(x,t)$ 是复变量，因此它可以写成模和振幅的形式：

$$A(x,t)=\rho(x,t)e^{i\phi(x,t)},\ \rho(x,t)=|A(x,t)|, \tag{2.8.6}$$

$\phi(x,t)$ 即为时空系统的相位，可用来分析 CGLE 系统的相位动力学.

### 2.8.2　耦合相同 CGLE 的时空混沌同步

我们考虑下面的耦合 CGLE：

$$\frac{\partial A_{1,2}}{\partial t}=A_{1,2}+(1+\mathrm{i}\alpha)\frac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial x^2}-(1+\mathrm{i}\beta)(|A_{1,2}|^2+\gamma|A_{2,1}|^2)A_{1,2}. \tag{2.8.7}$$

上述系统可用来描述非线性光学系统中矢量横向斑图动力学行为，此时 $A_{1,2}$代表一个矢量电场幅度的两个独立圆极化分量，$\gamma$ 为耦合强度，为一实数.

我们下面关于同步的讨论将在时空阵发区进行(参见参数图)[253].

考虑方程的空间均匀解：

$$A_{1,2}(x,t)=Q_{1,2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{1,2}t}, \tag{2.8.8}$$

这里 $Q_{1,2}$是实数，$\omega_{1,2}=-\beta(Q_{1,2}^2+Q_{2,1}^2)$. 当耦合 $\gamma=0$ 时，$Q_{1,2}^2=1$. 此时上面的空间均匀、时间振荡解在 BF 线 $1+\alpha\beta=0$以下是线性稳定的. 但在 BF 线下方的时空阵发区内还有与平面波解共存的另外吸引子——时空阵发混沌. 在图 2-78 的最上面，我们给出 $\gamma=0.1$ 时的 $A_{1,2}(x,t)$的时空演化图，横轴为空间，

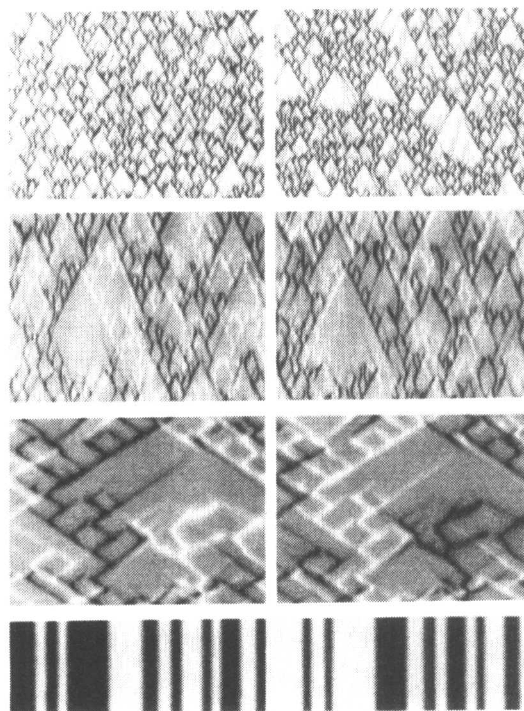


图 2-78　$A_{1,2}(x,t)$的时空演化图

纵向为时间,黑色表示$|A_{1,2}|$的最小值,白色区为其最大值. $\alpha=0.2$, $\beta=-2.0$. $\gamma=0$的行为与小$\gamma$的行为类似,都表现为图中的时空阵发行为,而且相互之间近乎独立. 我们可以看到时间、空间局部的规则行波,但由于无序的阵发,这些有序时空结构在大尺度下被破坏.

当$\gamma$增加时,一方面$|A_1|$与$|A_2|$仍表现为时空阵发行为(尽管在空间尺度上变大,在时间尺度上变慢),另一方面我们发现很有意思的现象,即$|A_1|$与$|A_2|$的动力学在时间与空间上均有了关联,$|A_1|$的黑色(白色)行波结构在时空图恰好对应于$|A_2|$的白色(黑色)结构. 即有序的层流相可在$|A_1|$和$|A_2|$的相同时空区域发生. 当$\gamma\geqslant1$时,$|A_1|$与$|A_2|$只表现为层流区域,不再有行波的传播,$|A_1|$的黑色区域与$|A_2|$的白色区域相对应,这些层流由畴壁分开.

上面所观察到的现象实际是一种时空同步现象. 图2-79给出了$|A_1|$, $|A_2|$的分布,$\gamma$值与图2-78相同,当$\gamma\ll1$时,可以看到分布较为分散,其中分布较多的区域集中于$|A_1|^2=|A_2|^2=(1+\gamma)^{-1}$附近,为层流区. 当$\gamma$增加且$\gamma<1$,点的分布逐渐集中于曲线$|A_1|^2+|A_2|^2=1$这表明时空结构的同步. $|A_1|$与$|A_2|$之间的关系可认为是一种反相同步. 大(小)的$|A_1|$与小(大)的$|A_2|$的点对应于局域的行波结构,在$|A_1|=|A_2|$处的分布较大对应于局域结构附近具有非零波数的规则解. 当$\gamma>1$时,点的分布主要集中于$(|A_1|^2,|A_2|^2)=$

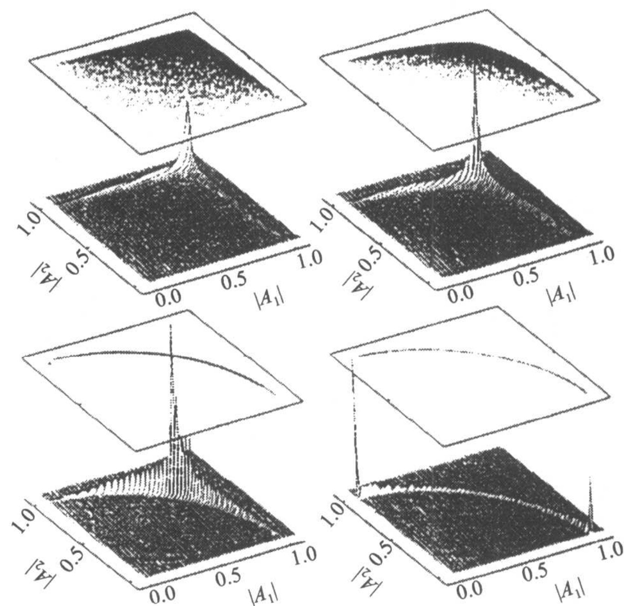



图2-79 振幅$|A_1|$, $|A_2|$的分布

(1,0)与(0,1).

在时空阵发区,我们从上面看到有较强耦合时的同步行为,这种同步是通过局域结构的时空同步实现的.但过大的耦合强度会使得时空阵发结构消失.

### 2.8.3　耦合不相同 CGLE 的同步

下面考虑两个 CGLE 具有不同参数[254,255]:

$$\frac{\partial A_{1,2}}{\partial t}=A_{1,2}+(1+\mathrm{i}\alpha_{1,2})\frac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial x^2}-(1+\mathrm{i}\beta_{1,2})|A_{1,2}|^2A_{1,2}+\varepsilon(A_{2,1}-A_{1,2}). \quad (2.8.9)$$

下面我们在相湍流区与缺陷湍流区讨论同步行为.我们考虑小参数失配与大参数失配的情形.参数失配较小时,一般情况下两个 CGLE 会处于 $\alpha-\beta$ 参数平面的同一区域;当失配较大时,就会出现两个系统处于不同时空相的情况.下面我们分别讨论.

首先考虑小参数失配的情形.参数选为 $\alpha_1=\alpha_2=2.1$,$\beta_1=-1.25$,$\beta_2=-1.2$,即两 CGLE 均处于缺陷湍流态.图 2-80 中给出了$|A_1|$,$|A_2|$的时空演化,左边为$|A_1|$,右边为$|A_2|$,横轴为空间,纵轴为时间,暂态过程已去掉.从上而下是逐渐增加 $\varepsilon$ 的情况,$\varepsilon=0.05,0.09,0.15$.黑线表示时空缺陷的位置.可以看到随着 $\varepsilon$ 的增加,系统经历了一个从非同步到部分同步再到整体同步的过

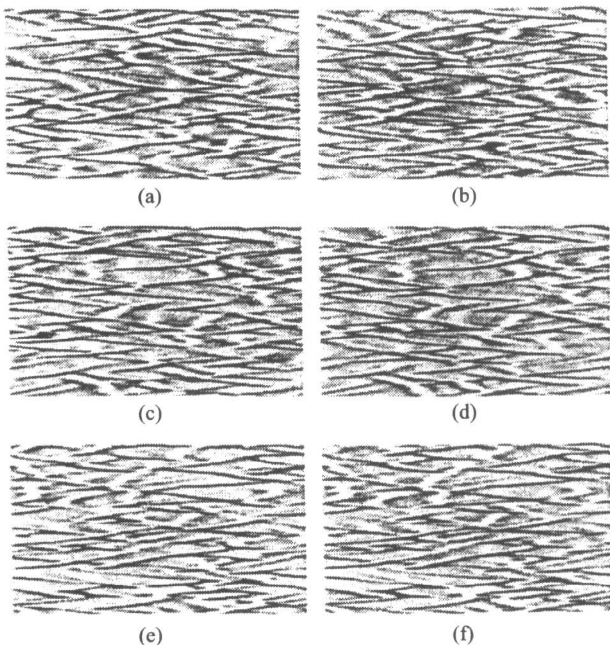



图 2-80　小参数失配时振幅$|A_1|$,$|A_2|$的时空演化

程.为探测同步行为,可以引入下面的平均量:

$$\Delta A = \langle | \rho_1 - \rho_2 | \rangle, \Delta\phi = \langle | \phi_1 - \phi_2 | \rangle, \tag{2.8.10}$$

$\langle\cdot\rangle$表示时间及空间平均,图 2-81(a)给出的即 $\Delta A$,$\Delta\phi$ 随$\varepsilon$ 变化的情况.可以看到 $\Delta A$,$\Delta\phi$ 随$\varepsilon$ 的变化平稳下降,相同步与振幅同步几乎同时到达.注意由于两个 CGLE 参数不同,因而完全同步是达不到的,而且我们从图中也看到 $\Delta A$ 并不趋于零.

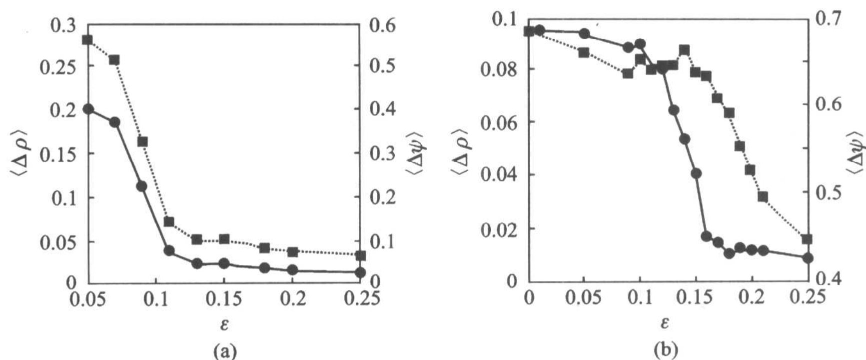



图 2-81 $\Delta A$(方块线),$\Delta\phi$(圆圈线)随 $\varepsilon$ 变化的情况.(a):小失配;(b)大失配

对小参数失配的情况,若两个子系统均处于相湍流区,系统的同步从定性看与上面类似,但由于在相湍流区没有缺陷,系统就可以在更小的耦合强度下达到同步.

下面看大参数失配的情况.我们可以选择,$\alpha_1 = \alpha_2 = 2.1$,$\beta_1 = -1.2$,$\beta_2 = -0.83$,这样 $A_1$处于缺陷湍流区,而 $A_2$处于相湍流区.图 2-82 给出了$|A_1|$(左),$|A_2|$(右)的时空演化,自上而下 $\varepsilon = 0.09, 0.14, 0.19$.当 $\varepsilon$ 较小时,可以看到两个子系统各保持自己的运动状态.增加 $\varepsilon$,两系统也同样经历了由部分同步到整体同步的过程,整体同步的运动区大致处于相湍流区,此时湍流的缺陷被压制下去.在部分同步时,两系统则均处于缺陷湍流区(见中间两图).图 2-81(b)给出了 $\Delta A$与 $\Delta\phi$ 随$\varepsilon$ 的变化曲线.很明显 $\Delta\phi$ 下降更快,说明系统在较小的 $\varepsilon$ 首先到达相同步,而此时振幅差还很大.再增加 $\varepsilon$,$\Delta A$ 也很快下降,系统逐渐达到整体同步.由于系统最终的同步压制了缺陷的产生,在图 2-83 中给出了缺陷的数目 $N_d$随$\varepsilon$ 的变化情况.对 $A_1$来说 $N_d$是逐渐减小的,在某一 $\varepsilon_c$趋于零,说明缺陷完全被压制;对 $A_2$来说,由于 $\varepsilon = 0$ 时它处于相湍流区,$N_d(\varepsilon = 0) = 0$,因此 $N_d$是先增加,到达一高峰后再趋于零.

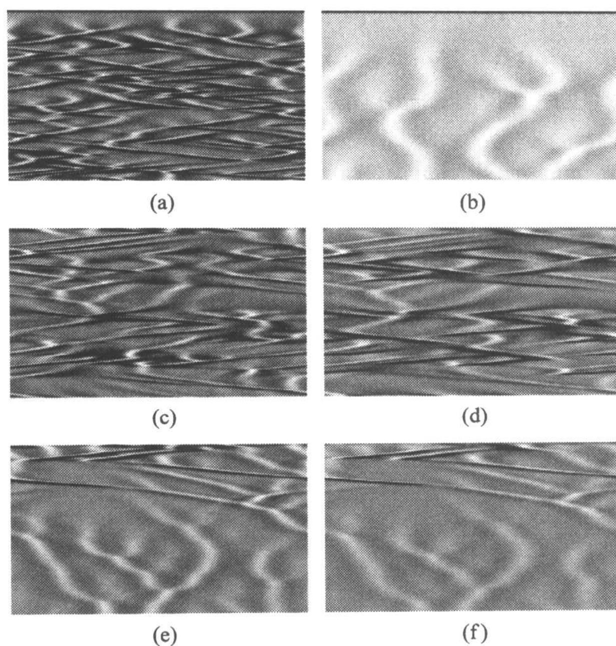



图 2-82 大参数失配时振幅 $|A_1|$(左),$|A_2|$(右)的时空演化,自上而下 $\varepsilon=0.09,0.14,0.19$

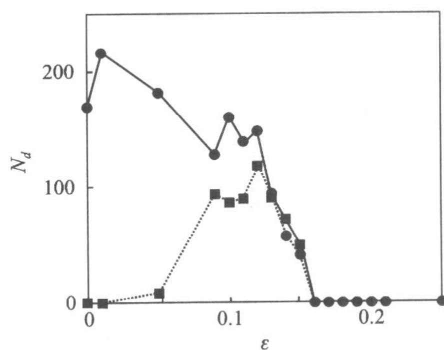



图 2-83 缺陷的数目 $N_d$ 随 $\varepsilon$ 的变化情况

## 2.8.4 耦合 CGLE 的相同步

Junge 与 Parlitz 分析了下面的单向耦合的 CGLE 的相同步问题[256~258]:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial A_1}{\partial t}=A_1+(1+\mathrm{i}\alpha)\dfrac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}-(1+\mathrm{i}\beta_1)|A_1|^2A_1,\\[2ex]\dfrac{\partial A_2}{\partial t}=A_2+(1+\mathrm{i}\alpha)\dfrac{\partial^2 A_2}{\partial x^2}-(1+\mathrm{i}\beta_2)|A_2|^2A_2+\varepsilon(A_2-A_1).\end{cases}\tag{2.8.11}$$

他们专门考察相位 $\phi_1(x,t)$与 $\phi_2(x,t)$的关系.为方便讨论,还可引用系统的平均

$$\Omega=\lim_{t\to\infty}\frac{\langle\phi(x,t)\rangle_x}{t},\tag{2.8.12}$$

其中$\langle\cdot\rangle_x$表示空间平均.相同步意味着 $\Delta\Omega=\Omega_1-\Omega_2=0$.计算中 $\alpha=2.0,\beta_1=-0.7$(相湍流态),$\beta_2$改变.图 2-84 给出了$|\Delta\phi|=\max|\phi_1-\phi_2|$随 $\varepsilon$ 的变化,其中实线为 $\beta_2=-1.05$(系统 2 处于缺陷湍流态),虚线为 $\beta_2=-0.9$(相湍流态).可以看出当两个子系统均处于相湍流态时,系统可在更小 $\varepsilon$ 达到相同步.

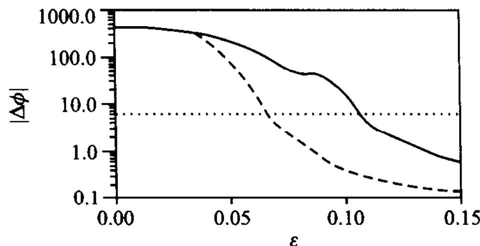



图 2-84 $|\Delta\phi|=\max|\phi_1-\phi_2|$随 $\varepsilon$ 的变化,其中实线为 $\beta_2=-1.05$(系统 2 处于缺陷湍流态),虚线为 $\beta_2=-0.9$(相湍流态)

上面我们讨论了耦合 CGLE 的同步行为,这些行为应该说有一定普遍性,它们在其他系统也可以观察到.由于时空混沌本身的复杂性,因此耦合时空系统的同步性及其控制同步化还远远未得到深入研究,尚有很多问题值得深入探讨.另一个问题是耦合系统的有序行为与同步的关系研究是一个很有意义的课题,如何利用同步的观点去理解这些有序现象及时空斑图的形成有待进一步深入.可以说,同步不仅仅是一种现象,它还是很多现象的机制.我们在后面可以看到,很多有序行为都与同步有密切关系.

# 第3章 时空随机共振与波的传播

通过对耦合非线性系统同步行为的分析,我们看到系统可以通过单元间的相互作用而形成有序的合作效应.这是振子之间自组织、相互协调的结果.振子的同步行为一方面可以直接表现出来,并在实际中观察到,如锁相、共振阶梯、同步振荡等;另一方面,更多的由同步所引发的现象在实际情况中往往不会直接表现出来,而是会通过某种具体现象表现出来,并以单个振子无法表现的方式进行.这就需要更深入的分析才能达到目的.从本章开始介绍的许多现象都有类似的特点.

非线性系统一般情况下不是孤立的,除了系统之间的相互作用之外,还往往受到外界涨落因素的影响,这种涨落表现为随机力(噪声).通常随机力会破坏系统的有序,因此系统的有序和无序的竞争会表现出复杂的行为.值得注意的是,随机力并不总是起着消极的作用.在非线性系统的分岔点附近,通过非线性与随机力的作用,无序的能量可能会转化为有序的动力,从而促进系统新序的建立.近年来讨论的噪声诱导相变、随机共振、相干共振、分子马达运动等一系列现象就是典型的噪声对非线性系统正面作用的例子.我们在本章将主要探讨时空非线性系统的随机共振与相干共振问题.我们可以看到,通过噪声与系统耦合作用的巧妙配合,系统会产生比单个振子系统随机共振更强的效应.我们还将讨论由典型的阈值系统构成的介质——可激发介质中的波传播问题.噪声在波的传播与时空斑图形成中也会起重要作用.

## 3.1 阵列加强的随机共振与时空同步

### 3.1.1 阵列加强随机共振

在第1章中,我们简单介绍了随机共振现象.从信号处理等应用的角度来

看,提高输出信号的信噪比是非常必要的.研究者研究了线性和非线性全局耦合的随机共振系统,发现随机共振可以通过耦合得到加强[259~263].1995年,Lindner等人通过研究局域线性耦合的非线性振子发现,大量相互耦合的振子形成的阵列可以大大提高系统的随机共振效应(AESR)[264].这样我们不仅可以通过调节噪声强度,还可以通过调节耦合来使系统的信噪比达到优化[265~273],从而为实际应用提供重要的理论依据.

研究随机共振一个最常用的模型是一个过阻尼的周期驱动的双稳系统:

$$\dot{x} = kx - k'x^3 + F\cos\Omega t + \xi(t), \tag{3.1.1}$$

这里 $k, k'$ 均大于零,系统的势能项 $V(x) = -\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}k'x^4$ 为典型的双稳势,$\xi(t)$ 是强度为 $2D$ 的高斯白噪声.对这一系统随机共振问题的研究已经非常透彻.下面考虑有许多同样的系统,它们通过线性的近邻耦合连接成为一个阵列:

$$\dot{x}_n = kx_n - k'x_n^3 + F\cos\Omega t + \varepsilon(x_{n-1} - x_n) + \varepsilon(x_{n+1} - x_n) + \xi_n(t), \tag{3.1.2}$$

$\xi_n(t)$ 为时间、空间均无关联的噪声(在实际上 $\xi_n(t)$ 是有带宽限制的,它在一个很大的频率 $f_N$ 之内谱强度为 $2D$,在此之外为0).下面用噪声功率 $\sigma^2 = 2Df_N$ 来刻画噪声.描写随机共振的一个重要的量为信噪比(SNR),即

$$\mathrm{SNR} = 10\log_{10}[(\text{信号总功率} - \text{噪声功率})/\text{增益}]/\text{噪声功率}, \tag{3.1.3}$$

注意这里的信号功率应减去背景噪声的功率.在实际计算中,SNR可有不同的定义和算法,但这都不会影响定性结果.

图3-1给出了信噪比随耦合强度的变化情况.实际计算中参数如下:$k = 2.1078$,$k' = 1.4706$,$F = 1.3039$,$f = \Omega/2\pi = 0.116$.图中画出的是 $N = 9$ 时中间振子的SNR情况.可以看到,信噪比和噪声强度的关系曲线总是有一个峰值.当 $\varepsilon \neq 0$ 时,随 $\varepsilon$ 的增加,可以看到一方面SNR曲线整体向大噪声方向移动,还

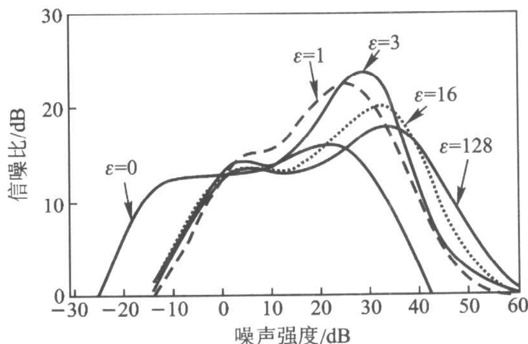



图3-1 信噪比的曲线随耦合强度的变化情况

可以看到 SNR 曲线的峰值先上升，对很大的 $\varepsilon$ 时又会下降，SNR 曲线向大噪声方向移动的原因很容易理解：当耦合增加时，由于振子间的作用，使得噪声越来越难以将振子由一个阱驱动到另一个阱. 图中的这组曲线说明合适的耦合既可以使整个链上的振子出现相干运动（不至于被噪声破坏），又可以合理的利用噪声能量使系统输出信号的信噪比增加. 为更清楚显示这一行为，图 3－2 中给出了信噪比峰值与耦合强度的变化关系. 图中 $N=1$（单个振子）的曲线也给出来，目的是为了方便对比. 当振子个数 $N$ 增加时，我们可以看到当粒子数较少时，SNR 与 $\varepsilon$ 都有一个共振峰. 当 $\varepsilon\to 0$ 时这些曲线都趋于 $N=1$ 的 SNR 值. 这个峰值随着 $N$ 的增加而增加，因此阵列加强的随机共振不仅可以调节耦合强度，还可以通过增加阵列的尺寸来达到最佳效果. 这一加强效应充分说明，通过振子间的耦合，我们不仅可以压制噪声，形成有序，还可以合理利用噪声. 当然，耦合与随机力之间需要一个适当的匹配. 否则，太弱的耦合不能使振子之间形成相干的跃迁，噪声使各振子仍处于各自为政的状态；反之，如果耦合太强，所有振子都被束缚在一起，噪声的作用被完全压制下去，整个阵列的行为又如同单个振子. 这两个极限都会使阵列的整体输出效果下降. 从图 3－2 中我们通过 SNR 与 $\varepsilon$ 的共振关系可清楚地看到上述现象.

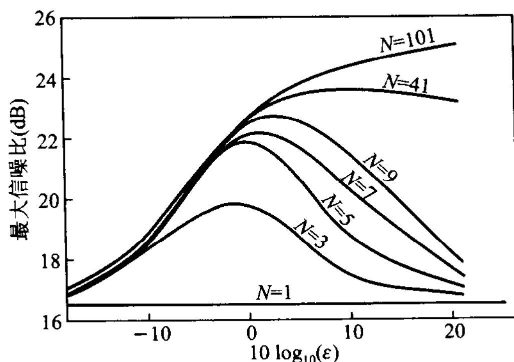



图 3－2　信噪比峰值与耦合强度的变化关系

### 3.1.2　相干随机共振与时空同步

显然，前面所看到的相干随机共振由于振子间的相互作用而优化，所以这种效应是阵列全局动力学的结果. 图 3－3 给出了 $N=101$ 个振子在 $\varepsilon=1/4$（小耦合）和 $\varepsilon=16$（大耦合）时由小到大改变噪声的时空演化图. 每一个小图的横轴为振子数 $N$，纵轴为时间，图中的黑白两种区域分别表示双稳势的两个势阱. 初始时振子所处的位置随机给定. 图 3－3 的中间小图给出 $\varepsilon=1/4$ 与 16 的 SNR 曲

线. 对 $\varepsilon = 1/4$ 的情形,可以看到当噪声改变时,振子的翻转逐渐比较一致,但由于耦合较弱,只是部分振子可以同步翻转. 在 SNR 曲线的峰值处,可以看到对应的时空同步达到最佳(≈20 dB),继续增加噪声就逐渐破坏振子的同步性,可看到振子随机的翻转. 当 $\varepsilon = 16$ 时,较弱的噪声很难使得振子发生翻转,强耦合使振子大部分时间处于各自的阱内. 噪声增加使得振子可以克服耦合而翻转,而耦合又反过来使得这些翻转同步进行. 在 SNR 曲线的峰值处(≈30 dB)可以看到非常有序的时空演化,所有振子都同步在阱间跃迁. 通过这两种情形的分析,我们可以清楚地看到,系统的最佳时空随机共振实际上就对应于系统的时空同步. 这一时空同步是系统有序(耦合)与无序(噪声)竞争协调的结果.

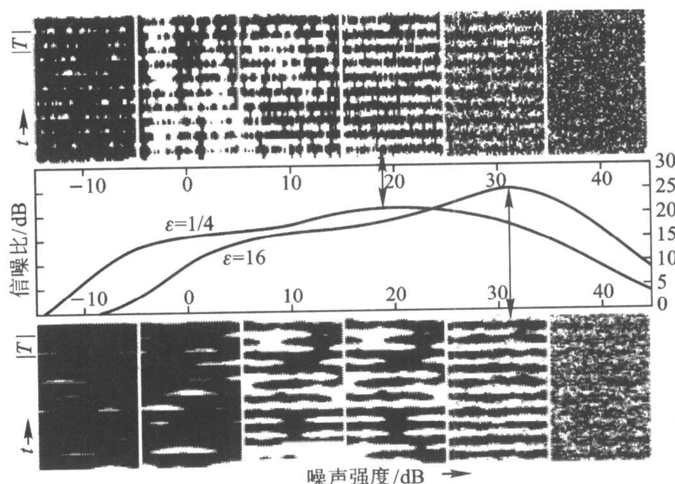



图 3-3 $N = 101$ 个振子由小到大改变噪声的时空演化图

我们可以定义一个占有数 $N_0$:

$$N_0 = (N_L + N_R)/2N, \tag{3.1.4}$$

其中 $N_L$ 为当左边阱降低时在左边势阱内的振子数,$N_R$ 为当右边势阱降低时在右边势阱内的振子数. 由于阱降低有利于振子在阱内的驻留,因此 $N_{L,R}$ 都是反映出同步振子的个数,$N_0$ 则反应了系统的同步程度.

噪声小时,所有振子都会处于各自的阱中,此时 $N_0 \approx 50\%$. 噪声过大时,振子又会不相干地翻转,此时 $N_0$ 也大约为 50%. 系统没有耦合时,$N_0$ 始终处于 50% 的水平. 但当考虑耦合时,在时空同步点,所有振子会同步的来回翻转,此时 $N_0 \approx 100\%$. 通常 $N_0$ 处于 50% ~ 100% 之间,$N_0$ 越大,说明系统的时空同步性越强. 图 3-4 给出了 $\varepsilon = 1$ 时 $N = 101$ 个振子的占有数随噪声变化情况. 正如预期,$N_0$ 曲线有最大值,它对应于系统最优时空同步. 对比 SNR 曲线(方块线),可

以看到二者的峰位完全相同,这证实了前面的推断.

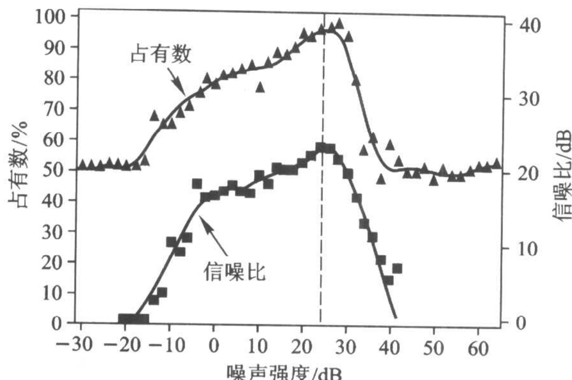



图 3-4 $\varepsilon=1$ 时 $N=101$ 个振子的占有数随噪声变化情况

### 3.1.3 时空随机共振与 $\phi^4$ 成核理论

上述时空随机共振现象揭示了非线性系统与噪声之间的竞争与协调.在此之后,Lindner 等人用数值考察了 SNR 最优噪声强度 $D_m$、最优耦合强度 $\varepsilon_m$ 与系统阵列尺寸 $N$ 之间的关系[273].总结有关数值结果,大致有以下三点结论:(1) SNR 在$(D,\varepsilon)$平面上具有惟一的最大值,最大 $\mathrm{SNR}_m$ 对应于$(D_m,\varepsilon_m)$;(2) SNR 与 $D(\varepsilon>0)$的峰位总是高于 $\varepsilon=0$ 时的峰位;(3) $\mathrm{SNR}_m$ 对应的$(D_m,\varepsilon_m)$处,系统有最佳的时空同步.当 $N\to\infty$时,$\mathrm{SNR}_m\to$常数,$D_m\propto N$,$\varepsilon_m\propto N^2$.在 Lindner 的这项工作后不久,Marchesoni 等人就利用 $\phi^4$ 的扭结-反扭结成核理论作出解释,并得到了上面的标度律[275].实际上,当 $N\to\infty$ 时,方程(3.1.2)可以在空间连续化:$x_n(t)\to\phi(n\Delta x,t)$,$\Delta x=1/N$,我们得到过阻尼的 $\phi^4$模型:

$$\phi_t=k\phi-k'\phi^3+\varepsilon_n\phi_{xx}+F\cos\Omega t+\zeta(x,t),\tag{3.1.5}$$

这里 $\varepsilon_N=\varepsilon/N^2$,$D_N=D/N$,$\langle\zeta(x,t)\zeta'(x',t')\rangle=2D_N\delta(t-t')\delta(x-x')$,$\phi_t=\partial\phi/\partial t$,$\phi_{xx}=\partial^2\phi/\partial x^2$,系统的 $x\in[0,1]$.下面采用均匀 Von-Neumann 条件:

$$\phi_x(0,t)=\phi_x(1,t)=0.$$

上面的 $\phi^4$模型既有延展解(声子解)又有局域解(孤立子解)[276~281].孤立子解可由运动的扭结解 $\phi_+$ 和反扭结解 $\phi_-$ 的线性叠加构成:

$$\phi_\pm=\tanh\left[\pm\frac{1}{2d}\frac{x-X_\pm(t)}{\sqrt{1-\dot{X}_\pm^2(t)/C_0^2}}\right].\tag{3.1.6}$$

这种构成在 $\phi_\pm$ 中心 $X_\pm$ 之间间距远大于孤立子尺寸 $d=C_0/\omega_0$,且 $d\ll1$ 时有

效. 此处 $\omega_0=\sqrt{2k}$, $C_0=\sqrt{\epsilon_N}$. 在没有周期力($F=0$)时, 上述方程可以很好地解释 $\phi^4$ 理论的热化过程. 在热涨落 $D_N$ 下, 平衡态的扭结(反扭结)密度为

$$n_{\pm}=n_0=\frac{1}{d}\sqrt{\frac{3E_0}{2\pi D_N}}\mathrm{e}^{-\frac{E_0}{D_N}}, \tag{3.1.7}$$

这里 $E_0=2A\omega_0C_0/3$ 为静态能, $A=k/k'$, $M_0=E_0/C_0^2$ 为扭结 $\phi_{\pm}$ 的质量. 系统的噪声 $\zeta(x,t)$ 和周期力 $F(t)=F\cos\Omega t$ 会导致扭结(反扭结)的平移运动, 此时 $\phi_{\pm}$ 的形状不变, 但其质心 $X_{\pm}$ 在等效作随机运动:

$$\dot{X}_{\pm}=\mp\frac{2F_A}{M_0}\cos\Omega t+\eta(t), \tag{3.1.8}$$

这里 $F_A=\sqrt{A}F$, $\eta(t)$ 为高斯白噪声: $\langle\eta(t)\rangle=0$, $\langle\eta(t)\eta(t')\rangle=\frac{2D_N}{M_0}\delta(t-t')$. 上面周期力符号相反是由于周期力驱动 $\phi_{\pm}$ 向反向运动.

在没有外力时, 振子在双稳 $\phi=\pm1$ 之间的翻转由热噪声造成, 因而扭结(反扭结)都是热化的, 随机的, 此时扭结－反扭结对成核具有较大尺寸的可能性很小. 外力的加入则有利于这种成核过程的出现(同步翻转). 因此扭结－反扭结对成核的尺寸是很关键的. 一个大的具有长度 $2R\gg d$ 的核 $\phi_N(x,R)$ 可以用下面的位于 $\pm R$ 的扭结－反扭结线性叠加而成:

$$\phi_N(x,R)=\phi_+(x+R,0)+\phi_-(x-R,0)+1. \tag{3.1.9}$$

有外力时, 临界核的长度可以计算出来:

$$2R(F)=-d\ln\left(\frac{F_Ad}{12E_0}\right)=-d\ln\left(\frac{F}{24\sqrt{3}F_c}\right),\ F_c=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{k^3}{3k'}}. \tag{3.1.10}$$

当 $2R(F)$ 为整个链的长度的 1/2 时, 系统就会达到时空同步. 对单位长度的连续情况:

$$2R_m=\frac{1}{2}. \tag{3.1.11}$$

由此可以得到

$$(\epsilon_N)_m=\frac{\epsilon_m}{N^2}=\frac{\omega_0^2}{16\ln^2(F/24\sqrt{6}F_c)}. \tag{3.1.12}$$

SNR 也可以计算出来. 对应于链最大同步的 $D_m$ 也可以计算出来:

$$(D_N)_m=\frac{D_m}{N}=\frac{8}{15}\omega_0A\sqrt{\frac{\epsilon_m}{N^2}}\left(1-\frac{F}{4\sqrt{6}F_c}+\cdots\right). \tag{3.1.13}$$

可以看出 $D_m$, $\epsilon_m$ 与 $N$ 的标度律与数值结果一致. 这里我们没有写出以上结果的详细推导过程, 有兴趣的读者可以参见 Marchesoni 的文献.

### 3.1.4　时空随机共振的实验验证

1995年Lindner等人提出AESR的现象和机制后，1996年E.R.Hunt小组在耦合的二极管谐振器中实现了这种耦合增强的随机共振[282~285]. 他们用一系列扩散耦合联在一起的二极管谐振器，通过观察SNR与耦合强度、振子个数、噪声强度的关系，不仅看到了AESR现象，还证实了Marchesoni等人提出的$\phi^4$扭结－反扭结成核理论.

二极管谐振器是研究双稳系统非常理想的实验器件，它可以随参数的改变通过一系列倍周期分岔进入混沌. 在实验中，Hunt等人用耦合电阻$R_c$将多至32个二极管谐振器对称地耦合在一起. 耦合强度$\varepsilon \propto R_c^{-1}$. 进行随机共振实验中，可将谐振器的参数选在稳定的周期2区，两个相给出系统的双稳性. 然后对系统加上周期驱动，就会引起系统的状态在两个相之间跳跃. 噪声发生器产生的无序信号也加到系统上，这样，整个耦合的二极管谐振器阵列就处于周期力和噪声的驱动之下，可以很好地模拟前面的双稳模型.

系统的周期驱动是用一个频率为70 kHz的主驱动和一个频率为35.1 kHz的次驱动产生的100 Hz的拍频. 每一个格点上的噪声源都是独立加上的，他们都是用放大通过一个PN结二极管的电流产生的闪色噪声得到的，这个噪声的功率谱一直到100 kHz都是平的，可以很好地模拟白噪声. 在测量时抽取中间谐振器的电流进行分析、计算功率谱. 信噪比SNR可以用测量100 Hz附近的功率减去背景噪声得到. 实验中的功率谱取20次测量的平均.

图3－5(a)给出了中间振子的最大SNR在不同阻尼$R_c$(耦合强度)下的情况. 阻尼越大，通过电阻的电流越小，反映出谐振器之间的耦合越弱. 可以很清楚地看到，阻尼很大时(耦合近乎为零)，近似对应于无耦合的情况，$\mathrm{SNR}_{\max} \approx 29$ dB；阻尼减小(耦合增加)时最大信噪比明显增加，其对应的噪声强度也增加，$\mathrm{SNR}_{\max}$在阻尼为100 kΩ时，达到最大值，然后继续增加耦合，$\mathrm{SNR}_{\max}$开始减小.

图3－5(b)给出了$\mathrm{SNR}_{\max}$的增益随耦合强度的变化(注意增益是指$\mathrm{SNR}_{\max}$减去单个振子的SNR最大值). 对于不同的$N$，我们均看到共振峰，说明适当的耦合强度可以提高输出信号的效果. 这些曲线在趋势上与Lindner等人的数值结果完全一致，充分证明了他们的结论. 另外，Hunt等人还测量了占有数与噪声强度的关系，其结果表明了，AESR的最佳SNR对应于系统的最佳时空同步跃迁.

对于Marchesoni等人的$\phi^4$扭结－反扭结成核理论，Hunt等人的实验也作了证实. Marchesoni等人猜想$\phi^4$链在两个稳定的均匀态之间的转换是通过扭结－反扭结对的成核来实现的，临界核的形成从能量角度来说比所有振子的完全

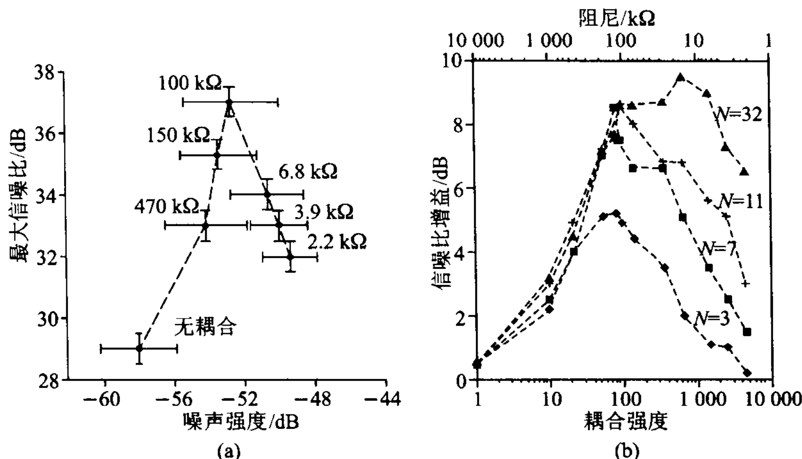



图 3-5 (a)中间振子的最大 SNR 在不同阻尼 $R_c$ 下的情况；
(b) $SNR_{max}$ 的增益随耦合强度的变化

一致的跳跃更实惠，更有效. 图 3-6 给出了实验的观察结果，每个图中都是用 32 个谐振器模拟的不同耦合($R_c^{-1}$)下阵列在不同时刻的空间分布情况. 可以看到，当耦合很小(图(a))时，链在阱间的跃迁非常陡，核的宽度只是整个链的一小部分. 当耦合强度过大时(图(c))，扭结-反扭结对已经延伸到系统的边界之外了. 在图(b)中，核的宽度(扭结与反扭结中心之间的距离)约为系统尺寸的 1/2 左右，此时 SNR 比(a)与(c)的要高得多. 这从侧面说明成核理论的解释是合理的.

### 3.1.5 Swift-Hohenberg 系统中的时空随机共振

通过对耦合双稳系统随机共振的讨论，可以看到随机力与系统耦合之间的协作效应. 实际上，随机力在时空系统斑图的形成与转换中起着重要的作用，它不是仅仅简单地破坏有序的斑图，在一些情况下它还可以促进斑图的形成. 这些噪声正面作用的共同特点都是非线性系统处于分岔点附近，或其本身就是一个阈值系统. 随机共振的双稳系统亦是如此，随机共振是在系统发生 Hopf 分岔之前. 本节我们以 Swift-Hohenberg 方程为例，可以看到这种效应[286]. 在后面讨论可激活介质时我们还会涉及噪声在斑图形成与转换中的作用.

Swift-Hohenberg 方程(SH)描述了 Rayleigh-Bénard 对流在对流不稳定点附近的行为[287,288]:

$$\Psi_t = h(t)\Psi - q(1+\nabla^2)^2\Psi - g\Psi^3 + \zeta(\boldsymbol{r},t), \qquad (3.1.14)$$

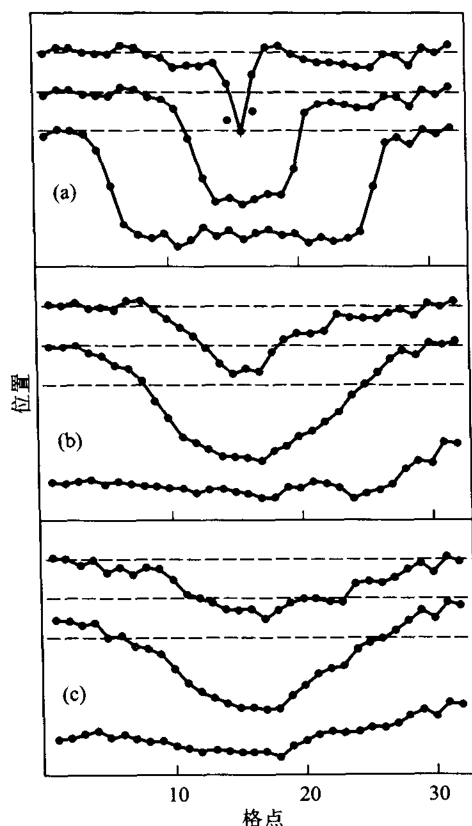



图 3-6 不同耦合($R_c^{-1}$)下阵列在不同时刻的空间分布情况

其中 $\Psi_t = \partial\Psi/\partial t$，$\nabla^2$ 为 Laplace 算子. 系统的控制参量 $h(t) = -\kappa + \alpha\sin\omega_0 t$ ($\kappa,\alpha,\omega_0$为常数)反映了外加周期力的作用，它可以由对流系统上下面间的温差的变化引起. $g,q$ 是系统的特征参量. $\zeta(\boldsymbol{r},t)$为白噪声，

$$\langle\zeta(\boldsymbol{r},t)\rangle = 0,\langle\zeta(\boldsymbol{r},t)\zeta(\boldsymbol{r}',t')\rangle = 2D\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t') \quad (3.1.15)$$

为描述系统时间演化，可以考虑下面的对流热流：

$$J(t) = C\int\Psi^2(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}\boldsymbol{r} \quad (3.1.16)$$

$C$ 为与系统特征有关的常数. $J$ 可以作为系统由均匀态向结构态转变的序参量. 另外还可以引入时间平均的结构因子来描述系统的空间有序：

$$S(k) = \langle\hat{\Psi}_k\hat{\Psi}_{-k}\rangle \quad (3.1.17)$$

其中 $\hat{\Psi}_k$ 是场 $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ 的空间傅里叶变换的 $k$ 分量，$\langle\cdot\rangle$ 为时间和噪声平均. 当 $S(k)$ 出现一个尖峰时，就说明系统出现了一个有序的空间结构.

我们关心当 SH 系统有噪声驱动时的动力学. $D=0$ 时，长时间后，$\Psi(\boldsymbol{r},t)\to 0$. 当 $D$ 很小时，$\Psi(\boldsymbol{r},t)$ 也很小. SH 方程中的非线性不起关键作用. 此时我们可考虑线性方程. 简单分析可知：$\Psi\propto\sqrt{D}$，且 $J(t)$ 的信噪比 SNR 为：

$$\mathrm{SNR}=\omega_0 f_1(\gamma), \tag{3.1.18}$$

此处 $f$ 为与 $\kappa/\omega_0$，$\alpha/\omega_0$，$q/\omega_0$ 有关的无量纲函数，$\gamma$ 表示这些参数的集合. 可以发现，SNR 不依赖于噪声强度 $D$ 的变化，但输出噪声与信号都与 $D^2$ 成正比. 另外结构因子与 $D$ 成正比：$S(\kappa)\propto D$. 所以对于 $D\ll 1$，SNR 来自于 $D$ 的贡献的修正应与略去的非线性项有关. 为此，可把 SH 方程重新写成下面的形式：

$$\Psi_t=[-(\kappa+g\Psi^2)+\alpha\sin\omega_0 t-q(1+\nabla^2)^2]\Psi+\zeta(\boldsymbol{r},t), \tag{3.1.19}$$

由于 $\Psi\propto\sqrt{D}$，因此 $\Psi^2\propto D$. 这样一级近似 $\kappa+g\Psi^2$ 可用有效参量 $\tilde{\kappa}=\kappa+g\omega_0^{-1}f_2(\gamma)D$ 来取代，这里 $f_2$ 为大于零的无量纲函数. 这样上面方程又成为线性化的，上面结果中的 $\kappa$ 用 $\tilde{\kappa}$ 取代即可. 把上面的 SNR 在 $\kappa$ 附近展开（小量 $g\omega_0^{-1}f_2(\gamma)D$），可以得到：

$$\mathrm{SNR}\approx\omega_0 f_1(\gamma)+\frac{\partial f_1}{\partial\kappa}g\omega_0^{-1}f_2(\gamma)D. \tag{3.1.20}$$

它给出了由于非线性的一级修正结果. 如果 $f_1$ 是 $\kappa$ 的单调上升函数，则 $\partial f_1/\partial\kappa>0$，则修正结果表明 SNR 随 $D$ 的增加而增加. 对很大的 $D$，我们知道 SNR 随 $D$ 下降，因此 SNR 必然在某一 $D$ 有一峰值，表明系统可以出现随机共振行为. 图 3-7(a)给出了空间一维的 SH 线性系统在 $\alpha=1$，$q=1$，$\omega_0/2\pi=0.195$，$g=1$ 时的 SNR 与 $\kappa$ 的关系. 我们可以看到 SNR 在 $\kappa_{\max}$ 处有一极大值. 因此，当 $\kappa<\kappa_{\max}$ 时，SNR 就会随 $D$ 的增加而增大；当 $\kappa>\kappa_{\max}$ 时，SNR 就随 $D$ 增加而下降. (b)图与(c)图分别给出了当 $\kappa<\kappa_{\max}$ 和

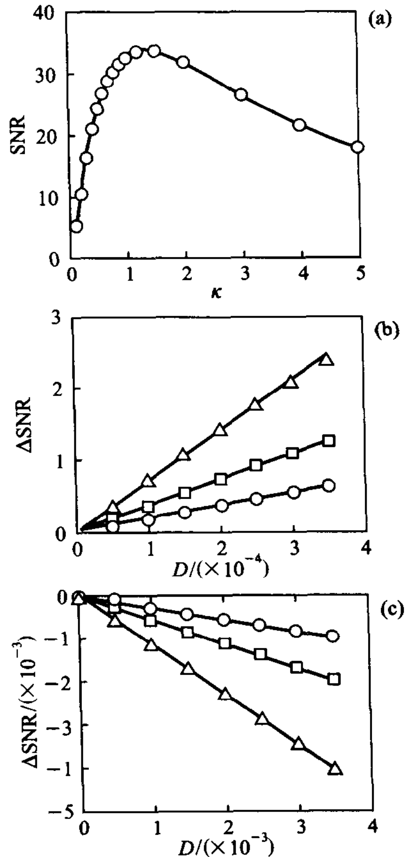



图 3-7 (a)空间一维的 SH 线性系统的 SNR 与 $\kappa$ 的关系；(b)，(c)：$\kappa<\kappa_{\max}$ 和 $\kappa>\kappa_{\max}$ 时 SNR 增量与 $D$ 的关系

$\kappa > \kappa_{max}$时 SNR 增量($\Delta SNR = SNR(D) - SNR(D=0)$)与 $D$ 的关系，可以看到前者增加，后者下降，与 $D$ 的线性关系也与(3.1.20)一致.

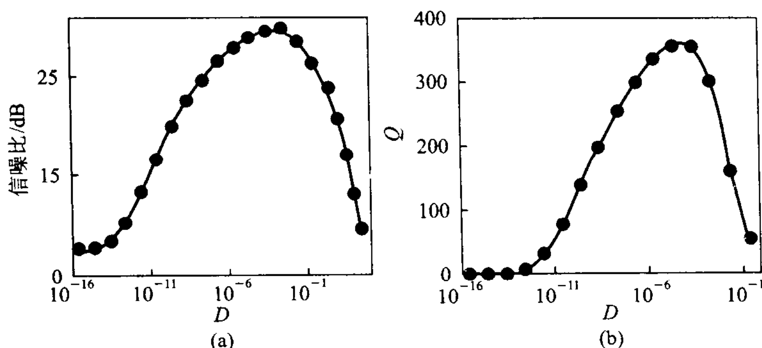



图 3-8 (a) $J(t)$的 SNR 随噪声强度的变化；
(b)与图(a)参数相同时的 $Q$ 与 $D$ 的关系

图 3-8(a)给出了 $\alpha=1, q=1, \omega_0/2\pi=0.024, g=1, \kappa=0.1$ 时系统的$J(t)$的 SNR 随噪声强度的变化，可以看到显著的随机共振峰. 这说明系统存在时空随机共振现象. 那么，这种随机共振行为与系统的时空动力学有什么联系呢？在前面的讨论中，我们看到耦合双稳系统的最优 SNR 恰好对应于系统的最佳时空同步. 这一点在 SH 系统中也可以观察到. 空间有序的描述可用结构因子 $S(k)$ 来刻画，它对应于 $S(k)$在某一 $k$ 附近的尖峰. 峰越尖锐，说明空间有序性越强. 峰的尖锐程度可用下面的量表示：

$$Q = S_{max}(k)/\mathrm{var}[S(k)], \tag{3.1.21}$$

其中 $S_{max}(k)$为峰的高度，$\mathrm{var}[S(k)]$为峰的宽度(发散程度). 显然 $Q$ 越大说明峰越尖锐. 图 3-8(b)画出了与图(a)参数相同时的 $Q$ 与 $D$ 的关系，可以看到二者变化趋势完全一致，在最大 SNR 的地方对应于空间的最佳有序及对周期力 $h(t)$的相干响应. 图 3-9 给出了与图 3-8(a)相同参数下一维系统在不同噪声强度时的时空演化. 当 $D=0.5\times10^{-15}$很小时，系统既没有时间结构也没有空间结构；当 $D=0.5\times10^{-4}$和 $D=0.5\times10^{-2}$时，可以看到相干的时空结构，系统在空间的时间演化与周期力 $h(t)$达到很好的同步.

对空间二维系统的讨论有类似的结果. 特别地，时空随机共振大大促进了系统斑图结构的形成. 图 3-10 给出了 $\alpha=1, q=1, \omega_0/2\pi=0.012, g=1, \kappa=0.1$ 时二维系统在不同 $D$ 的空间斑图. 可以看到 $D=0.025$ 时系统具有有序的斑图结构. 而很强的噪声会破坏这种有序斑图. 因此，噪声在斑图形成方面并不总起破坏作用. 特别是当系统处于临界阈值附近时，噪声的能量可被利用来促进斑图

的生成.噪声对非线性系统时间和空间的有序形成的作用研究至今仍方兴未艾,后面还将继续介绍.

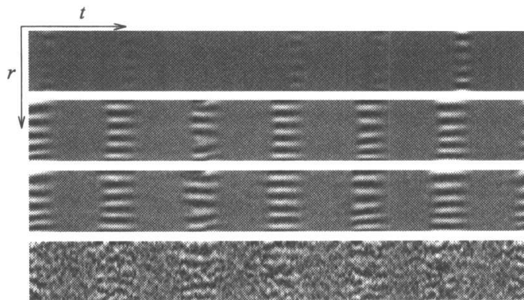



图 3-9 与图 3-8(a)相同参数下一维系统在不同噪声强度时的时空演化

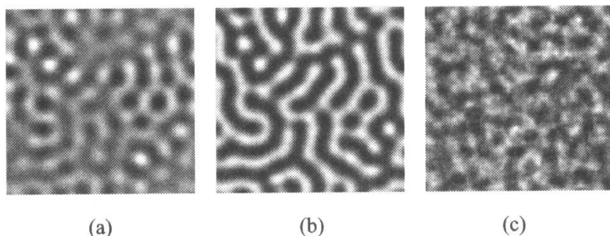



图 3-10 二维 SH 系统在不同 $D$ 的空间斑图

### 3.1.6 其他一些相关工作简介

除了以上的关于时空随机共振的研究之外,人们还对不同系统进行了研究.时空随机共振现在作为时空非线性系统与噪声的一种合作效应已得到广泛研究与认同,它在信号处理、波的形成与传播、信息传输与接收与斑图形成与转换等方面都有应用前景和价值.鉴于噪声无处不在,有效地利用噪声成为人们十分关注的课题.

一、全局耦合系统中的时空随机共振效应

全局耦合有时为理论处理带来一定的便利.全局耦合双稳系统对应的高自由度系统随机共振研究注重于大量相同的均匀耦合随机双稳系统在周期驱动下的情形[289~292].Jung 等人研究了下面的系统[293]:

$$\dot{x}_n = x_x - x_n^3 + \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} g(x_m - x_n) + A\cos\Omega t + \zeta_n(t), \quad (3.1.22)$$

其中 $g$ 为耦合系数，$\zeta_n(t)$ 为时间、空间均无关联的高斯白噪声．在没有周期调制（$A=0$）时，这个系统曾被用来研究噪声诱导的非平衡相变问题．Shiino 通过 H 定理和线性响应理论证实了这类系统中存在叉式分岔并分析其临界行为[291]．他们发现这个叉式分岔所对应的非平衡相变与铁磁相变类似，导致了系统自发对称性破缺．Wiesenfeld(1991)[292] 与 Jung 等(1992)[293] 考虑了耦合随机系统在周期调制下（$A\neq 0$）的动力学行为，阐述了该系统存在的协作效应和自发有序相变．他们发现，这个系统随着噪声强度 $D$ 的改变会呈现出自发的有序相变，在平均场近似下这类相变可以进行理论分析，可得到平均场近似的 Langevin 方程．此方程所对应的 Fokker-Planck 方程的定态解的稳定性和分支随 $D$ 的变化而变化．$D<D_c$ 时，系统存在一个平均磁化强度 $m=\langle x\rangle=0$ 的稳定解（这里 $\langle\cdot\rangle$ 代表粒子数和统计平均）；当 $D>D_c$ 时，$m=0$ 的解失稳，系统出现两个对称性破缺的稳定解．也就是说，在临界点，系统经历了非平衡的二级相变．若假定序参量 $m$ 对周期调制的响应可以用双态形式描述，则在平均场近似下，功率谱放大率在 $D=D_c=g$ 处会出现一个由耦合导致的极大峰．这个峰说明了双稳系统可以通过耦合出现合作的随机共振行为[294~295]．

胡岗等人研究了下面由两列不同单元组成的全局耦合连续系统[296,297]：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_i &= a_1 x_i - b_1 x_i^3 + \mu_1 Z(t) + A_1\cos(\Omega t+\gamma_1) + \Gamma_i(t),\\ \dot{y}_j &= a_2 y_j - b_2 y_j^3 + \mu_2 Z(t) + A_2\cos(\Omega t+\gamma_2) + \Delta_j(t),\end{aligned}\right\}\tag{3.1.23}$$

这里所有参数 $a_{1,2}, b_{1,2}, \mu_{1,2}$ 都大于零，$Z(t)=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{L} h_i x_i + \sum\limits_{j=1}^{L} s_j y_j}{L}$，即 $x_i$ 为 $h_i>0$ 的单元（激活子），$y_j$ 为 $s_j<0$ 的单元（抑制子）两种机制相互的竞争在实际中有很多例子．$\Gamma_i, \Delta_j$ 为相互间无关联且各自时空不相关的高斯白噪声，强度分别为 $D_1, D_2$．实际讨论中可不失一般性设 $h_i=-s_j=1$．此时

$Z(t)$ 可以写成：

$$\begin{gathered}Z(t)=X(t)-Y(t),\\ X(t)=\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} x_i,\ Y(t)=\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} y_i.\end{gathered}\tag{3.1.24}$$

这个模型可以在前一个模型基础上进行理论分析．当无周期调制 $A_1=A_2=0$ 时，理论分析表明在热力学极限和双态近似下，可以把上面的 $2L$ 自由度耦合方程简化为两个耦合的常微分方程．研究发现系统有三种不同的相：(1) 无序相，$X=Y=Z=0$；(2) 有序的双稳相，$X, Y, Z$ 均不为零；(3) 相干振荡相．图 3-11 给出了在 $\beta=\mu_2/\mu_1$ 与 $D_1=D_2=D$ 平面上的相图，$a_1=a_2=1.0, b_1=b_2=$

1,其中 1,2,3 分别对应于前面的三种相. 双稳相是从无序相态经二级叉型分岔的定态解,相干振荡相是无序相态由 Hopf 分岔而生成的整体极限环解. 在这三种相态中,噪声诱发的相干振荡态会表现出随机共振,表明系统的集体运动与协作效应.

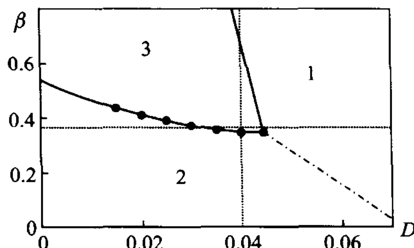



图 3－11 在 $\beta=\mu_2/\mu_1$ 与 $D_1=D_2=D$ 构成的平面上的相图

对于 $A_1,A_2\neq 0$ 的情况,在线性响应下的研究结果揭示出信号放大率 $\eta_1$ 与周期力频率 $\Omega$ 的复杂依赖性. 图 3－12 给出了 $\eta_1$ 与 $\Omega$ 在不同噪声强度 $D_1=D_2=D$ 与 $\frac{a_1\mu_1}{b_1}=\frac{a_2\mu_2}{b_2}=\mu$ 下的关系. 可以看到 $\eta_1$ 对 $\Omega$ 的关系很敏感. $\eta_1$ 总有一个很尖的峰. 特别地,当 $D$ 趋于产生相干振荡的临界值时,$\eta_1$ 出现发散. 这说明系统的时空随机共振与 Hopf 分岔导致的同步振荡有密切的关系.

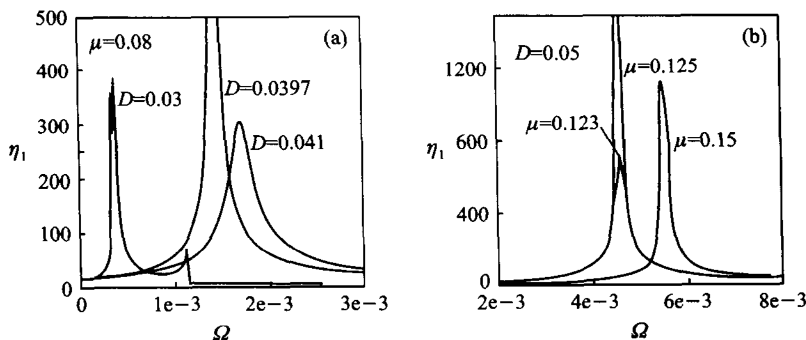



图 3－12 $\eta_1$ 与 $\Omega$ 在不同噪声强度 $D$ 与 $\mu$ 下的关系

## 二、双随机共振

Zaikin 等研究了下面的最近邻耦合的振子系统[298]:

$$\dot{x}_i=f(x_i)+g(x_i)\zeta_i(t)+\frac{D}{2d}\sum_j(x_j-x_i)+\eta_i(t)+A\cos(\omega t+\varphi),\tag{3.1.25}$$

这里 $i=1,2,\cdots,L^d$，$d$ 为格点维数，求和为最近邻 $2d$ 个振子，$D$ 为耦合强度. $\zeta_i(t)$，$\eta_i(t)$均为时空无关联的白噪声：

$$\langle \zeta_i(t)\rangle = 0, \langle \zeta_i(t)\zeta_j(t')\rangle = \sigma_\zeta^2\delta_{i,j}\delta(t-t'),$$

$$\langle \eta_i(t)\rangle = 0, \langle \eta_i(t)\eta_j(t')\rangle = \sigma_\eta^2\delta_{i,j}\delta(t-t'), \tag{3.1.26}$$

所有振子都受到一个周期力的驱动. 显然 $\zeta_i(t)$为乘性噪声，$\eta_i(t)$为加性噪声，

$$f(x) = -x(1+x^2)^2, g(x) = 1+x^2. \tag{3.1.27}$$

当 $A=0$ 时，耦合系统被用来研究噪声诱导相变，它可以用标准的平均场理论解析求解，其基本思想是以全局耦合项取代上面的近邻耦合项，建立相应的 Fokker-Planck 方程[299~302]. 其定态分布 $W_{st}(x,m)$可解析求解，其中 $m$ 为平均场：

$$m = \frac{1}{L^d}\sum_i x_i,$$

它可以自洽地求出：

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} xW_{st}(x,m)\mathrm{d}x, \tag{3.1.28}$$

此自洽方程有两种解：无序解 $m=0$，有序解 $m\neq 0$. 在有序相，系统有对称的两个态 $m_1=-m_2\neq 0$，系统根据初始条件趋近于其中某一个态，这是一个双稳态.

当 $A\neq 0$ 时，由于上面的噪声诱导相变引起了系统的双稳的有序相，因此周期力会引起系统在 $m_1$ 和 $m_2$ 态之间的跃迁. 这种情况又非常类似于单粒子的随机共振系统，不同的是这里是耦合系统在做整体跃迁. 图 3-13 给出了 $m(t)$在不同参数下的行为，周期力的演化作为参考线也画上去了. 这里 $A=0.1$，$\omega=0.1$，$D=20$，$\sigma_\zeta^2=3$. 当 $\sigma_\eta^2=0.01$ 时，我们只能看到在 $m_1$、$m_2$ 态之间很小的跃迁；当 $\sigma_\eta^2=1.05$ 时，可看到 $m(t)$与周期力很好的同步性；对于大的噪声 $\eta_i(t)$($\sigma_\eta^2=5.0$)，这种同步性又被破坏. 图 3-14 中的信噪比 SNR 与 $\sigma_\eta^2$的关系表现出很好的峰值现象，说明系统可以出现随机共振. 图中的黑点为输出信号的 SNR，空心点为双态近似的结果，实线为理论曲线. 这种现象是噪声诱导相变与随机共振两种行为的复合，因此被称为**双随机共振**.

另外还有很多其他方面的关于时空随机共振的探讨，如在小世界网络中的随机共振[303]、有时间延迟的耦合振子系统的随机共振[304]等，这里不再一一介绍，有兴趣的读者可参阅相关文献. 另外，我们在后面马上会讨论可激发介质中的时空随机共振行为，这里不再展开.

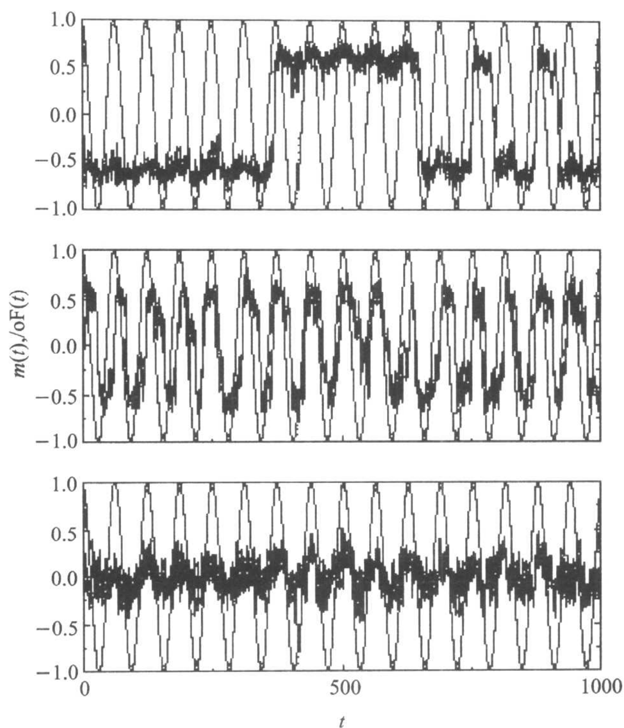



图 3-13 $m(t)$在不同参数下的演化，实线为外力的演化

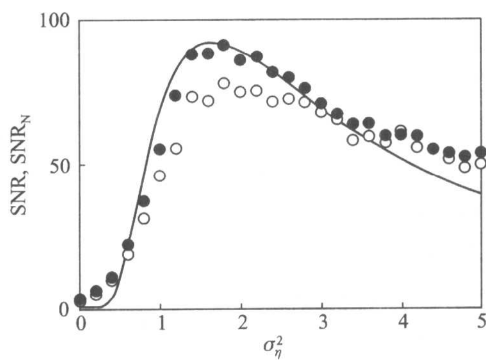



图 3-14 信噪比 SNR 与 $\sigma_\eta^2$的关系

# 3.2　噪声加强的信号传播

噪声与耦合非线性系统的相互作用不仅可以有效地用来提高输出信号的信噪比，还可以被用来加强信号在介质中的传输.本节我们将看到，加在一个格点上的信号，通过调节整个系统的涨落程度可以达到最佳的传播效率.这方面的研究实际上是从研究波在可激发介质中的传播开始的.这方面的内容比较多，所以我们将其放在后面作为一个专题讨论.信号传播与噪声作用问题的研究则是近几年的事情.Locher 等人(1998)用耦合二极管谐振器阵列研究表明，噪声可以加强信号在阵列中的传播[305].三个月后张英等研究了信号在单向耦合振子链中的传播，表明噪声可以引起信号在链中的无损传播[306].张在工作三个月之后，Lindner 等人通过研究对称耦合的振子链表明中等强度的噪声可以大大促进信号的传播[307].在半年之内连续三篇同一方面的工作，得到了一致的结论，说明噪声对信号传输的积极意义有应用上的价值.其后，人们又进行了一系列的讨论，使这方面的内容更加丰富[308~313].

### 3.2.1　对称耦合振子系统中的噪声加强传播

我们考虑下面的扩散耦合系统：

$$\dot{x}_n = k_1 x_n - k_2 x_n^3 + \varepsilon(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) + \zeta_n(t),\ n = 2,3,\cdots,N, \tag{3.2.1}$$

其中 $k_1$、$k_2>0$，上面的单个振子为双稳系统.实际计算中，取 $h = k_1^2/4k_2 = 0.75$，$\omega = 2\sqrt{k_1/k_2} = 2.25$ 以保证双稳性.$\varepsilon$ 为耦合强度，$\zeta_n(t)$ 是强度为 $\sigma^2$ 的时空无关联白噪声.对系统的第一个振子我们加上周期信号：

$$\dot{x}_1 = k_1 x_1 - k_2 x_1^3 + \varepsilon(x_2 - x_1) + \zeta_1(t) + A\sin \omega t, \tag{3.2.2}$$

我们将分析信号沿整个链的传播情况.

图 3-15(a)给出了 $A=5.0$，$\omega=0.2$，$\varepsilon=10$ 时系统在不同噪声强度 $\sigma^2$(标在图右边)下的时空演化图，$N=32$，横轴为时间，纵轴为格点 $n$.可以看到随着 $\sigma^2$ 的增加，信号的传播距离增大.当 $\sigma^2$ 很大时，信号虽能传播，但被大的涨落所淹没.我们可以计算各个格点上输出信号的信噪比 $\mathrm{SNR}_n$，在图 3-15(b)~(c)中，$\mathrm{SNR}_n$ 与格点 $n$ 和噪声强度 $\sigma^2$ 的分布图给出了更清晰的结果.当 $\varepsilon=1.0$ 时，可以看到离注入信号较远的格点信噪比很小，说明此时系统的传输效率很低.增加耦合强度 $\varepsilon$，可以看到离第一个振子很远的格点都具有很大的 SNR，表明信号可以传得很远.特别地，当 $\varepsilon=12$ 时，可以看到信号在适当的噪声强度下可以很好地传播到整个链上.当 $\sigma^2=0$ 时，这是达不到的(看 $\varepsilon=12$ 时图的左上角黑色

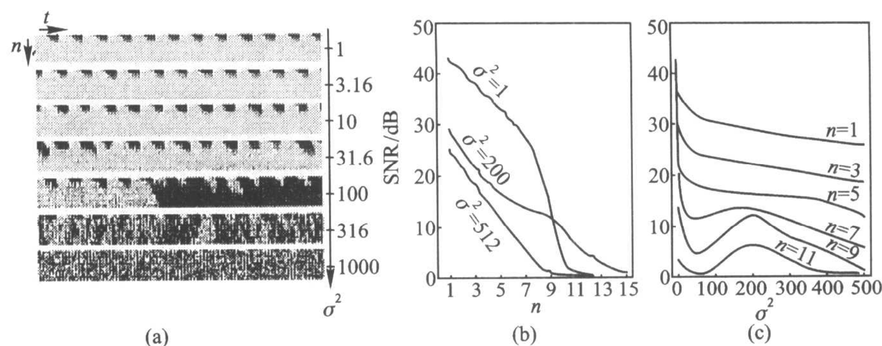



图 3-15 (a)系统在不同噪声强度 $\sigma^2$ 下的时空演化图;(b)~(c)$SNR_n$ 与格点 $n$ 和噪声强度 $\sigma^2$ 的关系图

区域),只有 $\sigma^2$ 合适才会看到.

类似的现象也可以在二维格点系统中看到.图 3-16 给出了二维 32×32 格点的 SNR 分布图,横轴为 $\sigma^2$,纵轴为$(n_x, n_y)=(n, n)$(对角线),信号加在格点(1,1)上,除 $\varepsilon=1$ 外,其他参数与一维情况相同.可以看到很明显的噪声加强的传播(注意当 $\sigma^2\approx75$ dB 时,信号传播的最远).

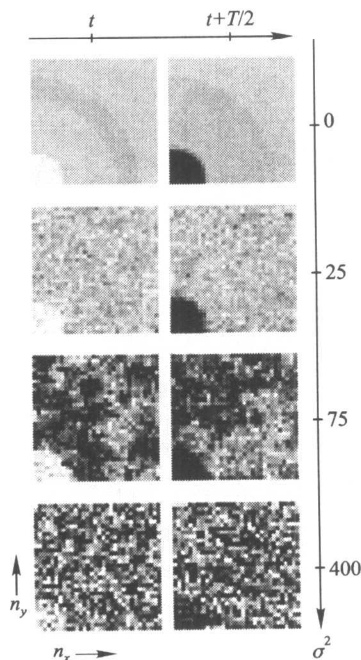



图 3-16 二维 32×32 格点的 SNR 分布图,横轴为 $\sigma^2$,纵轴为$(n_x, n_y)=(n, n)$(对角线)

### 3.2.2 单向耦合振子系统中的信号传播

考虑下面的单向耦合系统

$$\dot{x}_i = x_i - x_i^3 + \mu x_{i-1} + \Gamma_i(t), i = 2, 3, \cdots, N, \tag{3.2.3a}$$

其中 $\mu$ 为耦合强度，$\Gamma_i(t)$为强度为 $D$ 的时空无关联白噪声．系统的第一个振子受到周期信号的驱动：

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_1^3 + \Gamma_1(t) + A\cos\Omega t. \tag{3.2.3b}$$

下面的计算中 $\Omega = 0.05, A, \mu, D$ 为系统的控制参量．可以用下面的量来考察信号在媒质中的传播：

$$B_i = C_i(\Omega) - \frac{1}{2}[C_i(\Omega + \Delta\Omega) + C_i(\Omega - \Delta\Omega)], \tag{3.2.4}$$

这里 $C_i(\omega)$为 $x_i(t)$振荡部分的 $\omega$ 傅里叶分量．$C_i(\Omega \pm \Delta\Omega)$描述了在 $\Omega$ 附近的噪声背景．

当 $D = 0$(无噪声)时，$B_i$与 $i$ 的关系表明，在第一个振子上加的信号沿链的传播会指数衰减(见图 3-17(a)，A = 0.3,0.05，$\mu = 4$)：

$$B_i \approx C(A)e^{-\alpha(\mu)i}. \tag{3.2.5}$$

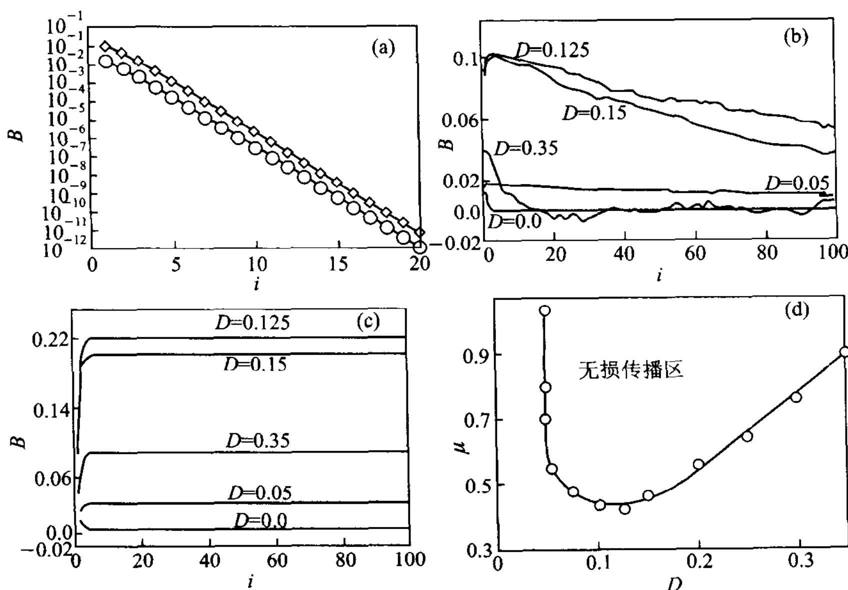



图 3-17 (a)无噪声时 $B_i$与 $i$ 的关系；(b)-(c)A = 0.05 时 $\mu = 0.5$ 和 4 的信号传输情况；(d)给出了系统的相图 $\mu - D$，在临界线上为信号无损传播区

当 $D\neq0$ 时,图 3 - 17(b) - (c)给出了当 $A=0.05$ 时 $\mu=0.5$ 和 4 的信号传输情况.对于 $\mu=0.5$,可以看到对于不太大的噪声,$B_i$ 随 $i$ 的衰减不是指数的而近乎是线性的,信号可以被传播到很远的振子上.另外,存在最佳的噪声(图中 $D=0.125$)使系统有最佳的传输效果.这种加强的传输在 $D$ 与 $\mu$ 的配合下可以达到无损耗.如图(c),当 $\mu=4.0$ 时,$D\neq0$ 使得 $B_i$ 不再随 $i$ 衰减而是上升,最后饱和.这个饱和意味着信号在传播的过程中不再有衰减.另外,随机共振的效果仍然存在,即存在最佳 $D$ 使系统的无损传播效果最佳.这样,通过 $D$ 与 $\mu$ 的适当匹配,我们不仅可实现信号无损传播,而且还使得传播达到最佳.图 3 - 17(d)给出了系统的相图 $\mu-D$.在临界线上为信号无损传播区.

### 3.2.3 耦合单稳振子系统中的信号传播

最近,Zaikin 等人(2002)对他们的模型作了改变[314](原模型见§3.1.6)以用来考虑信号在介质中的传播问题:

$$\dot{x}_j=f(x_i)+g(x_i)\zeta_i(t)+\frac{D}{4}\sum_j(x_j-x_i)+\eta_i(t)+A_i\cos(\omega t+\varphi),\tag{3.2.6}$$

其中 $x_i$ 是二维 N×N 格点上的变量,$i=i_x+N(i_y-1)$,$i_x,i_y=1,2,\cdots,N$.求和对最近邻的四个格点进行,上面的加性与乘性噪声均为时空无关联的白噪声,强度为 $\sigma_\zeta^2$ 与 $\sigma_\eta^2$.与 3.1.6 节不同,这里我们只对格点的前三列加上周期信号,其余的格点作为传播介质:$A_i=A(\delta_{i_x,1}+\delta_{i_x,2}+\delta_{i_x,3})$,如图 3 - 18 所示.

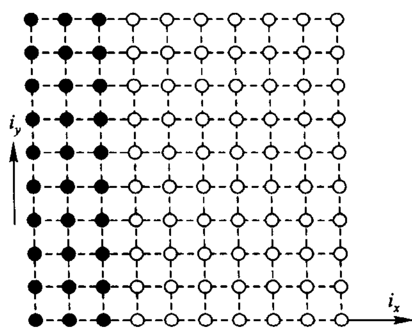



图 3 - 18 二维格点信号传播示意图

由于在无周期信号时上述系统存在由单态向双稳态的非平衡相变(见 3.1.6 节),讨论在双稳态进行(这个双稳态是系统集体的双稳态),为考察信号在格

点中的传播,可以考察平均场 $m_i(t)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_{i+(k-1)N}(t)$的 $\omega$ 傅里叶分量(求和对纵向进行,看信号沿横向的传播):

$$Q_i=\frac{\omega}{n\pi}\int_0^{2n\pi/\omega}2m_i(t)e^{i\omega t}\,dt,\tag{3.2.7}$$

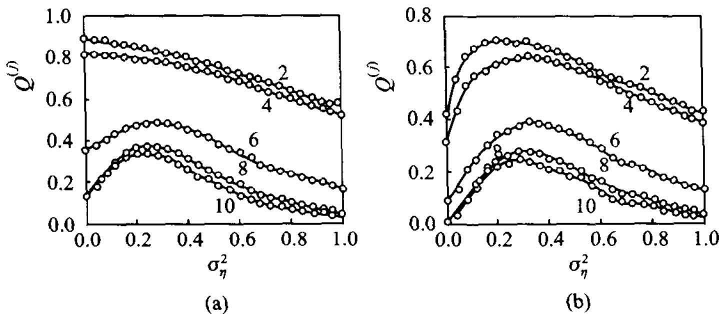



图 3-19 在双稳区不同格点的 $Q^{(j)}$ 与 $\sigma_\eta^2$ 的关系.(a)$A=0.3$,(b)$A=0.2$

$Q^{(i)}=|Q_i|$.在图 3-19 中给出的是 $\sigma_\zeta^2=3$(双稳区)与(a)$A=0.3$ 和(b)$A=0.2$时不同格点的 $Q^{(j)}$ 与 $\sigma_\eta^2$ 的关系,$j=1,2,3$ 上加上周期信号(这里的 $j$ 都是指第 $j$ 列,每一列都有 $N$ 个振子).从图(a)可以看到,格点2 和4 都是随 $\sigma_\eta^2$下降的曲线,而从 $j=6$ 开始,后面的曲线都呈现出随机共振的现象,由于 $A=0.3$ 足够大,因此对周期驱动下的振子及其相邻的非受驱振子来说,这个大的周期力就足以使得运动在两个态之间跃迁,因而加上 $\sigma_\eta^2$后 $Q^{(i)}$ 曲线会下降.但对于离受驱振子较远的介质来说,这种情况就完全不同.由于它们没有周期外力驱动,因此噪声就对它们起至关重要的作用.从远处传来的小信号可以通过共振的作用得到放大.这就是我们观察到随机共振曲线的原因.当 $A$ 不足以引起态间跃迁时,噪声不仅对未受驱振子而且对周期驱动下的振子都起至关重要的作用,此时所有振子都会表现出随机共振的现象,这一点从图(b)可以清楚地看到.Zaikin 等人把前者的传播称为噪声诱发的传播,后者称为时空双随机共振传播.当改变系统参数时,如果无周期驱动系统离开双稳区,则上述随机共振行为消失、信号在介质中的传播效率就会大大降低.这种现象说明随机共振在耦合系统的信号传输方面起到了至关重要的作用.我们在讨论可激发介质波的传播问题还会讲到这一点.

## 3.3 可激发介质的时空动力学与波

耦合非线性系统可以表现出复杂的时空动力学与合作行为.我们在前面的

讨论中看到了不同表现的合作行为,这些合作行为都表现为系统的有序同无序的竞争.空间延展系统是由大量的振子所组成的,我们一方面可以看系统内部本身的合作行为,另一方面还可以通过对系统施加外力来观察系统的响应,藉此了解系统的内部特性.

本节我们考虑一类特殊的系统——可激发系统,它有一个典型性质就是系统的响应与外界的刺激密切相关,对于小的刺激它可以不作出反应,但对于大的刺激就会出现较大的响应.我们把这类系统统称为阈值系统.这类系统在实际中并不少见,例如神经元[315].神经元是典型的阈值单元,它可以由称为树突的部分接收外来的刺激,然后以动作电位的方式通过轴突将信号传播到很远的地方.刺激是通过释放位于神经元轴突与受激的树突之间的突触内的称为"神经传递素"的化学物质而发生的.这些化学物质蕴藏在靠近轴突尽头的小泡囊中.当动作电位达到轴突尽头时,钙离子就穿过膜进入小泡囊,引起神经传递素释放到突触上.在通过突触的间隙扩散后,神经传递素附着于受激细胞的膜之上,引起去极化过程.通常认为去极化是以量子化的方式进行的,每一个小泡囊的贡献都是差不多相同的.去极化的量子化称为兴奋性突触后电位.这些兴奋性突触后电位源源不断的从不同树突传来并且累加,当总的去极化到达一定阈值时,动作电位就产生了.神经元以脉冲的形式放电,然后神经元就进入一个不应期(恢复期).

当许多这样的激发单元通过扩散耦合连在一起时,就会形成可激发介质.可激发介质本身就包含丰富的时空动力学,特别是行波动力学[316].我们下面对这方面进行简要的介绍.

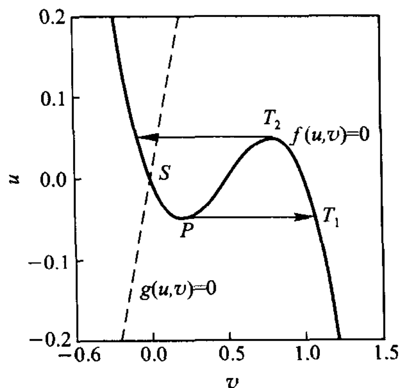



图 3-20 可激发系统在$(u,v)$平面上动力学示意图

### 3.3.1 可激发系统

最简单的可激发系统可用下面的双变量方程描述：

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=f(u,v),\qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g(u,v),\tag{3.3.1}$$

其中 $u,v$ 为系统相空间的变量. $0<\varepsilon\ll 1$ 这个小量使得 $u,v$ 的动力学有不同的时间尺度. 作为一个可激发系统，它具有以下特征：(1) 系统在相空间中有一个全局吸引的不动点或定态；(2) 系统的相空间存在两个区域 $D$ 和 $A$，不动点处于 $D$ 区. 所有从 $D$ 区域中出发的轨道都会在态变量没有大的变化的情况下回到不动点，而从 $A$ 区出发的轨道则会引起系统变量大的变化（当然也要回到不动点），我们称前者的响应为亚阈值的，后者的为超阈值的.

我们考虑最简单的情况，上述方程的动力学在 $(u,v)$ 平面上的图形由图 3-20 给出，图中 $g(u,v)=0$ 为一直线，$f(u,v)=0$ 为一个反 $N$ 字形. $g(u,v)=0$ 与 $f(u,v)=0$ 的交点给出系统的定态. 根据参数的不同，$g=0$ 曲线可与 $f=0$ 曲线有一个或三个（其中两个稳定）交点，即系统可能为单稳态或双稳态. 我们关心如图所示的惟一的定态解 $P$ 的情况. 对 $P$ 作线性稳定性分析很容易知道它是渐近稳定的. 一个小的扰动不会使 $u,v$ 发生大的变化（$D$ 区），系统会迅速回到定态. $f(u,v)$ 可以分成三段（两段有负的切线，一段正切线，后者与 $g=0$ 交点不稳定），$g$ 曲线仅仅在一段与 $f$ 相交. 另一段负切线的分支虽然与 $g=0$ 无交点，但它也会起到重要作用，另外由于 $\varepsilon\ll 1$ 使 $u,v$ 之间时间尺度上的巨大差异，系统对于大于 $Q$ 点的扰动是不稳定的，当系统超过 $(u_Q,v_Q)$ 阈值，对于 $v<v_{\min}$ 时，由于变量 $u$ 的动力学时间尺度远小于 $v$ 的动力学时间尺度，系统会被很快激发到远离定态解 $P$ 的区域（$A$ 区，即另一个切线斜率小于零的分支），然后慢慢沿 $f(u,v)=0$ 运动到 $v=v_{\max}$ 然后失稳（中间一支不稳定），迅速跳到 $f(u,v)=0$ 的稳定分支，最后弛豫到初始位置. 系统的可激发性的一个重要量度是 $\varepsilon$. 当 $\varepsilon$ 不是足够小时，系统变量的时间尺度没有分离，稳定点为一稳定焦点，不存在可激发性. 从上面的分析可以看出，一个可激发系统是由三个态描述的：休眠态，受激态和恢复态.

描述可激发系统有许多模型，它们大都与神经生物学，化学反应等一些具体背景有关[317~331]，例如 FitzHugh-Nagumo 方程[317~319]、Hodgkin-Huxley 方程[320]、Field-Noyes 模型[321~323]等. FitzHugh-Nagumo 模型可以用来描述神经元的放电过程，其作用函数为：

$$f(u,v)=u(a-u)(u-1)-v,\qquad g(u,v)=u-dv-b,\tag{3.3.2}$$

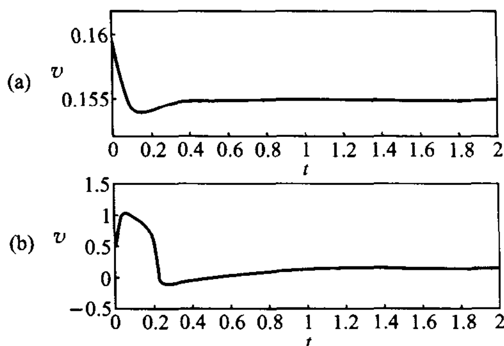



图 3-21 (a) FitzHugh-Nagumo 系统演化到定态；
(b) 由于大扰动而引起的系统的放电脉冲

其中 $a, d, b$ 为系统参量. 图 3-21(a)给出了 $b=0.0, a=0.5, d=1.0$ 时的定态，它是 $f(u,v)=g(u,v)=0$ 的交点 $S$. $P\to T_1\to T_2\to S$ 给出了由于大扰动而引起的系统的放电脉冲行为，其时间行为由图(b)给出.

设 FitzHugh-Nagumo 系统的定态为$(u_0, v_0)$，在其附近的线性稳定性分析可得到下面的雅可比矩阵：

$$J=\begin{pmatrix} A\varepsilon^{-1} & -\varepsilon^{-1} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3.3.3}$$

其中 $A=-3u_0^2+2(1+a)u_0-a$. 系统存在分岔点 $b_c$，当 $b<b_c$时，定态$(u_0, v_0)$是稳定的；$b>b_c$时，系统发生 Hopf 分岔，定态失稳，系统为极限环解. 对 $\varepsilon=0.005, d=1$ 的情形，$b_c$为

$$b_c=\frac{1+a}{3}-\frac{c}{60}-\left(\frac{1+a}{3}-\frac{c}{60}\right)\left(\frac{1-2a}{3}-\frac{c}{60}\right)\left(\frac{2-a}{3}+\frac{c}{60}\right), \tag{3.3.4}$$

这里 $c=10\sqrt{3-4a+4a^2}$. 当 $a=0.5$ 时，$b_c\approx 0.2623$. 当 $b<b_c$时，虽然系统的定态$(u_0, v_0)$是稳定的，但系统是可激发的. $b$ 越接近 $b_c$，系统就越容易被激发.

另一个讨论的比较多的可激发动力学的模型来自于化学中的 BZ(Belousov-Zhabtinsky)反应[324~328]. 在无量纲下，反应可由下面的三个耦合微分方程给出：

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}&=\frac{1}{\varepsilon}(qw-uw+u-u^2), \\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}&=\frac{1}{\delta}(\phi-qw-uw+fv), \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}&=u-v, \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

其中 $u,v,w$ 分别代表 $HBrO_2$, $Br^-$ 与催化剂的无量纲浓度.这个方程组描述了在有光照情况下光敏 BZ 反应中主要化学成分的均匀浓度的时间演化(不涉及空间问题).参数 $\phi$ 是考虑到由于照射产生的溴化物.光的强度控制溴离子的光化学产量,它是 BZ 反应中自催化的抑制剂.参数 $q,\varepsilon,\delta$ 描述三个变量的时间尺度.$w$ 变量是最快的变量,在绝热条件下可消去,这样就得到:

$$\dot{u}=\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{q-u}{q+u}(fv+\phi)+u-u^2\right],\quad \dot{v}=u-v, \tag{3.3.6}$$

因此这里 $f(u,v)=\left[\frac{q-u}{q+u}(fv+\phi)+u-u^2\right]$, $g(u,v)=u-v$.我们同样可以用 $f(u,v)=g(u,v)=0$ 定出系统的定态.图 3-22 给出了 $f=1.0$ 和不同 $\phi$ 时 $f(u,v)=0$ 和 $g(u,v)=0$ 的交点.当 $0<\phi<4q$ 时,两条线相交于不稳定分支上,此时 BZ 反应具有振荡解(无稳态解).当 $\phi>4q$ 时,交点位于稳定分支上,其特点与前面讨论的情况相似,因此 BZ 反应系统是可激发的.

根据可激发系统的特点,我们还可以构造简单的三态系统模型,即系统只有休眠态、受激态和恢复态,系统的状态可由输入变量 $v(t)$ 决定.当 $v(t)$ 超过某一阈值时,系统就会经历一个"放电"过程,即由休眠态跳至受激态,经过一段恢复时间后系统最后回到休眠态.这种构造在实际模拟时会节省大量的运行计算时间和容量.

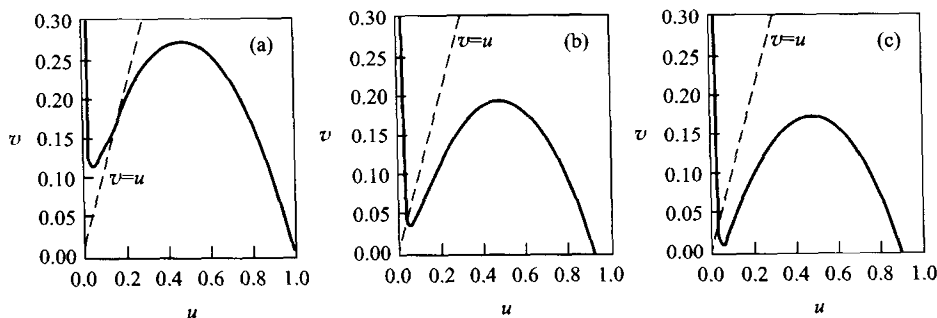



图 3-22 BZ 反应在 $f=1.0$ 和不同 $\phi$ 时 $f(u,v)=0$ 和 $g(u,v)=0$ 的交点

### 3.3.2 可激发介质中的行波

一、可激发介质

当我们考虑空间延展的可激发系统时,这由许多可激发单元组成的就成为可激发介质(excitable media)[332~339].在空间的每一点系统都是可激发的.例如

对于两变量系统,可激发介质可由以下的反应－扩散方程描述:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{\varepsilon}f(u,v)+D_u\nabla^2 u,$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}=g(u,v)+D_v\nabla^2 v,\tag{3.3.7}$$

方程右边为扩散项,$\nabla^2$为Laplace算子.对空间一维情况,$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}$;对二维情况,$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$.我们甚至可以考虑更为实际的空间三维情况.下面的讨论均限于一维和二维的情况.$D_u$,$D_v$为扩散系数.如果将空间离散化,上面的扩散项就成为扩散型耦合.

由于空间的耦合作用,对可激发介质空间一点的扰动不一定会保持在局域,它可能会通过耦合而沿着介质传播,能否传播取决于系统的可激发程度.如果对空间一点的扰动能传遍整个介质,我们则称此介质为**超可激发**的(superexcitable);如果对空间的一点扰动不会在整个介质中传播,而是在距离和时间内衰减掉,则称此介质为**亚可激发**介质(subexcitable media).因此扰动在亚可激发介质中是不能稳定传播的.

一个空间均匀分布的由可激发单元所组成的反应扩散系统可出现行波.假设我们对空间的一部分单元进行扰动,使其状态激发到阈值之上,则这些单元与相邻未被激发单元之间会形成巨大差异.由于扩散耦合,局域的激发产生的脉冲将会扩散到相邻区域,并将相邻区域的单元也拖到阈值之上,则它们也被激发,这种多米诺效应就形成了一个波峰.在波峰的背后,被激发区会逐渐弛豫到休眠态,而这个波峰将会通过扩散耦合传至更远的介质区域.从整体上来看,系统表现为一个孤立波从激发源向外移动.如果激发源处的震动是周期性的,则系统表现为一连串的行波,其运动速度由激发强度和扩散系数决定.

可激发系统的可激发性本质上来自于快变量$u(t)$的非线性效应(例如在BZ反应中,$u$表现为自催化效应).$u$与$v$的相互作用使系统恢复到休眠态,$u$通常称为触发变量,$v$则称为恢复变量.可激发系统有许多实际例子,它们的$u$与$v$都有明确的对应.例如在BZ反应中,$u$为$HBrO_2$浓度,$v$为催化剂的还原态浓度;在神经、肌肉组织(如心肌)中的电信号传播,$u$为膜电位,$v$为离子传导率.

二、一维可激发介质中的行波

下面我们先在一维空间中讨论行波的规律.我们考察下面的反应扩散方程:

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}=f(u,v)+\varepsilon^2\nabla^2 u,$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}=g(u,v)+\varepsilon\delta\nabla^2 v,\tag{3.3.8}$$

这里 $\delta = D_v/D_u$. 令 $u(x,t)=u(z), v(x,t)=v(z), z=x-ct$, $c$ 为行波波速. 这样我们把上述方程变换到运动坐标系中,上述方程成为 $z$ 的常微分方程:

$$\begin{aligned}&\varepsilon^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2}+\varepsilon c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}+f(u,v)=0,\\&\varepsilon\delta\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}z^2}+c\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}+g(u,v)=0,\end{aligned}\tag{3.3.9}$$

由于 $\varepsilon \ll 1$,我们可以以 $\varepsilon$ 为展开小量求上述方程的近似解. 我们求方程的一级近似解. 先令 $\varepsilon=0$,则 $u$ 的方程变为 $f(u,v)=0$. 从图 3-20 的 $f(u,v)=0$ 的曲线特征可以看出,当 $v\in[v_{\min},v_{\max}]$时,$f(u,v)=0$ 有两个稳定分支,设其解为 $u=h_{\pm}(v)$. 不失一般性,设 $h_+>h_-$,处于 $h_{\pm}$ 之间的第三个解分支不稳定,因此不考虑. 下面考虑这样的情况,即系统的解为:

$$u=\begin{cases}h_+(v),\text{当 } z<0 \text{ 时},\\h_-(v),\text{当 } z>0 \text{ 时},\end{cases}\tag{3.3.10}$$

注意,$h_{\pm}$ 两个分支是间断的,因此上面的解在 $z=0$ 时变得不连续了. 但系统的解在 $z=0$ 附近实际上是连续的,问题是我们忽略了方程中 $\varepsilon$ 的项. 所以,我们必须进一步考虑 $u=h_{\pm}(v)$之间的边界层宽度为 $O(\varepsilon)$的区域. 我们可引入重新标度的坐标系 $\zeta=z/\varepsilon$ 以考虑边界层附近的情况. 此时上述方程化为:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\zeta^2}+c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\zeta}+f(u,v)=0,\\&\delta\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\zeta^2}+c\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta}+\varepsilon g(u,v)=0,\end{aligned}\tag{3.3.11}$$

很显然第二个方程的 $\varepsilon$ 项可以不予考虑. 另外要求 $v$ 对所有 $\varepsilon$ 有界,则第二式有惟一解:$v=v_0=$ 常数, $v_0\in[v_{\min},v_{\max}]$. 这样系统的一级近似解由下面的方程及边界条件(边界层连续性的要求)给出:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\zeta^2}+c\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\zeta}+f(u,v_0)=0,\\u(-\infty)=h_+(v_0),u(+\infty)=h_-(v_0),\end{cases}\tag{3.3.12}$$

上述方程为波速的本征值问题,其中波速 $c$ 由 $v_0$决定. 此方程有一个触发的波前解,其波速 $c=c(v_0)$是 $v_0$的单调减函数. 若存在 $v_c$使得 $\int_{h_-(v_c)}^{h_+(v_c)}f(u,v_c)\mathrm{d}u=0$,则系统存在 $c(v_c)=0$ 的状态. 由于 $c=c(v_0)$是减函数,因此当 $v\in(v_{\min},v_c)$

时，$c>0$；$v\in(v_c,v_{\max})$时，$c<0$. 即对于 $v\in(v_{\min},v_c)$的情况，系统会形成向上跳的波峰($c>0$)，波峰通过后系统的局域状态由 $u=h_-(v)$跳到 $u=h_+(v)$，而 $v\in(v_c,v_{\max})$的情况则刚好相反，因此可以看到，变量 $v$ 控制着行波的速度与方向.

设$(u_s,v_s)$是可激发系统的均匀态解，即 $f(u_s,v_s)=g(u_s,v_s)=0$，此解由图 3－20 可知落在 $u=h_-(v)$的解分支上. 此时 $v_0$对应于均匀定态解 $v_s$，故 $c=c(v_s)$，即孤立波的波速由系统中不动点 $v_s$决定.

当系统中有一个周期为 $T$ 的激发性扰动源，则行波可以不断产生并传播，其波速不仅与 $v_s$有关，还与 $T$ 有关，即 $c=c(v_s,T)$. 当系统在周期源激发下产生行波，第一个激发波的波速与孤立波一样，即 $c=c(v_s)$. 当 $T$ 比介质的局域弛豫时间要长，则后来的激发波也会类似. 但当 $T$ 小于弛豫时间时，第二激发波就会在局域系统弛豫回$(u_s,v_s)$之前到达，造成新的扰动，设此时 $v=v_2$，显然 $v_2>v_s$，由于 $c(v)$的单调减特征，$c(v_2)<c(v_s)$. 这样系统就会自发调节到一个时空周期稳定态，此时波峰与波背的恢复变量为 $v_f,v_b$，它们满足$|c(v_f)|=|c(v_b)|$. 因此 $c$ 为 $v_f$与 $T$ 的函数. $T$ 可表为 $v_f$ 的函数，即 $T=T_++T_-$，$T_+=\int_{v_f}^{v_b}\frac{\mathrm{d}v}{g(h_+(v),v)}$，$T_-=\int_{v_b}^{v_f}\frac{\mathrm{d}v}{g(h_-(v),v)}$. 这样可以通过消去 $v_f$而得到 $c$ 与 $T$ 的关系，即色散关系. 这个色散关系可由坐标变换 $\varphi=kx-\omega t$ 代入到方程(3.3.9)中计算得到，这里 $k$ 是行波的波数，$\omega=2\pi/T$. 将 $\varphi$ 代入方程，我们有：

$$\begin{cases}\varepsilon^2k^2\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+\varepsilon\omega\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}+f(u,v)=0,\\[2ex]\varepsilon^2k^2\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\varphi^2}+\varepsilon\omega\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi}+\varepsilon g(u,v)=0.\end{cases}\tag{3.3.13}$$

我们可以求出 $u,v$ 对 $\varphi$ 的 $2\pi$ 周期解. 在此解的限制下系统的 $k$ 与 $\omega$ 需满足一定限制，可定出 $k$ 与 $\omega$ 的关系，由此也可得到 $c=c(T)$.

对于一维介质来说，当它处于可激发区时，它本身能传播行波. 但是当一维系统空间边界条件是开放的话，就需要在一端有一个持续的振动源才能不断有行波运动到另一端. Glass 等人研究表明[336]，当一维系统成为一个闭合环时，则系统不再需要振荡源的存在. 只要在环上任何一处制造一个非均匀扰动，则可以使环上产生持续行波. 我们可以用下面的扩散耦合的 FitzHugh-Nagnmo 振子系统进行模拟：

$$\begin{cases}\varepsilon\dot{u}_n=u_n(a-u_n)(u_n-1)-v_n+D(u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}),\\ \dot{v}_n=u_n-dv_n-b,\ n=1,2,3,\cdots,N,\end{cases}\tag{3.3.14}$$

计算中 $\varepsilon=0.05, d=1.0, a=0.5, b=0.25<b_c, D=1.0, N=100$，边界条件为 $(u_{n+N}, v_{n+N})=(u_n, v_n)$. 图 3－23 给出了系统的时空演化，我们在 $n=1$ 的振子上制造一个大的扰动，然后让系统自由演化，显然我们可以得到持续的行波解. 对一维的行波来说，两个相对而行的行波相碰后通常会消失，但对有的特殊系统则未必成立.

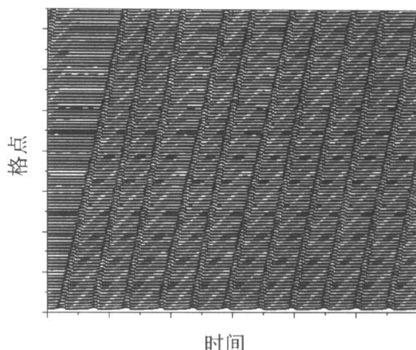



图 3－23　扩散耦合的 FitzHugh-Nagnmo 振子系统的时空演化

三、二维空间中的行波：螺旋波

在二维位形空间中，可激发介质的行波行为则要复杂得多，其中最简单的一种是靶波. 当激发源是一个点时，系统由于激发会形成环状波峰向外扩张. 若激发源是周期性，则可观察到环状的一系列行波，这种行波称为靶波，因其形状如同射击的靶子. 当激发源是一条线（很长的线），则系统会形成一个平行的线状波，波的前进方向垂直于线的方向. 如激发源是别的形状，系统可能会产生复杂的行波. 螺旋波就是一种较为复杂的行波. 下面我们作一介绍.

通过下面的分析过程，我们大致会了解螺旋波的形成过程. 这个分析也是在数值模拟时产生螺旋波的一种典型方式. 首先我们在介质中产生一个线状波（这很容易）然后将线状波从中间切断并抹掉一小段（可令这一段的每一点状态为其定态），这样我们就在线状波上制造了两个端点，如图 3－24(a)所示. 在离端点较远的区域，线波的波峰附近的区域每一点都受到左右两个方向扩散的触发变量的影响，因此容易激发，具有较高的波速；相比之下，在端点区域，线波波峰的邻近点只受到一个方向上触发变量的激发，相对激发强度较小，因而波速较慢. 由于这种差异，当线波向前推进时，端点位置的慢速推进使其滞后，导致线波在端点附近弯曲，线波的局部运动方向也发生变化，如图(b). 由于端点效应，在长时间后线状波就会变为螺旋波，如图(c)所示. 因此，螺旋波的产生是由于行波在二维介质中运动发生弯曲所致. 由于螺旋波的波峰弯曲，行波的速度不仅是恢复变量与激发源周期 $T$ 的函数，而且是波峰线上曲率的函数，这由程涵关系给出：

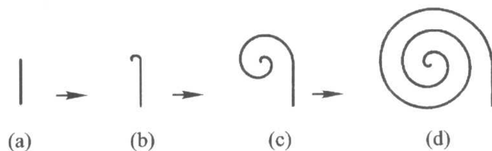



图 3－24　螺旋波的形成过程

$$N = c(v_f) - \varepsilon K, \tag{3.3.15}$$

这里 $N$ 为波峰法线方向的速度，$K$ 为波峰的局部曲率. 上述关系说明波峰的法向速度为平面波的速度加上一个曲率带来的修正，这个关系是一级近似的结果. 当 $K$ 很小时，行波的弯曲效应不明显，行波可看作平面波. 在 $K \gg 1$ 时，曲率效应就必须考虑. 从此结果可以看出，当波峰线向离开波传导的方向弯曲时，$K > 0$，$N < c(v_f)$，这一结果与前面的定性讨论完全一致.

对一个逆时针旋转的螺旋波，其波峰曲线满足如下关系：

$$x = r\cos[\theta(r) - \omega t],\ y = r\sin[\theta(r) - \omega t]. \tag{3.3.16}$$

波峰的曲率为：

$$K = \frac{\Psi}{(1+\Psi^2)^{3/2}} + \frac{\Psi}{r(1+\Psi^2)^{1/2}}, \tag{3.3.17}$$

其中 $\Psi = r\dfrac{\mathrm{d}\theta(r)}{\mathrm{d}r}$. 波峰的法向速度 $N$ 为：

$$N = \frac{\omega r}{(1+\Psi^2)^{1/2}}, \tag{3.3.18}$$

将 $K$，$N$ 代入程涵关系，可以得到一级近似下 $\Psi$ 的方程：

$$r\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}r} = (1+\Psi^2)(rc\varepsilon^{-1}(1+\Psi^2)^{1/2} - \varepsilon^{-1}\omega r^2 - \Psi). \tag{3.3.19}$$

尽管方程具有复杂的形式，原则上我们可以得到 $\Psi(r)$，进一步用 $\Psi = r\dfrac{\mathrm{d}\theta(r)}{\mathrm{d}r}$ 可解出螺旋波的具体表达式 $\theta(r)$：

$$\theta(r) = \int_0^r \frac{1}{r'}\Psi(r')\mathrm{d}r', \tag{3.3.20}$$

螺旋波的特征频率 $\omega$ 与波速 $c$ 之间满足本构关系(临界关系)：

$$\omega = m^* c^2/\varepsilon, \tag{3.3.21}$$

$m^*$ 为一常数.

对螺旋波需要注意以下几点：(1) 螺旋波是自持续的，它不需要一个周期性的激发源，一旦产生，螺旋波就会自发的不断传播；这是螺旋波与靶波的本质不同所在.(2) 螺旋波的组织中心是一个点缺陷，系统所有的动力学行为都受这个缺陷行为的左右；(3) 螺旋波的中心缺陷从数学角度来说是一个奇点，在其附近很小的区域内前面的反应扩散方程不适用，因此处理此类时空缺陷一直是非线性科学中的难题.(4) 螺旋波在其他振荡介质中也可观察到，其本质上是相波，即由周期振荡的时空相位差产生.从本质上看，可激发系统中的螺旋波起因于系统的全局失稳，而振荡介质中的螺旋波则来自于系统的局域失稳.

实验上，可激发系统的螺旋波可在 BZ 反应、心脏动力学、黏性霉菌自组织、

蛙类卵细胞中的钙离子螺旋波等许多不同的系统中观察到.因此螺旋波的存在具有一定的普遍性[316].

目前对于可激发系统螺旋波动力学的研究主要集中于以下几个方面:(1)螺旋波在不同物理,化学生物和生态系统中的产生机制和实验观察;(2)螺旋波自身结构的研究特别是缺陷点附近的结构分析;(3)与螺旋波失稳有关的动力学分岔研究.对于一个稳定的螺旋波,系统中的缺陷很少;且数目不随时间变化.当改变系统控制参量超过一定临界值时,螺旋波会自发产生新的缺陷,每个缺陷都倾向于产生新的螺旋波.当系统内的缺陷数量大大增加时,系统就会进入螺旋波湍流态,即时空混沌.目前研究的螺旋波失稳机制主要有 Eckhaus 失稳(行波的长波不稳定性)和漫游失稳(螺旋波缺陷中心的轨迹不稳定性);(4)对螺旋波的控制与消除的研究,此类研究密切联系着心脏动力学的研究.生理学的实验表明,在心脏病患者中观察到的一类心律不齐或心动过速现象可能是由于心肌电信号出现螺旋波引起的,而心颤致死与螺旋心肌电波的失稳有密切的关系.因此研究如何消灭心肌的螺旋波电信号不仅有很大的潜在应用价值,而且可以促进科学界对螺旋波有关规律的深入了解.总之,关于螺旋波动力学的研究是一个跨学科的大课题,尚有许多问题亟待解决.

### 3.3.3 缺陷对行波的影响

迄今为止我们所讨论的介质都是空间均匀的,即空间每一点的激发程度都完全相同,参数完全相同.其实要做到这一点并不是一件容易的事,空间的参数分布总会因为外界的干扰或本身的原因而不均匀,这样我们就需要考虑这些不均匀效应,我们称之为缺陷.不均匀性对行波的传播有很大的影响,它可以使得波的传播和空间斑图结构更为复杂[340].这种情况下,对波的控制与同步化在实际应用中是很有意义的.

我们考虑由 FitzHugh - Nagumo 振子组成的一维介质:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} &= u_i(a-u_i)(u_i-1)-v_i+K(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}), \\ \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} &= u_i-\mathrm{d}v_i-b_i, \end{aligned} \tag{3.3.22}$$

计算中我们取 $\varepsilon=0.005, a=0.5, d=1.0$.在前面不同的是,$b_i$ 是不完全相同的,它可以是随机分布,也可以是只有个别的不同值.我们首先考虑介质中只有少量缺陷的情况.我们关心的是 $b_i<b_c$ 时整个介质的情况.下面我们考虑开放边界条件的情况:$(u_{N+1},v_{N+1})=(u_N,v_N),(u_0,v_0)=(u_1,v_1)$并且在整个介质的左端有 $N_0$ 个相同的振荡型杂质,即 $b_i=b_0>b_c, i=1,2,\cdots,N_0$,其他单元 $b_i=b_e<b_c, N_0<i<N$.

在图 3-25(a)-(e)中,我们给出系统在 $b_e=0.24$, $b_0=0.30$, $N_0=1$ 时的时空行为,横轴为时间,纵轴为格点.当 $K=0$ 或很小时,介质中的单元都不能被振荡杂质所激发.随着耦合强度的增加,靠近缺陷的几个单元被激发,但远离介质的部分仍不能被激发,即激发波前只能在短距离内传播.当 $K=0.0148$ 时,由图(a)可看出,激发波可以传播较长的距离.我们可以看到,不是缺陷的每一个脉冲都能远距离传播,仍然有一些脉冲只能传播很短的距离.当 $K=0.015$ 时(图(b)),缺陷的连续两个脉冲可以传播整个介质,而接下来连续两个脉冲无法传播很远.随着 $K$ 的不断增加,越来越多的脉冲可以传遍整个介质[图(c),(d)].当 $K=0.021$ 时,缺陷的每一个脉冲都会引起一个在整个介质中的行波,见图(e).对于很大的耦合强度 $K$,比如 $K=0.10$,系统进入整体振荡死亡状态,介质中不再有波的传播.

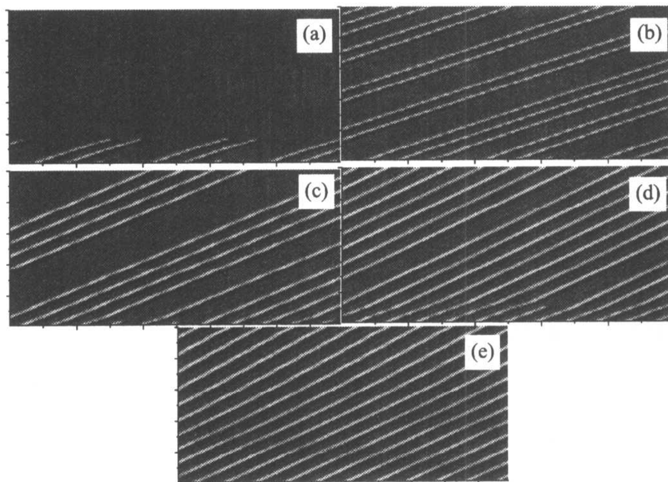



图 3-25 由 FitzHugh-Nagumo 振子组成的一维介质系统的时空行为

为研究由缺陷所引起的行波,我们可以定义介质中激发单元的百分比:

$$P_e(K) \propto N_e(K)/N, \tag{3.3.23}$$

这里 $N_e$ 代表在由 $N$ 个单元构成的介质中被激发的单元个数.在图 3-26(a),我们给出 $P_e(K)$ 与 $K$ 的关系,$b_e$, $b_0$ 与前面相同.可以发现,当 $K=K_c^1$ 时,$P_e$ 在一个小的耦合范围内由零迅速上升到 1.之后 $P_e$ 与 $K$ 的很大范围内保持为 1,直到 $K=K_c^2 \approx 0.163$, $P_e \to 0$.在 $K \in (K_c^1, K_c^2)$ 的范围内,波可以在整个介质中传播.在 $K_c^1$ 的附近,被激发的单元个数有以下的标度律:

$$N_e(K) \propto (K_c^1 - K)^{-\alpha_1}, \tag{3.3.24}$$

这里 $\alpha_1 = 1/2$.在图 3-26(a)的小图中我们给出数值结果($K_c^1 \approx 0.014968$),可

以看到很好的标度律.系统在 $K_c^1$, $K_c^2$,两个临界点附近的行为是完全不同的,在 $K_c^2$时,所有振子会突然停止振荡,导致波不能传播.

从前面的讨论可以看到,系统在 $K_c^1$附近存在丰富的动力学.我们可以定义第 $i$ 个单元的平均脉冲频率:

$$\omega_i = \lim_{T\to\infty} 2\pi M_i(T)/T, \tag{3.3.25}$$

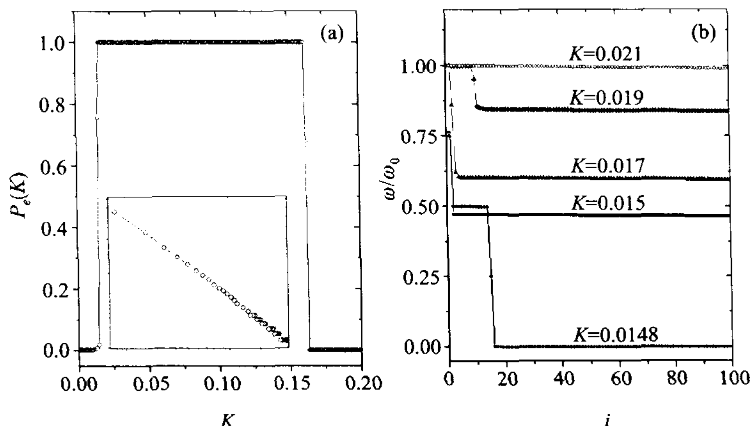



图 3-26　(a) $P_e(K)$与 $K$ 的关系;(b) 不同耦合强度下的 $\omega_i/\omega_0$分布

$M_i(T)$为在时间 $T$ 内的脉冲数目,上面实际就是振子的平均旋转数.我们将振荡缺陷的旋转数定义为 $\omega_0$.在图 3-26(b),我们给出不同耦合强度下的 $\omega_i/\omega_0$分布.可以发现,当 $K=0.014\,8$ 时,系统由两大同步集团组成,其中一个为 $\omega_i=\omega_0/2$,另一个为 $\omega_i=0$.靠近缺陷的振子脉冲频率为 $3\omega_0/4$,当 $K=0.015$时,两个集团融合成一个大的集团,$\omega_i/\omega_0\approx0.47$.增大 $K$ 会使更多的振子 $\omega_i$接近于 $\omega_0$.当 $K=0.019$ 时,所有振子都有 $\omega_i=\omega_0$,说明所有单元都与缺陷同步振荡,也说明波可以在整个介质中无损传播.

在图 3-27(a)中,我们给出 $N_0=1$ 个缺陷时系统波传播的临界线 $K_c=F(b_e, b_0)$.这些线是对不同的 $b_0$画的.在临界线以上为系统的行波区.我们可以看到许多的舌头.当 $b_0$较小时,舌头就比较小,当 $b_0$增加时舌头变大.我们可以看到所有的舌头都有共同的左边界,说明左边界与 $b_0$无关:$K_c=F(b_e)$.当 $b_e\to b_c$,$K_c\to0$.当 $b_e\to b_e^c$(图中的虚线),可以看到 $K_c\to\infty$.$b_e^c$给出了可激发与亚可激发介质的边界.临界线的右边部分是 $K_c$的增函数,当 $b_e\to b_c$时,$K_c\to\infty$.

缺陷的数目 $N_0$在波传播方面也是一个重要的调节参量.当这 $N_0$个缺陷零散的分布于介质中时,波的行为及相图将与 $N_0=1$ 的情况类似.但这些缺陷成

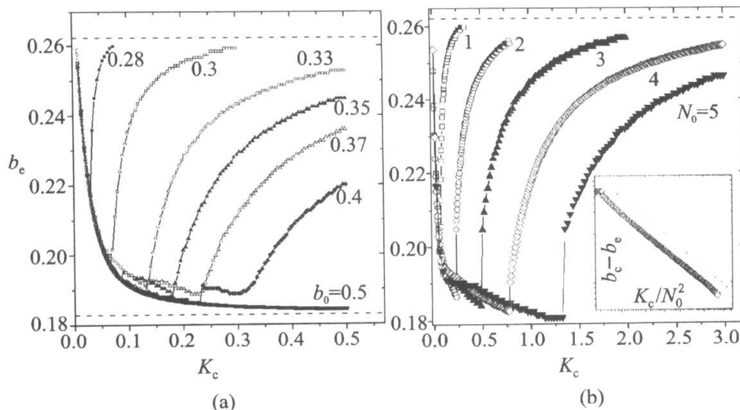



图 3-27 (a) $N_0=1$ 个缺陷时系统波传播的临界线；
(b) $b_0=0.3$ 时不同 $N_0$ 的临界线

为一个集团时，相图的临界曲线会有很大改变. 在图 3-27(b)中，我们给出 $b_0=0.3$ 时不同 $N_0$ 的临界线 $K_c=F(b_e,b_0)$. 可以看到 $N_0>1$ 的波传播舌头比 $N_0=1$ 的要大得多. 这些临界线的左边部分与 $N_0$ 无关、右边部分随 $K_c$ 上升，当 $b_e\to b_c$ 时，$K_c\to\infty$. 这些线可以通过 $K_c$ 用标度的 $K_c/N_0^2$ 而重合到一起. 这些线可以写成统一的形式：

$$b_e=b_c-A\left(\frac{K_c}{N_0^2}\right)^{-\alpha},\tag{3.3.26}$$

其中 $A$ 是一个可由数值定出来的常数，$\alpha\approx1.65$.

# 3.4 噪声对可激发介质的作用

### 3.4.1 噪声驱动可激发系统中的相干共振

噪声在系统非线性的情况下，可以与外来驱动适当匹配而产生随机共振的现象. 当一个可激发系统受到噪声的作用时，一旦噪声超过一定阈值，系统就会产生脉冲放电的现象. 下面可以看到，即使没有周期驱动，我们仍可以观察到噪声与可激发系统的共振现象. 这种现象很多学者称之为**相干共振**，它与一般意义上的随机共振的不同之处就在于它不需要周期驱动，只要噪声对一个自治系统的作用即可达到[341,342]. 可激发介质中的相干共振又与人们曾研究过的随机共振有所不同，后者往往要求系统在(霍普夫)分岔点出现极限环运动，前者则没有这样的要求[343~354].

下面考虑如下简化的 FitzHugh-Nagumo 模型：

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{x} = x - \frac{1}{3}x^3 - y, \\ \dot{y} = x + a + D\zeta(t), \end{cases} \tag{3.4.1}$$

$\varepsilon \ll 1$，$a$ 为系统的可激发参量. 当 $|a|>1$ 时，系统为稳定不动点解；$|a|<1$ 时系统为极限环解，当 $|a|$ 略大于 1 时，系统为可激发的. 下面的讨论中 $a=1.05$，$\varepsilon=0.01$. 上述方程第二式右边考虑了强度为 $D$ 的高斯白噪声.

图 3-28 给出了不同噪声强度下系统的时间序列. 当 $D=0$ 时，系统保持为固定点解. 一个小的噪声会引起系统不太频繁的脉冲放电现象. 每一次放电都是由于扰动超过一定阈值时系统的可激发性导致的大幅度振荡引起的，如图最下面 $D=0.02$ 的情况. 随着 $D$ 的增加，这种脉冲现象越来越频繁的爆发，如图的中间小图($D=0.07$)和上面小图($D=0.25$)所示. 可以看到当 $D=0.07$ 时，噪声引发的振荡比较规则，说明一定强度的噪声可以使系统出现相干的振荡. 这种有序的出现与随机共振较为类似，但是它完全是通过系统本身与噪声相互作用

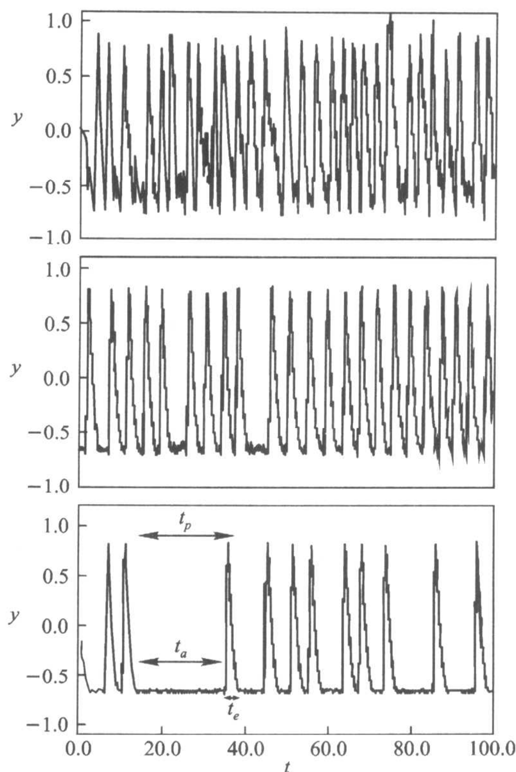



图 3-28 FitzHugh-Nagumo 系统在不同噪声强度下系统的时间演化行为

的结果.系统的相干性可以通过计算下面的自关联函数进一步分析：

$$c(\tau)=\langle\tilde{y}(t)\tilde{y}(t+\tau)\rangle/\langle\tilde{y}^2\rangle, \qquad (3.4.2)$$

这里 $\tilde{y}(t)=y(t)-\langle y\rangle$,$\langle\rangle$为系统的长时间平均.图 3－29 给出了对应于图 3－28的系统的自关联函数,很明显可以看到当 $D=0.07$ 时,自关联函数有很强的振荡,说明此时系统的相干性(有序性)很强.我们还可以计算关联时间：

$$\tau_c=\int_0^{\infty}c^2(t)\mathrm{d}t. \qquad (3.4.3)$$

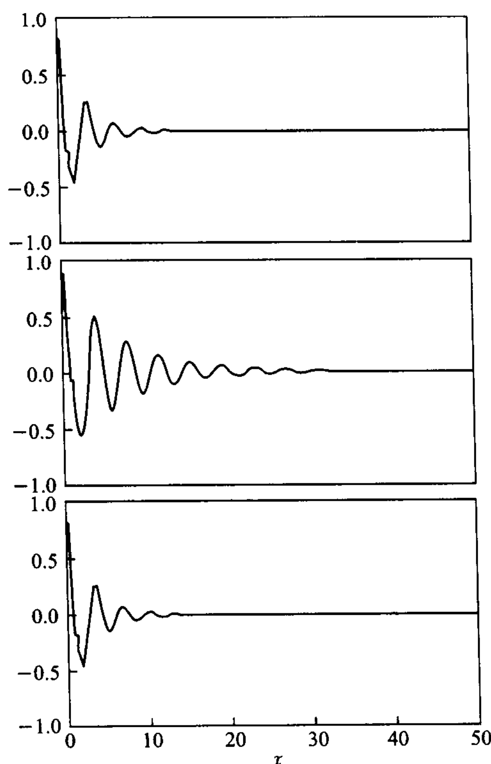



图 3－29 系统的自关联函数随时间的演化

图 3－30(a)中的实线给出了系统的自关联时间与噪声强度的变化情况.可以看到,随着 $D$ 的增加,系统的关联时间随之上升,然后在某一 $D_{res}\approx0.6$ 达到最大;当 $D$ 继续增大时,系统的关联时间又迅速下降,说明系统的有序性又下降.

我们还可以考察系统的信噪比 SNR 的变化情况.由于可激发系统表现为脉冲现象,脉冲强度不随外来扰动大小改变,扰动只会改变脉冲的频率,因此脉冲实际可以看成两次脉冲间隔 $t_p$的序列.SNR 可以通过下面的式子计算：

$$R_p = \sqrt{\mathrm{Var}(t_p)}/\langle t_p \rangle, \tag{3.4.4}$$

其中 $\mathrm{Var}(t_p) = \langle t_p^2 \rangle - \langle t_p \rangle^2$ 为 $t_p$ 的涨落大小，上面实际上是 $t_p$ 的相对涨落，它是 SNR 的倒数. 图 3-30(a)中的虚线给出 $R_p$ 随 $D$ 的变化曲线. 在 $D_{res}$ 处，$R_p$ 表现为一个最小值，说明此处 $t_p$ 的涨落最小，即系统具有最好的规则放电现象.

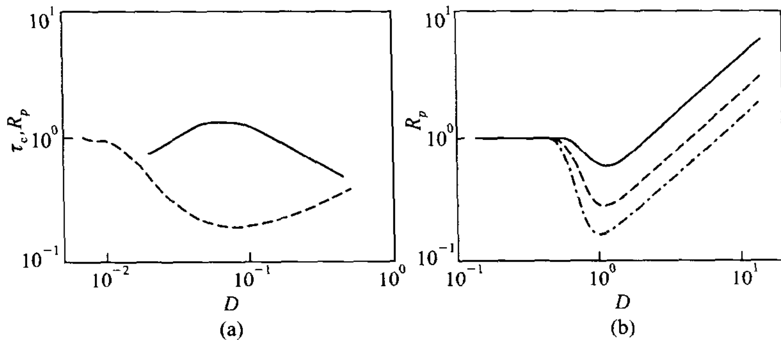



图 3-30 (a)实线：自关联时间与噪声强度的变化情况，虚线：$R_p$ 随 $D$ 的变化曲线；(b)对分段势(3.4.9)$R_p$ 与 $D$ 的关系

从物理机制上看，相干共振的出现与系统的可激发特性有直接的联系. 对可激发系统，它有两个特征时间：激发时间 $t_a$ 和脉冲时间 $t_e$，它们均标于图 3-29 上. 激发时间 $t_a$ 是由系统的不动点 $x = -a, y = a^3/3 - a$ 激发系统所需的时间，即由上一次放电结束到下一次放电开始的时间间隔；脉冲时间 $t_e$ 是指系统由激发态回到不动点所需的时间. 显然 $t_a + t_e = t_p$. 根据 Kramers 关系，$t_a$ 随噪声强度的增加而迅速减小：

$$\langle t_a \rangle \sim \mathrm{e}^{C/D^2}, \tag{3.4.5}$$

$C$ 为一常数. 对于小噪声 $D$ 来说，$\mathrm{Var}(t_a) \approx \langle t_a \rangle^2$，并且 $t_a \gg t_e$. 因此在小 $D$ 区域 $t_p \approx t_a$. 在这一区域，$R_p \approx R_a \approx 1$(由 $R_p$ 定义式). 对于大 $D$，$t_a$ 的贡献可以忽略(频繁的放电)，此时 $t_p \approx t_e$. 如果在激发态的运动是均匀的，则$\langle t_e \rangle$与 $D$ 的关系不大，这样 $\mathrm{Var}(t_e) \sim D^2 \langle t_e \rangle$，因此在大 $D$ 区域，$R_p \approx R_e \sim D \langle t_e \rangle^{-1/2}$，如果激发的阈值不大并且 $t_e$ 比较大，则可以看到 $R_p$ 的极小值现象，即系统存在相干共振.

上述的相干共振可由一个简单的解析模型得到说明. 注意到 $\varepsilon$ 是一个小量，系统的快慢时间尺度分开，慢变量 $x$ 是 $y$ 的函数. 沿系统慢运动线，其动力学可由下述一维 Langevin 方程描述：

$$\dot{y} = -U'(y) + D\zeta(t), \tag{3.4.6}$$

$U(y)$为具有单个极小值的非线性势. 当激发超过一定阈值,系统的快速运动可由 $y$ 的一个跳跃(重新注入)来描述即可. 这样上面的方程可定义 $y$ 的负半平面:$y\in(-\infty,0)$,系统的激发用 $y$ 由阈值 0 向 $y_0$ 的跳跃代表即可. 这个放电过程反映在随机运动中即由 $y=y_0$的逃逸过程,以 $y=0$ 为吸收边界条件,$t_p$ 即系统的首通时间:

$$\langle t_p(y_0)\rangle = 2D^{-2}\int_{y_0}^{0} \mathrm{d}v \int_{-\infty}^{v} \mathrm{d}u\, \mathrm{e}^{\{2[U(v)-U(u)]/D^2\}}. \tag{3.4.7}$$

$$\langle t_p^2(y_0)\rangle = 4D^{-2}\int_{y_0}^{0} \mathrm{d}v \int_{-\infty}^{v} \mathrm{d}u \langle t_p(u)\rangle \mathrm{e}^{\{2[U(v)-U(u)]/D^2\}}, \tag{3.4.8}$$

由此可以算出系统的 $R_p$. 图 3-30(b)给出了分段线性势

$$U(y)=\begin{cases} A+B+By, & y\in(-1,0) \\ -Ay, & y\in(-\infty,-1) \end{cases} \tag{3.4.9}$$

在 $A=B=1$,$y_0=-5$(实线),$-20$(虚线),$-50$(点划线)时的 $R_p$与 $D$ 的关系,这一结果与前面的对 FitzHugh-Nagumo 系统的数值结果定性上是相符的.

上述的相干共振及其机制的探讨是 Pikovsky 等人在 1997 年得出的结果[360]. 其后 Makarov 等人用修正的 FitzHugh-Nagumo 模型得到了类似结果[353],不同之处在于他们考虑的是系统处于小幅振荡与大幅振荡激发共存的状态. 不管怎样,这种相干共振使得系统呈现更强的有序性,说明了噪声可以使系统更为有序.

### 3.4.2 噪声对波传播的影响

在可激发介质中,噪声对介质中时空动力学的影响是十分复杂的. 由于可激发介质自身的特殊动力学,对噪声效应的研究既是非常必要的,也是十分有意义的. 一方面,噪声是不可避免的,如何适当地将噪声转化成有利因素促进系统序的生成一直是近几十年来人们努力的方向;另一方面,噪声对可激发介质的作用研究本身就是对随机理论和非线性科学的有益补充和推动. 更有意义的是,这类系统及其出现的现象是许多不同实验领域都可以观察到的,其一般性的结果有直接的指导意义. 下面我们首先关心的是可激发介质的波在噪声影响下的动力学行为.

一、光敏 BZ 反应介质中波的传播

1998 年,Kádár 等人在 Nature 上发表了一篇在亚可激发介质中的噪声促进行波传播的文章,引起了广泛的关注[355]. 他们报道了在光敏 BZ 化学反应波的传播中噪声的正面作用. 化学介质本身是亚可激发的,自身无法传播长程的波. 但在用空间光强随机的光照射时,波的传播可以大大加强,在某一优化强度下达

到最佳效果.

他们的实验是用硅胶薄层进行的,在薄层中有固定不动的钌(II)——二吡啶基,一种BZ反应的光敏催化剂.硅胶不断地在一个树脂玻璃反应器中用新鲜的、不含催化剂的试剂清洗,以使系统保持在不变的非平衡态.从硅胶下面,我们用来自通过带过滤器的视频放映机的空间不均匀的光束照射,光强被调整到合适的参照强度,以使系统处于可激发性水平以下(亚可激发态)(它由溴离子的光化学反应产量决定,溴离子浓度是BZ反应的自催化阻滞子).光照的区域空间上由方形的单元阵列构成,每个单元定时随机调节其光强,光强可大于或小于亚可激水平.随机的光强是以参照强度为中心的高斯分布.

在图3-31(a)~(d)中给出的是时空噪声对波传播的影响.每一张图都是由许多相隔相同时间拍照的波叠加而成的,由此可以看到波的传播行为.以参照

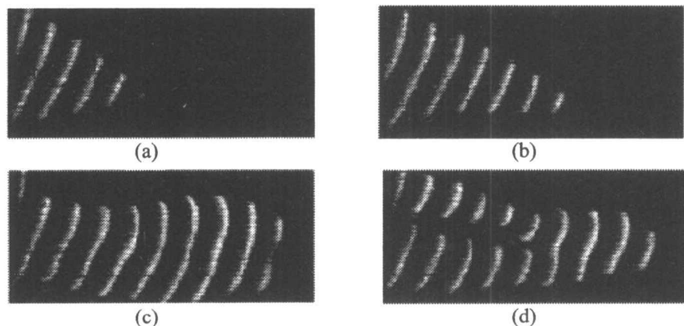


图3-31 (a)~(d)时空噪声对BZ反应系统波传播的影响

光强为零噪声($D=0$),图(a)给出的即是$D=0$时的波形.可以看到,波在传播过程中不断收缩,衰减,很快就消失,这种衰减不同于在可激发区形成螺旋波的情形,衰减是由于此时介质处于亚可激发区,不支持波的传播.当$D\neq 0$时,由图(b)可以看出,波的传播距离明显增加;在图(c),可以看到合适的噪声强度可以使行波无衰减地传遍整个介质.当光强继续增加时,从图(d)可看到波虽然可以传得很远,但波出现了破碎现象,这种破碎程度在光强很大时会更为严重.上述现象反应出噪声在一定情况下可以促进波的传播.为了更清楚地反映这种加强作用,图3-32给出了信号强度与噪声强度的关系.图中的相对信号强度定义为波停止传播前的波峰尺度与亚可激发区时波峰尺度的比值.可以看到很明显的共振峰,与前面所讨论的时空随机共振现象很相似.

上面的实验现象在模型的数值模拟中也可以看到.上述实验可用下面的修正Oregonator模型描述:

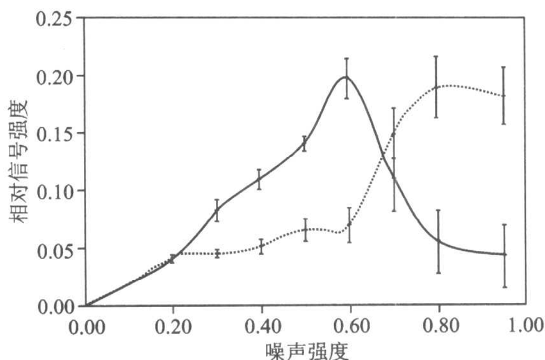



图 3－32 信号强度与噪声强度的关系

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{\varepsilon}(q\omega - u\omega + u - u^2) + \delta \nabla^2 u, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = u - v, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{1}{\varepsilon'}(\phi - q\omega - u\omega + fv) + \nabla^2 w, \end{cases} \tag{3.4.10}$$

其中 $u, v, w$ 分别代表 $HBrO_2$，$Ru(bpy)_3^{3+}$，$Br^-$ 的无量纲浓度，$\nabla^2$ 为 Laplace 算子，$\delta = D_u/D_w$ 为 $u$ 与 $w$ 扩散系数的比值，$\varepsilon$、$\varepsilon'$、$q$ 为标度参量. $f$ 为一个可调的化学计量参量，$\phi$ 代表由于光照而导致的溴化物的产生率，它正比于光强(噪声强度)，可作为系统激发性的控制参量. 当 $\phi = \phi_0$ 时，设系统处于亚可激发状态，则 $\phi = \phi_0[1 + G(x, \sigma)/2]$ 描写的是一般情况下的参量，其中 $G(x, \sigma)$ 为一个高斯分布，$\sigma$ 代表噪声强度. 图 3－33 画出了当 $\varepsilon = 0.03$、$\varepsilon' = 0.000\ 3$、$q = 0.001\ 5$、$f = 1.0$、$\phi_0 = 0.059\ 85$、$D_u = D_w = 1.0$、$D_v = 0$ 时系统在不同噪声强度下的时空情况，图中所表现的噪声加强传播现象与实验在定性上非常符合.

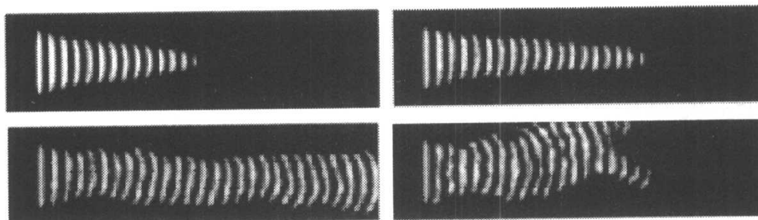


图 3－33 数值模拟的系统在不同噪声强度下的时空情况

上述现象不仅在 BZ 反应介质中，在其他的可激发介质中同样也可观察

到[356,357]. 我们可以考虑下面的 FitzHugh-Nagumo 介质在亚可激区域噪声的影响情况:

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = u(a-u)(u-1) - v + D_u \nabla^2 u,$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = u - dv - b + D\zeta(\boldsymbol{r}, t), \tag{3.4.11}$$

这里 $\varepsilon = 0.005, a = 0.5, d = 1.0, b$ 的取值使介质在无噪声($D = 0$)时不能传播行波(如 $b = 0.18$). 图 3－34 给出了 $D = 0$ 及增加 $D$ 时系统的波峰传播情况,可以看到随着 $D$ 的增加,介质在 $D$ 的某一范围内可以较好地支持波的传播,过强的噪声会使波峰支离破碎. FitzHugh-Nagumo 介质是描述神经和神经胶质组织的重要模型. 人们认为神经胶质组织是亚可激媒质,因此噪声对于信号的传播起着关键的作用.

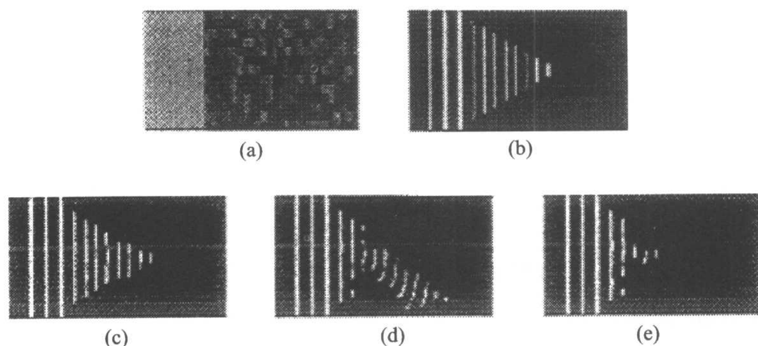



图 3－34 FitzHugh-Nagumo 介质在亚可激区域 $D = 0$ 及增加 $D$ 时系统的波峰传播情况

## 二、噪声诱发的雪崩现象与热波

亚可激介质在噪声的作用下可以帮助波的传播. 这种正向作用应该说只限于噪声的一个范围,过大的噪声会使耦合无法在大空间尺度组织而形成整体的波传播,因而会导致波的破碎. 尽管波破碎,但这些波在空间的局部仍是有序的结构,一个有意思的问题是:这些局域波的尺寸都是多大? 有什么规律吗? Wang Ji-chang 等人于 1999 年报道了他们在光敏 BZ 反应中的结果[358],实验配置与他们 1998 年 Nature 上的工作装置基本一样.

图 3－35 给出了他们的实验结果. 图(A)是无噪声的情况,此时介质处于亚可激状态,因而不会有波的长程传播. 图(B)～(E)给出的是当加上一个噪声之后介质中的动力学情况(每个图之间的间隔是 5 秒),噪声的空间结构如图(F)所示,它的变化每 10 秒随机改变,可通过控制光强进行. 当系统受到噪声作用之

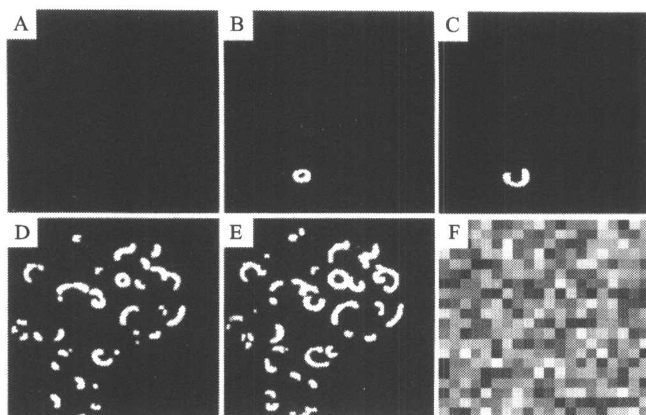



图 3－35 噪声诱发雪崩现象的实验结果

后，会在介质随机的空间位置产生一个小尺寸靶波波峰，波峰随时间推移而变大，然后破碎成为一个螺旋波小片段，如图(C)所示．随着时间的推移，介质中会产生更多的波峰，它们随时间都会破裂．如果介质的尺寸足够大，我们会在介质中观察到各种尺寸的波峰，它们在大尺度上是无序的，但在局域仍可保持一定的波形．这种局域波是噪声与耦合相互竞争的结果，由于耦合而在局域形成短程有序，由于噪声而在整体上仍属于长程无序状态．

类似的现象可用数值模拟观察到．图 3－36 是用 Barkley 模型模拟的结果，同样使系统处于亚可激状态：

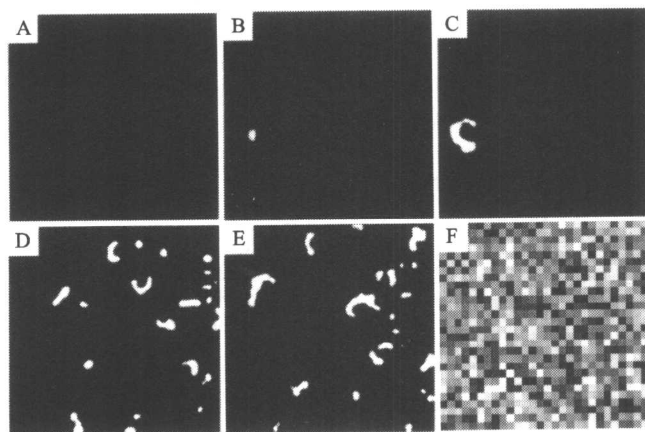



图 3－36 用 Barkley 模型模拟的随机时空调制 $\phi(\tau)$时介质的波动力学

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial \tau}=D_u \nabla^2 u+f[u,v,\phi(\tau)],\\ \dfrac{\partial v}{\partial \tau}=g(u,v),\end{cases} \tag{3.4.12}$$

其中 $f$ 与 $g$ 函数为如下形式：

$$f(u,v,\phi)=\frac{1}{\varepsilon}u(1-u)[u-(v+b+\phi)/a], \tag{3.4.13a}$$

$$g(u,v)=u-v. \tag{3.4.13b}$$

形式上 Barkley 模型与 FitzHugh－Nagumo 模型非常相似，且它们都可用来描述可激发介质动力学．这里 $\phi(\tau)$是与时间有关的量，对其调节与 BZ 反应的 Oregonator 模型参量完全一样：

$$\phi=\phi_0\left[1+\frac{1}{2}G(x,\delta)\right], \tag{3.4.14}$$

其中 $\phi_0$ 仍为参考参量(当介质处于亚可激态时的值)．图 3－36 给出了随机时空调制 $\phi(\tau)$时介质的波的动力学．在实验中观察到的短程有序和长程无序行为在图中完全体现出来．噪声的两方面作用在于：(1) 通过激发局部介质在小尺度内形成有序的波；(2) 支持波的传播，且引发波的破碎．前者是一个成核过程，由图(b)的一个白色斑点随时间通过相互作用结合成为较大的波峰．而噪声支持波的传播则类似于渗流过程，它通过介质不同位置的耦合将激发传播到更大的空间尺度．

从上面的结果可以看出，局域波的尺寸大小上没有绝对的尺度，可以对这些波峰的尺寸作统计．图 3－37 画出上面的实验和模拟过程波峰尺寸的分布函数 $p(s)$，可以看到两个结果非常相似，它们都遵守一个幂律：

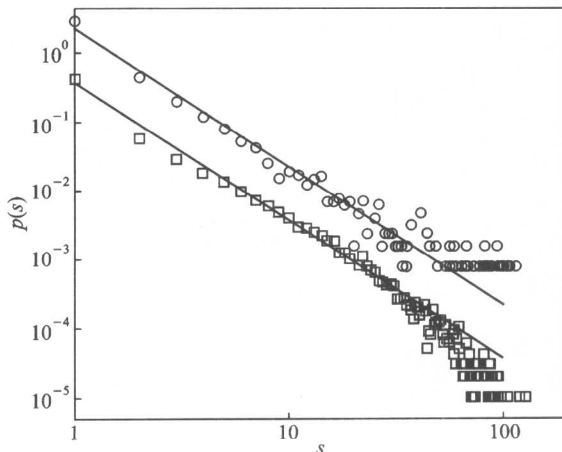



图 3－37　上面的实验和模拟过程波峰尺寸的分布函数 $p(s)$

$$p(s)=bs^{a}, \tag{3.4.15}$$

其中 $b$ 是一个常数，$a\approx-2.0$. 这种分布形式非常类似于自组织临界性的行为[359,360]. 例如沙堆的坍塌、地震等. 从过程来看，二者十分相似. 在这里，波由生成到逐渐长大，再到破碎，都很好的体现出坍塌过程，我们把这一过程也称为雪崩过程，上述过程产生的波称为热波[361]，因为它们是介质处在噪声环境下产生的波.

### 3.4.3 噪声与时空斑图的形成及转换

当非线性系统远离平衡态时，原有的热力学分支会在一定情况下失稳，系统在非平衡态下会自组织形成新的非平衡结构，这些结构通常会在时间行为或空间行为(或二者兼有)上表现出来，如 Rayleigh-Benard 对流涡卷、Taylor-Couette 流、Belousov-Zhabtinsky 化学反应中的螺旋波等等，这些时空的非平衡结构称为耗散结构. 由于非线性系统的高度非线性和大尺度，对耗散结构的研究至今仍是许多学科的热点，仍有相当多的未解决问题.

斑图动力学是一门横向学科，它揭示了时空系统出现的种种非平衡空间结构，其内容涉及物理、化学、生物、生态等多个学科，目的在于探索不同系统中共同存在的具有普遍性的斑图形成的基本规律. 迄今为止，人们所探索的斑图结构主要有两大类：一类是时间上稳定、空间上不均匀的结构，称为 Turing 斑图；另一类则是在时间和空间上都不均匀的结构，我们称为行进波. 本书中没有讨论 Turing 斑图结构的形成、失稳与分岔行为，因为弱噪声的作用通常不会使这类斑图失稳，过强的噪声则破坏其结构，其动力学相对比较清楚. 而行进波在噪声作用下的动力学更为复杂，且联系着很多实际应用背景，如心脏中的心电信号、流体中的 Rayleigh-Bernard 对流、液晶中的 Ising-Bloch 相变、化学反应等. 没有噪声作用下时空非线性系统的斑图动力学已有相当多的讨论，读者可参考书后的参考文献和专著.

在一般情况下，非平衡系统在改变控制参量达到一个临界值时就会产生斑图结构. 噪声的介入会使得分岔阈值变得更为模糊，这样在有噪声的环境里在临界值以下系统也会产生斑图结构. 涨落不仅会促使系统产生斑图结构，还会造成系统在不同斑图结构之间的转换.

一、噪声诱发螺旋波的产生

1995 年，Jung 等研究了亚可激发介质在噪声环境中产生螺旋波的现象[362,363]. 为方便研究，他们提出了一个三态可激发介质的分立模型. 考虑一个可激发三态单元 $e_{ij}$ 耦合而成的二维阵列，每一个单元处于位置 $x_{ij}=ia\hat{x}+ja\hat{y}$，$\hat{x}$, $\hat{y}$ 为 $x$ 和 $y$ 方向的单位矢量，$a$ 为格点距离. 每一个单元的激发阈值为 $b$，控制每一个单元状态的输入量记为 $v_{ij}$，这些量与热库热耦合，因而有涨落. 可由如

下 Langevin 方程描述：

$$\dot{v}_{ij} = -\gamma v_{ij} + \sqrt{\gamma}\zeta_{ij}(t), \tag{3.4.16}$$

这里 $\gamma$ 表示涨落的耗散率，$\zeta_{ij}$ 为时空均无关联的白噪声：

$$\begin{aligned}&\langle \zeta_{ij}(t) \rangle = 0, \\ &\langle \zeta_{ij}(t)\zeta_{kl}(t') \rangle = 2\sigma^2\delta(t-t')\delta_{(ij),(kl)},\end{aligned} \tag{3.4.17}$$

对 $v_{ij}$ 的方程在有限的时间 $\Delta t$ 内积分，可以得到下面的映射：

$$v_{ij}(t+\Delta t) = v_{ij}(t)\mathrm{e}^{-\gamma\Delta t} + G_{ij}, \tag{3.4.18}$$

$G_{ij}$ 是随机数，它符合高斯分布，分布的方差为 $\sigma^2(1-\mathrm{e}^{-2\gamma\Delta t})$.

上面仅仅是考虑每个单元受噪声影响的自身演化.因为介质内单元间的相互耦合，当一个单元自身超过阈值 $b$ 时，它就会发生脉冲现象.周围的单元会通过耦合作出相应的响应，这个响应是依赖于单元间空间距离的.对时间积分，我们可得到单元$(k_x,1)$的脉冲对$(i_x,j)$单元的贡献：

$$\Delta v_{ij}(t+\Delta t) = K\sum_{kl}\exp[-\lambda\gamma^2_{(ij),(kl)}/a^2], \tag{3.4.19}$$

上面的 $\lambda$ 刻画的是作用范围，$K$ 为耦合强度，上述求和对 $ij$ 周围的单元进行.每个单元在放电（脉冲）后会有一个不应期.如果对整个系统作如下标度变换的话：

$$v_{ij} \to v_{ij}/b, t \to \gamma t, \sigma^2 \to \sigma^2/b^2, \gamma \to \gamma\Delta t, K \to K/b, \tag{3.4.20}$$

则系统的激发阈值为1.系统存在一个临界耦合强度 $K_c$，当 $K<K_c$ 时，系统处于亚可激发区，当没有涨落时波将不能在介质中传播.当 $K>K_c$ 时，介质可以支持波的传播.在二维介质中，我们可观察到线波（波峰为一直线，传播方向垂直于直线方向的行波），靶波或螺旋波.不同的波的产生可用改变初始条件的空间构造达到.线波（或靶波）都很容易产生，分别只需让一个方向上一条线上的单元（或空间中一个单元）处于激发态即可.螺旋波的产生则可以如图3-38的初始状态得到，其中灰色区域为处于激发态的单元，浅灰区为处于不应期的单元，其他单元则处于定态.在激发态区旁边加上不应期区域是为了避免激发向左传播，因此可产生单个的螺旋波.这一点的分析实际上在§3.3.2讨论螺旋波时也已经提到过.

下面的讨论在亚可激发（亚阈值）区 $K<K_c$ 进行.图3-39(a)给出了介质没有噪声时的脉冲行为.很显然，在没有噪声的情况下，初始的长波峰随时间推移会向前传播（初始即由图3-38给出），但在传播过程中不断缩短，直至最后消失.这正是亚可激发介质的特点，由于传播中的衰减，使得初始的波峰线段无法弯曲以形成空间螺旋波.这种情况在加上空间噪声后会发生改变.图3-39(b)画出 $\sigma^2=0.08$ 时介质中波的情况.可以看到由于噪声的作用，可激发区的波峰

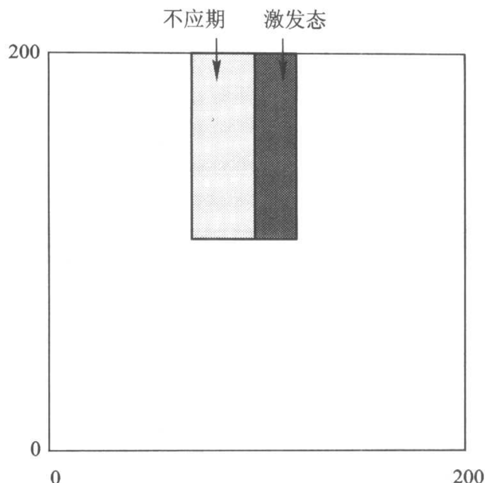



图 3－38 螺旋波产生的初始状态设置

线段不再收缩，而是在运动中弯曲，最后形成螺旋波．与一般的螺旋波相比，这里的螺旋波波峰是模糊的，且形成的中心在介质中随机移动．当噪声强度再加大时，如图 3－39(c)所示，$\sigma^2=0.13$，可以看到此时的螺旋波有更大的曲率，更关键的是，螺旋波的尺寸与介质的尺寸大小基本一样了，即螺旋波可在整个介质中传播．对于过大的噪声，如图 3－39(d)所示，$\sigma^2=0.15$，介质内部耦合强度不足以支持波在整个介质尺寸上的传播，过强的涨落使得波峰破碎，在介质中会形成局域有序而空间混乱的波．

从上面的现象可以看到噪声的两面作用．在小噪声下，涨落可促进波的传播，促使空间斑图结构的形成(此处为空间螺旋波)．当然这个作用必须通过介质内部的耦合作用方可实现．适当的噪声会被耦合恰到好处地用来产生有序结构[364]．大强度的噪声下，涨落会造成波的破碎，导致类似湍流的行为．此时，涨落的无序作用占上风，耦合只能在空间局部起作用，因而无法形成长程的有序结构．

二、噪声诱发的斑图转换与双稳现象

1998 年，侯中怀等人研究在参数噪声下在可激发介质中出现的斑图转换现象[365]．他们研究的是下面的 Barkley 模型[366]：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{1}{\varepsilon}f(u,v)+D_u\nabla^2u, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}=g(u,v)+D_v\nabla^2v,\end{cases} \tag{3.4.21}$$

这里

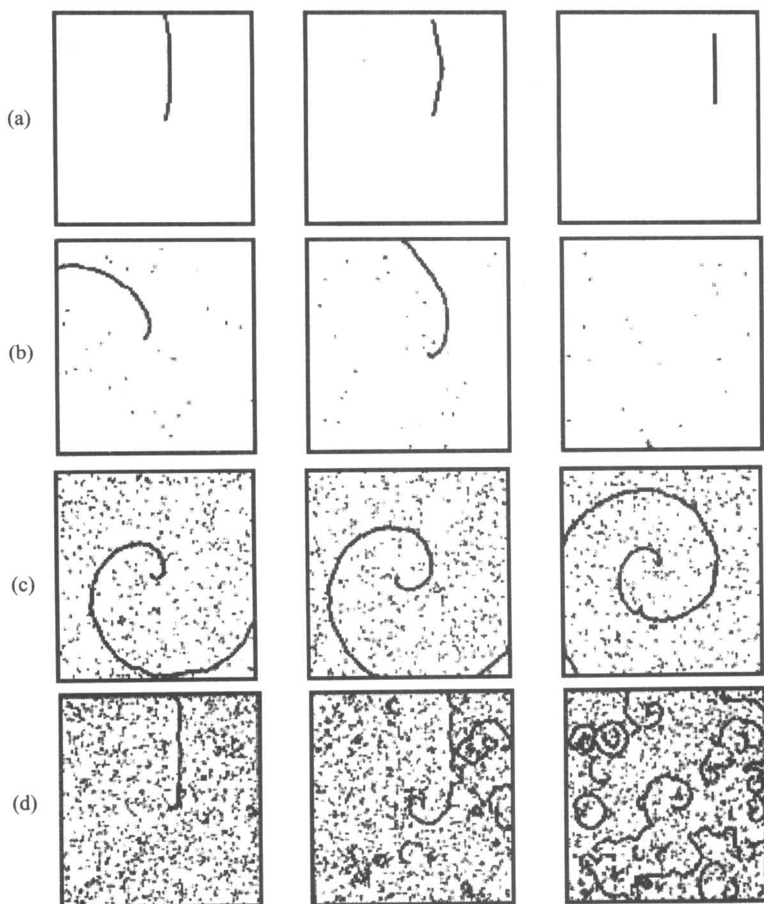



图 3-39　噪声诱发的螺旋波传播的时空动力学

$$f(u,v)=u(1-u)[u-(v+b)/a],g(u,v)=u-v, \tag{3.4.22}$$

$\varepsilon \ll 1$. 模拟在二维介质上进行，$D_v=0$. 上面的系统在 $a<1$ 时是可激发的. 随参数 $b$ 的增加，系统会出现湍流、螺旋波等一系列现象. 下面考虑参数 $b$ 处于噪声扰动下：

$$b(t)=b_0+\zeta(t), \tag{3.4.23}$$

$\zeta(t)$ 为高斯白噪声：$\langle\zeta(t)\rangle=0$，$\langle\zeta(t)\zeta(t')\rangle=2D\delta(t-t')$；$D$ 为噪声强度. 图 3-40给出了介质在不同噪声强度时的斑图情况，$a=0.3$，$b_0=0.016$. 图(a)给出的是初始条件，其中黑色区为 $u(i,j)=0.7$，$v(i,j)=0$，斜线区为 $u(i,j)=0$，$v(i,j)=0.7$，中间白色区为 $u(i,j)=0.7$，$v(i,j)=0.5$. 这种初始设置是为

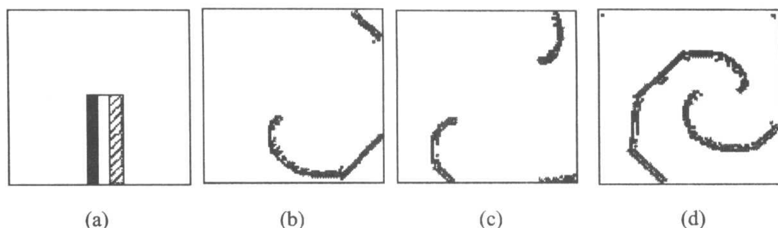



图 3-40 Barkley 介质在不同噪声强度时的斑图情况

了产生单个的螺旋波.图(b)给出了 $D=0$ 的空间结构,其结构为单支的螺旋波(SSW).对很小的噪声,如图(c),$D=0.000\ 1$,SSW 会失稳,系统回到非激发的状态.对于中等强度,我们看到空间结构会由 SSW 转变成双螺旋波结构(DSW),空间中有两个螺旋波分支,它们相互围绕对方旋转,如图(d)所示.对于很大的噪声($D>0.003$),我们又会看到螺旋波失稳收缩,回到非激发状态.由此我们看到了噪声在诱发斑图结构产生与转换的过程,尤其在中等噪声区域可以看到噪声诱导的双稳空间结构.这个双稳还可以从引入下面的量观察到:

$$u_{tot}(t)=\sum_{ij}u_{ij}(t), \tag{3.4.24}$$

$ij$ 是对空间分立化之后的格点求和.图 3-41(a)~(d)给出了 $D=0,D=10^{-4}$,

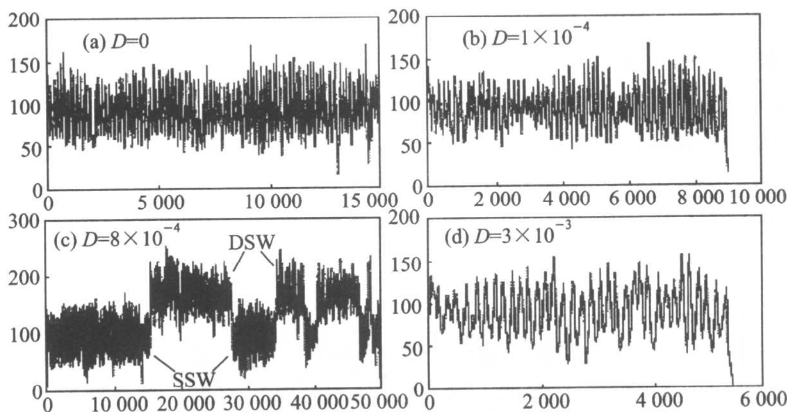



图 3-41 $u_{tot}(t)$的演化

$8\times10^{-4},3\times10^{-3}$时 $u_{tot}(t)$的演化.图(a)的振荡对应于单一的螺旋波结构.图(b),(d)给出了当 $D$ 很小或很大时 SSW 状态的失稳情况,可以看到$u_{tot}(t)$在振荡一段时间后会很快衰减,回到无激发态.图(c)的 $u_{tot}(t)$在两个平均值之间的

跃迁规则非常清楚地显示出系统在 SSW 与 DSW 态之间的跃迁.图 3-42 画出了对 $u_{tot}(t)$的统计分布 $P(u_{tot}(t))$的情况. $D=0$ 时,$P(u_{tot}(t))$为典型的单峰分布,而当 $D=8\times10^{-4}$时,统计分布变为双峰函数,说明双稳态的出现.注意这里的双稳态是介质整体表现出来的,是介质内耦合与噪声作用的结果.

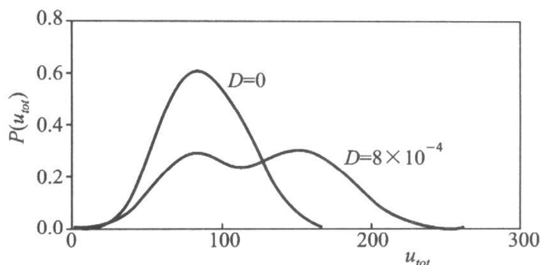



图 3-42 对 $u_{tot}(t)$的统计分布 $P(u_{tot}(t))$的情况

上面的现象可作如下理解.在 $D=0$ 时,螺旋波的中心运动是确定性的,SSW 是稳定的.小的噪声会使得中心运动为随机的,当中心移出介质区时 SSW 就会失稳而消失.合适的噪声会使得波峰分裂,每一段都会围绕自身形成新的螺旋波,这样就会导致 DSW 态.当其中一个螺旋波中心移出介质区时,这个螺旋波就会失稳而消失,空间结构因而由 DSW 变回 SSW 态,上述两种机制会造成系统空间结构在双稳态间跳跃.过大的噪声会使得 SSW 在分裂破碎前就失稳.

如果选择不同参数或初始条件,介质会表现出复杂的空间结构.图 3-43(a)给出了另一种初始条件,另外参数 $b_0=0.015$.可以看到 DSW 可以是顺时针的(CDSW)(如图(b)),也可以是逆时针的 ACDSW(如图(d)),说明介质还存在 CDSW,ACDSW 之间的转换,揭示出一种噪声诱发的手征性转变.这种转换是通过一种二者混合的结构完成的,如图(c)所示.

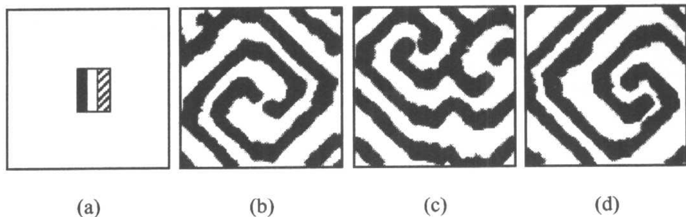



图 3-43 选择不同参数或初始条件时表现出的复杂空间结构

### 三、噪声诱发可激发介质中的靶波

对一维可激发介质,只要介质不是自我封闭成一个圆环,上面就不会产生自发的行波.对二维可激发介质,螺旋波的产生不需要持续的波源,可自我维持.其他的行波,比如靶波,则必须有持续的振荡波源才能持续传播. Alonso 等人于 2001 年通过 BZ 反应实验揭示了时空噪声可以产生靶波并可维持其传播[367].这又是一个可激发系统可以把外来的无序干扰转化为有序的波的例子.

Alonso 等人的 BZ 反应实验设备与前面基本相同,只不过介质处于可激发区,图 3-44 给出了他们报道的主要结果.在没有噪声时整个介质没有激发源,因而尽管介质是可激发的,我们也无法观察到靶波的传播.一个弱的噪声可激发出靶波,但处在背景噪声的淹没下.在合适的噪声强度下,我们可以看到由噪声激发出的靶波可以在整个介质中传播,且传播可以持续发生,即可以从介质中央不断激发出靶波向外传播.图 3-44 是每隔一小段时间拍下的介质的空间结构,可以很清楚地看到向外传播的靶波波峰.这种有噪声导致的靶波反映出介质中的时空随机共振行为.只有在合适的噪声强度下才可观察到这种行为.过弱的噪声不足以激发介质,在介质中产生激发源;过强的噪声虽然会产生波,但这些波在还未传遍整个介质之前就会支离破碎.

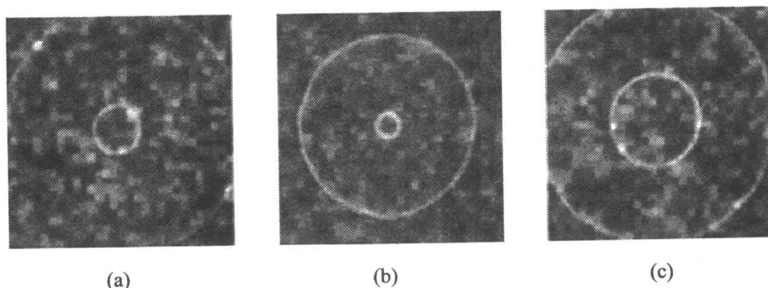



图 3-44 时空噪声诱导靶波的产生与传播

上述实验结果可以在不同的模型系统中用数值模拟看到.例如,我们可以用二变量的 Oregonator 模型进行讨论:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon}\left[u - u^2 - (fv + \phi)\left(\frac{u-q}{u+q}\right)\right] + \delta\nabla^2 u,\\ \frac{\partial v}{\partial t} &= u - v,\end{aligned} \tag{3.4.25}$$

$\phi = \phi_0 + \delta\phi$,其中 $\phi_0$ 为参考值,$\delta\phi$ 为一随机变量,符合高斯分布.利用此模型模拟的结果,也可看到 $\delta\phi \neq 0$ 时的靶波现象.这里不再详述,有兴趣的读者可以参考有关文献.

实际上,我们前面已讨论过大多数典型的波在时空噪声作用下的产生问题.这方面的讨论基本上是以实验为主,辅以数值计算和模拟.由于时空系统自身的大尺度和非线性,这方面的研究今后也基本上是这样的模式.由于时空系统的复杂性,对噪声作用的可激发介质的复杂波动力学的研究迄今仍是研究的热点.

### 3.4.4　噪声对可激发介质同步的影响

在第二章中我们讨论的振子同步问题绝大多数限于系统没有外来噪声的影响.由于噪声在实际情况下是难以避免的,因此对噪声环境中振子同步的研究很有意义,它在生物医学、通讯、机械工程等方面有其重要性.同步在加密通讯与神经科学中是信号解码的一种重要机制,在这种情况下恰当考虑噪声环境及合理利用噪声是应用的关键.在前面的讨论中,我们也看到了噪声在可激发介质的行波传播、斑图生成与转换等方面可以起到加强有序的作用.本节我们从系统同步的角度来探讨噪声的影响.我们将会看到,噪声在一定条件下可以加强可激发介质的同步.

下面以耦合的 FitzHugh-Nagumo 振子为例:

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{u}_n = u_n - \dfrac{1}{3}u_n^3 - v_n + \gamma\sum\limits_{n'}\dfrac{1}{2dl^2}(u_{n'} - u_n), \\ \dot{v}_n = u_n + a_n + \sqrt{\dfrac{2D}{\tau_v l^d}}\zeta_n, \end{cases} \tag{3.4.26}$$

$\tau_{u,v}$为变量$u$、$v$的特征时间尺度,$\varepsilon=\tau_u/\tau_v\ll1$,因此$u_n$是快变量,$v_n$是慢变量.$d$为格点维数,对一维链,$d=1$.格点间的间距为$l$,上述求和为最近邻求和.$\gamma=D_u\tau_u$为耦合强度,$D_u$为活化子的扩散系数,$\zeta_n$为时空无关联的白噪声,上面方程实际为连续介质的分立模型.注意,这里$a_n$各不相同.当$a_n<1$时单个系统为极限环解,当$a_n>1$时,单个系统为可激发振子.Neiman 等人模拟了这个耦合系统在噪声作用下的同步行为[368].在模拟中,$\varepsilon=0.01$,$\tau_v=1.0$,$l=1$,$\gamma=0.05$,$a_n$为均匀分布于[1.03,1.1]之间的随机数.

在图 3-45 中,从左往右为一维耦合情况下$N=500$个可激发振子$D=1.125\times10^{-4}$,$3.125\times10^{-4}$,$5\times10^{-3}$时的时空图,横轴为空间,纵轴为时间.当$D$很小时,激发的中心在空间中零星地随机分布,这些中心传出的行波会相互碰撞而湮灭.当$D$很大时,激发中心稠密地无规分布于介质中,它们激发出的行波只能传播很短距离就相互碰撞而消失,此时看到的是混乱的时空图(下边的图 3-45).而在中等的$D$下,介质变为相干的,所以振子看起来以相同的频率激发出脉冲.

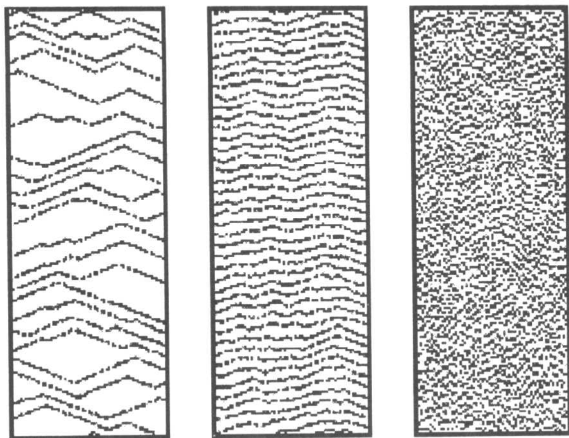


图 3－45　一维耦合情况下 500 个可激发振子不同噪声强度时的时空演化

上面的相干有序行为类似于单个可激发振子在噪声下的相干共振，但这里的空间有序来自振子的耦合．为描述上面的相干现象，可以考察单个振子的相位 $\phi_n(t)$，它可以由 Hilbert 变换定义：

$$z_n(t)=u_n(t)+\mathrm{i}y_n(t),\tag{3.4.27a}$$

$$y_n(t)=\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u_n(t)}{t-\tau}\mathrm{d}\tau,\tag{3.4.27b}$$

$$\phi_n(t)=\arctan\left[y_n(t)/u_n(t)\right].\tag{3.4.28}$$

我们可以选择中间格点为参考，计算相差 $\Delta\phi_k=\phi_{N/2}(t)-\phi_{N/2+k}(t),k=-N/2,\cdots,N/2$．在图 3－46 的小图中给出了 $\Delta\phi_{200}$ 的时间演化，可以看到当 $D=3.125\times10^{-4}$ 时，$\Delta\phi_{200}$ 在观察的时间内基本保持不变，说明振子之间很好的锁相，但对大 $D$ 和小 $D$ 的情况 $\Delta\phi$ 随时间减小，说明过弱或过强的噪声均不利于系统相同步的形成．

对随机系统的同步，可以用交叉扩散系数来刻画：

$$D_{eff}(k)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\langle\Delta\phi_k^2(t)\rangle-\langle\Delta\phi_k(t)\rangle^2\right],\tag{3.4.29}$$

如果 $D_{eff}$ 减小，系统则可以在更长时间内保持锁相，相同步效应更强．根据格点的交叉扩散系数可以定义系统总的交叉扩散系数：

$$D_{eff}=\frac{1}{N}\sum_{k=-N/2}^{N/2}D_{eff}(k),\tag{3.4.30}$$

图 3－46 的点线给出了 $D_{eff}$ 与 $D$ 的变化关系．曲线在某一 $D$ 处有一最小值，说

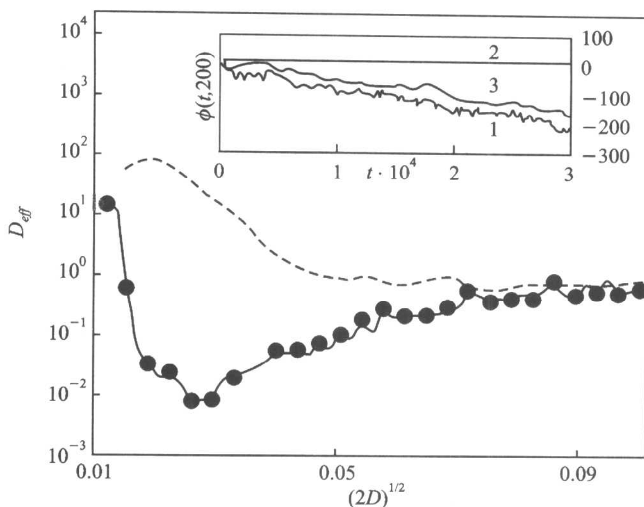



图 3－46 点线：$D_{eff}$与 $D$ 的变化关系(另一条为无耦合时的 $D_{eff}$ 曲线)；小图：$\Delta\phi_{200}$ 的时间演化

明此处系统的相同步效应最强. 为与此对比, 图中画出了无耦合($\gamma=0$)时的 $D_{eff}$ 曲线, 可以看到没有耦合时, 系统没有很好的相同步行为. 因此可看出相同步行为是系统的耦合(有序)与噪声(无序)相互作用的结果. 没有耦合时, 噪声激发的脉冲在空间和时间上都无序的进行, 耦合使得这些脉冲不仅在时间上而且在空间上有序地组织起来.

随着系统尺寸的增加, 相同步就比较难以达到. 这一点不仅从一维格点可以看出, 也可以从二维介质看出. 图 3－47 给出了 $D=1.125\times10^{-4}$, $3.125\times10^{-4}$, $5\times10^{-3}$时 200×200 的介质的空间斑图, 每一个 $D$ 的三张图对应与不同时刻, 图中的白色区域为脉冲态的振子. 在弱噪声下, 我们可以看到噪声诱发的靶波, 激发的位置在空间是不定的. 而且我们也看不到稳定的螺旋波. 当然我们在适当噪声下仍然可以观察到整个介质较为相干的振荡行为, 这可以从图3－47的中间一列看出来.

在上面的系统中, 我们可以看到有两种无序, 一种是空间的无序, 即 $a_n$ 各不相同, 这导致介质中各个位置可激发性的不同; 一种是时空的无序, 即时间空间上均无关联的热噪声, 前者的无序只有通过噪声的激励才能体现出来. 而耦合则可以有效地利用这两类无序, 使系统出现有序的行为. 正因为这些超出人们常规直觉的行为, 使得这方面的研究引起了众多不同领域的学者的兴趣. 与 Neiman 等人的工作直接相关, 2001 年周昌松等人研究了噪声的空间关联对 FitzHugh-Nagumo 介质相干共振的影响[369]. 他们考虑噪声 $\zeta_n(t)$可分为两部

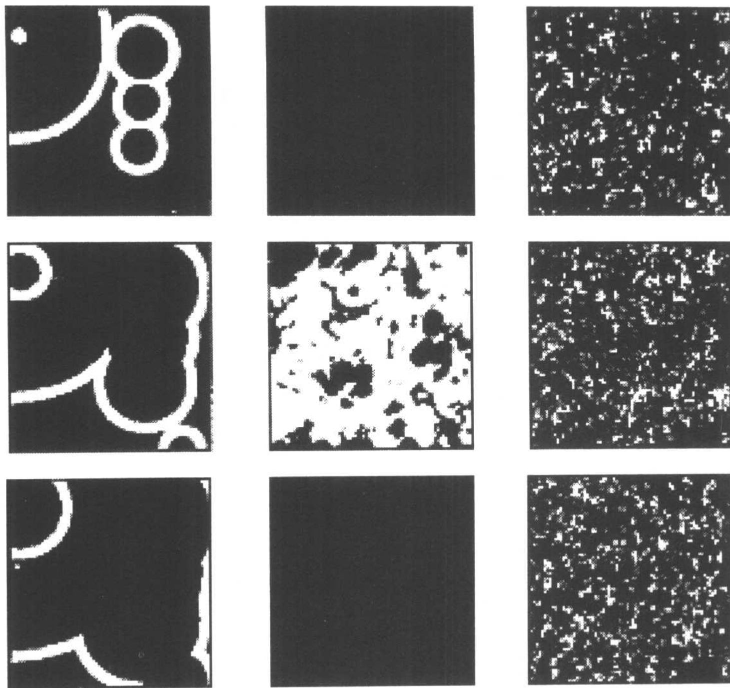


图 3-47 不同噪声强度下 200×200 的介质空间斑图

分：

$$\zeta_n(t)=\sqrt{R}e(t)+\sqrt{1-R}\eta_n(t), \tag{3.4.31}$$

每一部分均为高斯白噪声，即

$$\langle e(t)\rangle=0,\langle e(t)e(t')\rangle=\delta(t-t'), \tag{3.4.32a}$$

$$\langle \eta_n(t)\rangle=0,\langle \eta_n(t)\eta_m(t')\rangle=\delta_{n,m}\delta(t-t'), \tag{3.4.32b}$$

而 $e(t)$ 为作用于每一单元的共同噪声，$\eta_n(t)$ 为局域噪声，它在空间是无关联的. 很显然：

$$\langle \zeta_n(t)\rangle=0,\langle \zeta_n(t)\zeta_m(t')\rangle=[R+(1-R)\delta_{n,m}]\delta(t-t'), \tag{3.4.32c}$$

因此 $R$ 量度的是噪声 $\zeta_n(t)$ 在空间的关联强度，$R=0$ 为无关联，$R=1$ 为强关联. 类似于单个可激发单元，可以定义一个类似于信噪比的量 $S$，用以量度系统的相干程度. 图 3-48 给出的是 $S$ 在不同 $R$ 下与噪声强度 $D$ 的关系，可以看到很有趣的现象：噪声的空间关联越弱，系统反而具有更强的相干性，而 $R=0$ 时，系统的相干共振效应最强，此时系统亦具有最强的相同步. 类似地，也可以考察介质本身非均匀性（对 FitzHugh-Nagumo 系统，可用 $a_n$ 的失配大小 $\delta a$ 描述）对

系统相干性的影响. 在图 3 - 49 中, $S$ 与 $\delta a$ 的关系是单调上升的, 也就是说, 介质越不均匀, 系统具有越强的相干性. 由此可以看出, 由于可激发介质自身的特殊动力学行为, 它在与噪声及无序相处时会出现许多出人意料的行为, 这些行为也是目前人们研究的热点[370,371]. 时空无序引发的相干共振在理解神经系统的信号处理机制和解码过程可能是很有启发性的.

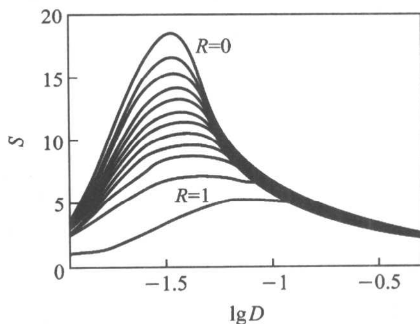



图 3 - 48　$S$ 在不同 $R$ 下与噪声强度 $D$ 的关系

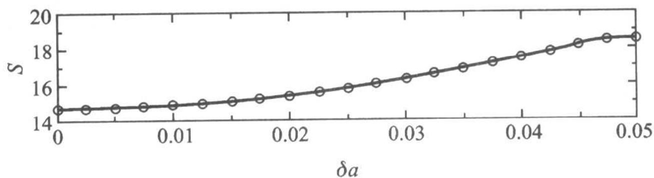



图 3 - 49　$S$ 与 $\delta a$ 的关系

# 第4章 Frenkel-Kontorova 系统的时空动力学

最早对于晶体结构的研究集中于点阵结构.所有晶体结构就其对称性而言,共有 230 个类型,每一个类型由一个空间群来描述.由于对称性,当对晶体结构进行一个对称操作时具有不变性.对物质结构相变的研究是一个大的课题,结构随外参量改变引起的是其物理性质的转变.当一个系统是具有两个或以上相互竞争的空间尺度时,系统就存在空间调制结构,并存在一类复杂的结构相变,称为公度-非公度相变(commensurate-incommensurate phase transition,简称 CI 相变).在凝聚态物理的许多实验中,我们都可以观察到空间调制的结构,如二元合金的长周期结构,稀土材料中的铁磁相等.描述调制的波矢可以随外参量如温度、压力、磁场等的改变而变化,也可以锁定于某一有理数值上.对于具有有理数波矢的调制结构,我们称其为公度的,否则,如果波矢是无理数的,则我们称之为非公度的.被调制的量可以是原子的位移、占有数成自旋的排列,调制可以是一维的,也可以是二维或三维的.在不同条件下系统可以表现出不同的公度相或非公度相,在这些不同相之间的转变是人们关注的热点[372~375].

物质结构的复杂性使得公度-非公度相变的研究很大程度上依赖于实验观察.多个空间尺度的竞争导致了理论研究的复杂性.1938 年,Y. I. Frenkel 与 T. Kontorova提出了一个非常简单的一维模型[376]:许多简谐耦合的粒子构成的链置于一个周期外势场中,粒子间作用是最近邻的相互作用.这个模型无论从结构上还是从作用势的形式上都做到了最简单,且保留了尺度竞争的精髓——粒子间的间距和外势场的周期[377~379],后人称之为 Frenkel-Kontorova 模型(FK 模型).FK 模型最初是用来描述位错中心附近的晶格结构的,但在后来几十年的研究中其应用范围大大推广,如位错动力学、耦合单摆、电荷密度波[380~384]、铁电畴壁、磁序结构、Josephson 结阵列[385~394]、滑动摩擦、介观摩擦学[395~398]、自组织临界性[399]等等.在各种其他理论和模型占主流的时代,FK 模型也在不断拓展

其应用领域,描述空间波矢竞争,揭示了大量有意义的现象和本质问题.本章我们将致力于对其进行较为详尽的讨论,特别是致力于反映出关于FK系统与非线性动力学结合点的近十几年的发展.

## 4.1 Frenkel-Kontorova系统的平衡态性质:CI相变

### 4.1.1 Frenkel-Kontorova模型与基态

一、Frenkel-Kontorova模型

我们可以从力学角度引入FK模型.如图4-1所示,设有一列一维的粒子,它们相互之间用弹簧连接,并将其置于一个周期势场中.用 $u_j$ 代表第 $j$ 个粒子的位置,则系统的总势能为:

$$H = \sum_j [V(u_j) + W(u_{j+1} - u_j)], \tag{4.1.1}$$

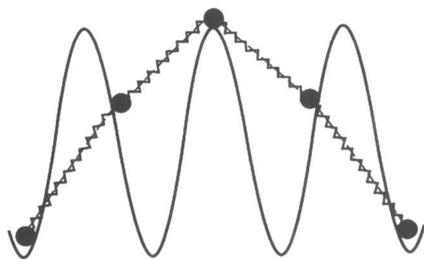


图4-1 FK模型示意图

这里 $V(u)$ 为周期势,周期为1(一般的周期 $a$ 可以用标度变换变为单位周期),$V(u+1)=V(u)$,$W$ 是弹簧的势能,它是粒子间距离的函数.这里考虑的是最近邻的相互作用.一般FK系统的 $V(u)$ 和 $W$ 可以有很复杂的非线性,标准的FK模型则选用下面的最简单形式:

$$V(u) = \frac{K}{(2\pi)^2}[l - \cos(2\pi u)],$$

$$W(\Delta u) = \frac{1}{2}(\Delta u - \mu)^2, \tag{4.1.2}$$

这里 $K$ 量度了周期势与相互作用之间的相对强度①,$\mu$ 表示无周期外势时弹簧的自由长度.这样系统中的可调参量为 $K$ 和 $\mu$.实际上,系统中存在两个空间尺

---

① 注意这里弹性势能前的因子标度为 $l$,后面我们在讨论小阻尼动力学时的 $k$ 表示耦合强度,特此注明.

度,一个是弹簧的自由长度 $\mu$,另一个是周期势场的周期 $l$. 两个空间尺度之间的竞争称为阻挫(frustration). 空间尺度竞争是 FK 模型的本质特点,它导致一系列复杂的空间调制结构及其非线性时空动力学行为.

我们通常讨论 $N\to\infty$ 极限下的情形. 在此热力学极限下,很多问题可以作解析的处理. 在模拟计算中,$N$ 通常取 $10^1\sim10^3$ 的量级即可反映出热力学极限下的一些性质,具体的 $N$ 视不同问题而定.

二、平衡态位形结构与标准映像

在很多情况下我们关心的是系统的调制结构[400~407],它可用所有粒子的空间位置 $\{u_j\}$ 描述. 我们首先感兴趣 FK 系统的平衡态结构,即没有外力情况下的结构. 它可由系统哈密顿变分定出:

$$\frac{\partial H}{\partial u_j}=V'(u_j)+\frac{\partial W(u_{j+1}-u_j)}{\partial u_j}+\frac{\partial W(u_j-u_{j-1})}{\partial u_j}=0, \qquad (4.1.3)$$

引入弹簧的张力 $p_j=\partial W(u_j-u_{j-1})/\partial u_j$,上述方程可写为

$$p_{j+1}=p_j+V'(u_j),$$

这样 FK 系统的平衡态可由下面的二维映像描述:

$$(u_{j+1},p_{j+1})=T(u_j,p_j). \qquad (4.1.4)$$

如果函数 $V$,$W$ 是连续可微的,且 $W$ 是严格的凸函数,则上面是连续的扭映射(twist map),并满足所谓的“扭曲”条件:

$$\left(\partial u_{j+1}\big/\partial p_j\right)_{u_j}>0, \qquad (4.1.5)$$

扭映射是哈密顿系统混沌研究中非常重要的一类映像,随参数改变它存在从规则到遍历混沌的运动[3,6,9]. 这样,我们就可以把 FK 系统的基态问题与扭映像中的动力学问题联系在一起. 特别地,对于标准 FK 系统,其基态恰好对应于哈密顿系统混沌运动研究中最著名的标准映像[6]:

$$\begin{cases}p_{j+1}=p_j+\dfrac{K}{2\pi}\sin(2\pi u_j),\\ u_{j+1}=u_j+p_{j+1}.\end{cases} \qquad (4.1.6)$$

在这里,我们看到参量 $\mu$ 并未出现在映像中,这意味着对标准 FK 而言平衡态结构的特点在一定程度上不依赖于 $\mu$. 但是,我们从后面可以看到,$\mu$ 在平衡态结构的相变问题中及时空动力学中起着主要作用,它反映出两种空间尺度的竞争行为.

另外需要说明的一点是,上面对 $V$ 和 $W$ 函数的要求在实际物理系统中不一定总成立. 例如,$W$ 的凸函数要求就经常不会满足,$W$ 的非凸函数会导致基态问题和动力学的复杂性. 我们将在 FK 系统时空动力学的讨论中涉及这一点,此处不再详述. 以下关于基态的描述均假设 $V$ 和 $W$ 函数满足上述要求.

从上面的FK系统基态与扭映像的对应可以看到，给定任意初始条件($u_0$，$p_0$)，映射 $T$ 与 $T^{-1}$ 会产生映像的一条轨道.任意一条轨道都对应于FK系统的一个平衡态结构，反过来亦然.但是，这种对应并不说明任一条轨道都是物理上可实现的平衡态位形结构，能否实现还要取决于其物理稳定性.位形$\{u_j\}$的物理稳定性意味着系统能量极小，即对$\{u_j\}$的小扰动会使系统能量升高，从而系统对扰动的响应是耗散的.考虑$\{u_j\}$的小扰动$\{u_j+\delta_j\}$，能量变化为(至二阶)：

$$H(\{u_j+\delta_j\}) = H(\{u_j\}) + \frac{1}{2}\sum_{n,m}\frac{\partial^2 H(\{u_j\})}{\partial u_n \partial u_m}\delta_n\delta_m, \qquad (4.1.7)$$

当矩阵$\{M_{n,m}\}=\{\partial^2 H/\partial u_n \partial u_m\}$的二次型是零或定正时，位形$\{u_j\}$就是稳定的.$M$ 矩阵的本征值为围绕$\{u_j\}$振荡的本征频率的平方 $\Omega^2$.因而，$\{u_j\}$的物理稳定性又等价于其结构的声子谱是实的.

应当注意，平衡态位形结构的物理稳定性与扭映射 $T$ 的轨道动力学稳定性截然不同，这从上面的分析可以看出来.$M$ 的严格定正性实际上意味着 $T$ 的轨道的李雅普诺夫指数是正的，亦即 $T$ 的轨道的不稳定性.因此，在稳定的平衡态结构中只有那些具有零频声子模(即 $\Omega_0=0$)的位形结构才可能对应于映像的一条稳定轨道.

在实际中，平衡态位形的稳定可用Aubry提出的极小能量位形判定[400~402]得到.位形$\{u_j\}$的平均单粒子能量定义为

$$\epsilon = \lim_{N-M\to\infty}\frac{1}{N-M}\sum_{j=M}^{N-1}[V(u_j)+W(u_{j+1}-u_j)], \qquad (4.1.8)$$

具有局域极小值 $\epsilon_{\min}$ 的位形$\{u_j\}$称为极小能量位形，极小能量位形就是稳定的平衡位形.

三、基态与相图

当系统没有外势场时，粒子之间保持着彼此之间的自由距离 $\mu$；当有周期势场存在时，两个空间尺度的竞争会导致粒子间距重新调整，从而形成调制的非均匀结构.可以定义空间位形的平均间距 $w$ 为下面的“旋转数”：

$$w = \langle u_{j+1}-u_j\rangle = \lim_{N-M\to\infty}(u_N-u_M)/(N-M). \qquad (4.1.9)$$

对凸相互作用情形，Aubry证明了每个极小能量位形都会有一个定义很好的旋转数[400]；反之，对于每一个 $w$，都会至少有一个最小能量位形结构.

一旦 $V$ 和 $W$ 不依赖于粒子记号 $j$，则模型是均匀的，对粒子的重新编号不会改变位形的物理性质.下面我们考虑对位形的变换.设$\{u_j\}$为一个极小能量位形，定义下面的变换：

$$\delta_{r,m}\{u_j\} = \{u_{j+r}+m\cdot l\} = \{u'_j\}, r, m\in \mathbf{Z}. \qquad (4.1.10)$$

这个变换可以产生另一个极小能量位形.如果存在一对整数 $r, m$ 使得上述变

换不变,即

$$u_{j+r} + m = u_j, \tag{4.1.11}$$

则称位形分布 $\{u_j\}$ 是周期的.此时这个周期位形 $\{u_j\}$ 的平均间距为:

$$w = -m/r. \tag{4.1.12}$$

若存在变换序列 $\delta_{r,m}(r \to \pm\infty)$ 使得 $\delta_{r,m}\{u_j\} \to \{u_j\}$,则称位形 $\{u_j\}$ 是回归的.这个概念的含义即回归位形中的任何片断都会在其他部分重现(以某种精度).显然周期位形结构是回归的.系统的基态定义为一个回归的极小能量位形结构.

对 FK 系统基态问题的讨论是 FK 系统研究很重要的方面.对于每一个 $w$ 都存在至少一个具有平均间距 $w$ 的基态,相应的单粒子能量为 $\varepsilon(w)$.基态为在给定系统参数下(如标准 FK 为 $K, u$)具有极小能量的态,即 $\varepsilon = \min\limits_{w} \varepsilon(w)$,此能量称为基态能量.对应于基态能量的粒子平均间距 $w$ 称为基态平均间距.对基态的确定不是一件非常简单平庸的工作.人们提出了多种不同方法来计算系统的基态,其中大家公认最有效率的是 Griffiths 发展的本征值极小化方法(即有效势方法),它不依赖于系统势的具体形式,因而有一定的普遍性.有兴趣的读者可参阅 Griffiths 的有关文章[404,405].

我们首先看一下标准 FK 模型的基态.对于每一固定的 $K, \mu$,我们都有平均间距为 $w$ 的基态.图 4-2(a)给出了系统的相图.在$(K, \mu)$空间中不同的区域对应于基态平均间距 $w$ 的不同值,图中只给出了部分区域,图中的数字对应于不同 $w$ 的值.可以看到许多有理数舌头,在每一个舌头内 $w$ 都保持固定的有理数值.在任意两个有理数舌头之间都还有无穷多的舌头,在有理数值舌头之间是无理数的区域.实际这些有理数区域和无理数区域对应于系统的公度相和非公度相,下面我们会讲到.

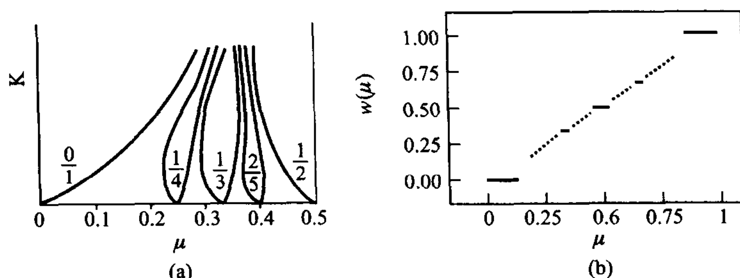



图 4-2　(a) FK 系统在$(K, \mu)$空间中的相图;(b) $K=1$ 时 $w$ 与 $\mu$ 的关系

图 4-2(b)画出了 $K=1$ 时 $w$ 与 $\mu$ 的关系.这个函数关系是连续的,但有很多有理数的台阶,即这些有理数的台阶都对应于有理数的 $w$,它们对应于上面相图的 Arnold 舌头区域.我们称这些台阶为魔梯(devil staircase).如果这些台阶

的测度为 1,则称魔梯是完整的,否则就是非完整的.

### 4.1.2　公度基态与公度-非公度转变

我们把具有有理数平均间距的基态称为公度基态,其特点是如果有一对互素的整数 $p,q,w=p/q$,则任何具有平均间距 $w$ 的公度基态在 $\delta_{q,-p}$ 变换下都是不变的,即对所有 $j$ 都有

$$u_{j+q}-p=u_j, \tag{4.1.13}$$

这说明任何可公度基态都是周期的,且最小周期性是 $w$ 的整数倍.这样,可公度的基态用 $q$ 个粒子 $u_j(j=1,\cdots,q)$ 的单位元胞即可完全描述.实际上,一个可公度基态的单位元胞大小 $q$ 可由下面元胞能量的全局极小化得到,此时 $q$ 为变量:

$$\Phi(\{u_j\}_{j=1}^{q})=\sum_{j=1}^{q}[V(u_j)+W(u_{j+1}-u_j)],u_{q+1}=u_1+p. \tag{4.1.14}$$

对标准 FK 来说,上述的极小化是惟一的,但其他情形则不惟一.因此具有 $w$ 的公度基态的集合 $C_w$ 可以是分立的也可以是连续的.对于连续的 $C_w$,基态的位形结构是可滑动的,即滑动基态位形结构不需要额外能量.当 $C_w$ 不连续时则基态的位形结构是钉扎的.对于可滑动的结构,对 $C_w$ 中任意两个基态 $\{u_j\}<\{v_j\}$,总有处于其间的另外的基态 $\{w_j\}$,使得 $\{u_j\}<\{w_j\}<\{v_j\}$,而对于钉扎的结构,则可以找到两个相邻的基态 $\{u_j\}<\{v_j\}$,其间不存在其他基态.要移动钉扎的位形,我们必须要克服一定的能量壁垒,称为PN垒(Pierels-Nabarro 垒).

对于滑动基态($C_w$ 连续)来说,平均间距为 $w$ 的极小能量位形就是基态,而且只对应于基态.$C_w$ 是分立时则不然,除基态外,对应于 $w$ 的极小能量位形还可以是非回归的,称为基本错公度(basic discommensuration).它有两种情形,一种为向前的(forward)基态错公度,即给定 $C_w$ 中两个相邻的基态(意味着二者中间不再有基态存在)$\{u_j\}<\{v_j\}$,存在一极小能量位形 $\{W_j^+\}$ 使得当 $j\to-\infty$ 时 $W_j^+\to u_j$,$j\to\infty$ 时 $W_j^+\to v_j$.另一种为向后的(backward)基本错公度,即在相邻基态 $\{u_j\}<\{v_j\}$,之间存在一极小能量位形 $\{W_j^-\}$ 满足 $j\to-\infty$ 时 $W_j^-\to v_j$,$j\to\infty$ 时 $W_j^-\to u_j$.我们可用下面的相对局域相 $\{\varphi_j\}$ 来对两种错公度有更清楚的认识:

$$\varphi_j=\frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1}(W_{j+i}^{\alpha}-u_{j+i}), \tag{4.1.15}$$

其中 $q$ 为公度基态 $\{u_j\}$ 的元胞大小,$\alpha=\pm$ 代表向前和向后两种情况.显然对于向前错公度的情况,在 $j\to-\infty$ 时 $\varphi_j\to0$,$j\to\infty$ 时 $\varphi_j\to\Delta=1/q$,其中 $\Delta=1/q$ 称为过剩长度.图 4-3 给出了向前(a)和向后(b)两种错公度的 $\{\varphi_j\}$ 情况.

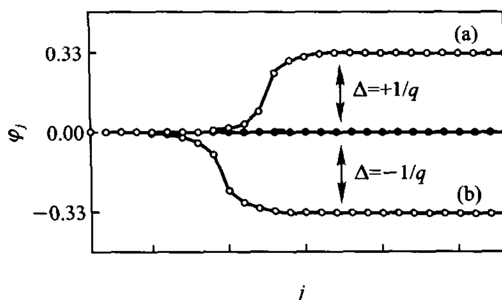



图 4－3 向前(a)和向后(b)错公度 $\{\varphi_j\}$

相图 4－2 中在舌头边缘的转变称为公度－非公度转变.这个转变就是由于系统的错公度引起的,因此错公度的概念在研究这些转变时很有帮助.我们在此不再涉及这方面的内容,有兴趣的读者可参照有关文献.

这个还需要对钉扎态作一些说明.上面提到 PN 垒与系统的力有密切的关联,对于基态可对系统加一均匀外力 $F$,则外力下的平衡方程为

$$V'(u_j)+\frac{\partial w(u_{j+1}-u_j)}{\partial u_j}+\frac{\partial w(u_j-u_{j-1})}{\partial u_j}-F=0, \qquad (4.1.16)$$

系统存在一个阈值 $F_d$,在 $F<F_d$ 时系统有解,当 $F>F_d$ 时上面平衡方程无解.

另外,对于钉扎态来说,它有有限的相干长度.对钉扎基态的某一格点施加一扰动,$u_n \to u_n+\delta_n$,$\delta_n$ 很小,然后看扰动在基态格点中的传播.设其他格点对基态的偏离为 $\delta_j$,则有

$$\delta_j \propto \exp\left[-|j-n|\Big/\zeta\right], \qquad (4.1.17)$$

即扰动传播以指数衰减.$\zeta$ 称为相干长度,它等于与基态 $\{u_j\}$ 联系的 $T$ 映射轨道的李雅普诺夫指数的倒数.因此也可以得知,对钉扎基态来说,$M$ 矩阵的谱大于零,没有等于零的本征值.

### 4.1.3 非公度基态与 Aubry 相变

具有无理数平均间距的基态称为非公度基态,它可以用无理数的有理逼近(即公度基态)来得到.非公度基态最重要的特征是存在决定基态的“壳函数”(hull function) $f_w(x)$.壳函数有以下的特点:

(1) $f_w(x)$ 是单调增加的;

(2) $f_w(x)$ 是梯度周期的,即

$$f_w(1+x)=1+f_w(x), \qquad (4.1.18)$$

因此可用一个周期函数

$$g_w(x) = f_w(x) - x \tag{4.1.19}$$

代替；

(3) 若 $f_w(x)$是连续的，则对任意实数 $\alpha$，由

$$u_j = f_w(jw + \alpha) \tag{4.1.20}$$

定义的位形$\{u_j\}$都是一个基态位形，反之亦然；

(4) 若 $f_w(x)$在某一点 $x_0$ 不连续，则它在可数的无穷点集

$$x = x_0 + m + rw(m, r \in \mathbf{Z}) \tag{4.1.21}$$

上都不是连续的.

(5) 壳函数 $f_w(x)$是惟一的.

如果壳函数是连续的，如图 4－4，则基态的集合 $C_w$ 也是连续的，基态是滑动的. 我们再次把基态与标准映像联系起来. 连续的壳函数所联系的基态对应于标准映像的轨道在一条解析曲线上是稠密的，即 KAM 环面. 这些环面在小 $K$ 下的存在性由 KAM 定理给出，它们的旋转数(对 FK 基态来说即平均间距) $w$ 是一个无理数. 解析的(滑动的)非公度结构没有 PN 垒($E_{PN}=0$)，相应的脱钉力 $F_d=0$. 另外，$M$ 矩阵有零本征值，如图 4－5 的本征谱所示. 对解析非公度结构，相干长度是发散的. 换言之，外势 $V(u)$的存在并未给链的自由移动带来阻碍，其作用只是相对均匀分布结构$\{jw+\alpha\}$的一个平滑的周期调制. 因此，尽管外势使得能量的连续平移不变性破坏，但非公度结构的解析性使得这种不变性在某种意义下仍保留. 当外势的势垒高度足够大时，上面非公度结构的解析性就会被打破，此时壳函数的连续性也就被破坏. 系统存在一个临界的势垒高度 $K_c$，当 $K > K_c$ 时解析的非公度结构不再存在，与非解析非公度基态相联系的标准映像

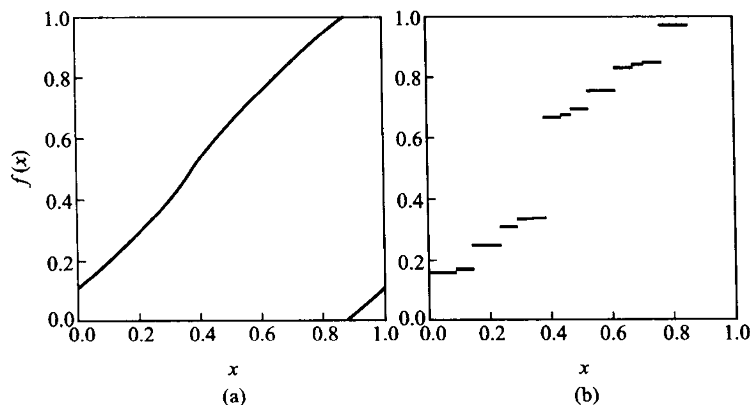



图 4－4　壳函数在 Aubry 相变点两边的行为

的轨道在一个具有 Cantor 集的不变集合上是稠密的,通常称为康托环面(Cantorus).

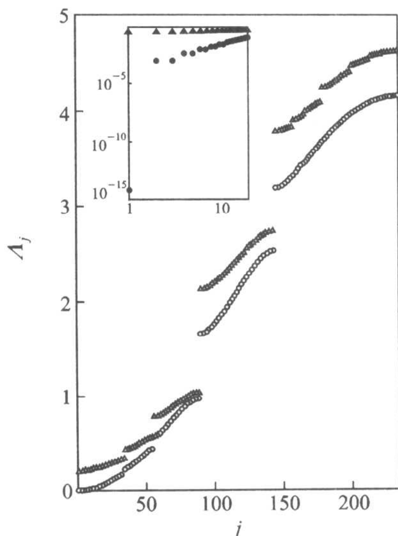



图 4-5 $M$ 矩阵的本征谱

上面的叙述实际上就是非公度基态在参量 $K$ 改变时发生的一种相变,称为 Aubry 相变.在物理上人们曾称之为脱钉相变,即随着 $K$ 的增加,在 $K=K_c$ 处系统经历从滑动态到钉扎态的转变.Aubry 本人称之为解析性破缺相变,即描述壳函数由解析到非解析的转变.下面的几点总结基本上概括了这个非公度基态相变各个方面的表现(当 $K$ 由 $K<K_c$ 变为 $K>K_c$ 时):

(1) 非公度基态位形结构由滑动的变为钉扎的;

(2) PN 垒 $E_{PN}\neq 0$,脱钉力 $F_d\neq 0$;

(3) 相干长度由发散变为有限;

(4) 声子谱(即 $M$ 矩阵的本征谱)的零频率声子模消失,声子谱出现空隙(gap)(图 4-6);

(5) 系统基态的壳函数由连续变为不连续,解析性被破坏(如图 4-5);

(6) 基态对应的标准映像的 KAM 环面破缺;

(7) 对于不同的无理的旋转数 $w$,发生相变的临界值 $K_c(w)$不相同,如图 4-6 所示;在所有有理数 $w$ 处,$K_c(w)=0$,即只要 $K\neq 0$,公度基态总会被钉扎;

(8) $K_c(w)$与 $w$ 在 $w=w_0=(\sqrt{5}\pm 1)/2$(黄金分割)处最大,$K_c(w_0)=$

0.971 635 406…

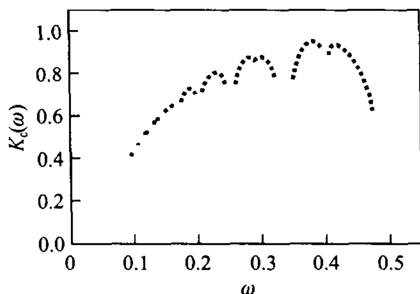



图 4-6 发生相变的临界值 $K_c(w)$

对于 Aubry 相变,人们同样也会关心在临界点附近的各种临界指数及其标度关系.Coppersmith 与 Fisher[403],Peyrard 与 Aubry[400] 等都对这些描述进行了计算,MacKay 发展了 Aubry 相变的重整化理论[379].以下是一些有关量的临界指数规律:

(1) 相干长度:

$$\zeta(K) \sim (K-K_c)^{-v}, v \approx 0.987\,462\,4; \tag{4.1.22}$$

(2) PN 能垒:

$$E_{PN}(K) \sim (K-K_c)^{\Psi}, \Psi \approx 3.011\,722\,2; \tag{4.1.23}$$

(3) 脱钉力:

$$F_d(K) \sim (K-K_c)^{\Psi'}, \Psi' = \Psi; \tag{4.1.24}$$

(4) 声子谱间隙:

$$\Omega_{min}(K) \sim (K-K_c)^{\chi}, \chi \approx 1.026\,880\,3; \tag{4.1.25}$$

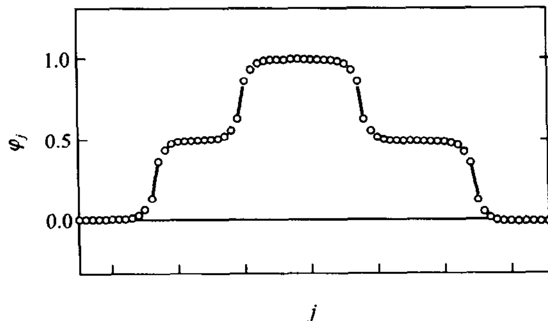



图 4-7 $w-1/2$ 时的缺陷结构

(5) 壳函数最大间隙:

$$\Delta_f(K)\sim(K-K_c)^{\sigma},\sigma\approx 0.712\,083\,5; \tag{4.1.26}$$

人们还定义了弹性常数 $C=(\partial u/\partial w)_K$ 和等效粘滞系数 $\Gamma=\lim\limits_{v\to 0}F/v$,其中 $F$ 为施加于系统的常外力,$v$ 为驱动下的平均运动速度,对黄金分割 $w_0=(\sqrt{5}+1)/2$ 的情况,这两个量在 $K_c$ 附近的临界行为为:

(6) 弹性常数:

$$C(K)\sim(K_c-K)^{S},S\approx 0.049\,328, \tag{4.1.27}$$

(7) 等效粘滞系数:

$$\Gamma(K)\sim(K_c-K)^{-\eta},\eta\approx 0.029\,500. \tag{4.1.28}$$

上面的所有临界指数满足下面的标度关系:

$$2\chi+v=\eta+\Psi, \tag{4.1.29a}$$

$$S=\Psi-3v. \tag{4.1.29b}$$

### 4.1.4 缺陷、界面与亚稳态

当系统处于钉扎态时,基态位形结构是通过引入缺陷来使其物理上稳定的.相对于参考位形 $\{u_j\}$ 来说,如果存在 $r,m\in\mathbf{Z}$ 使得

$$\begin{aligned} &u'_j\to u_j,j\to-\infty,\\ &u'_j\to\sigma_{r,m}\{u_j\}=u_{j+r}+m,j\to\infty, \end{aligned} \tag{4.1.30}$$

则称 $\{u'_j\}$ 是关于 $\{u_j\}$ 的缺陷.此时 $\{u'_j\}$ 的位形结构大部分与 $u_j$ 相同,但在中间 $\{u_j\}$ 被错开,因而产生了缺陷.在标准 FK 系统中,前面提到的基本错公度就是与公度结构有关的缺陷的特例,只是它们仍是极小能量位形.一般情况下缺陷位形结构不是极小能量位形.

当一个位形 $\{w_j\}$ 由两种基态位形 $\{u_j\}$,$\{v_j\}$ 构成时,则 $\{w_j\}$ 中间会有二者的界面.此时 $\{w_j\}$ 的构造为:

$$\begin{aligned} &w_j\to u_j,j\to-\infty,\\ &w_j\to v_j,j\to\infty, \end{aligned} \tag{4.1.31}$$

上面的缺陷结构是界面的一种特例,它是由 $\{u_j\}$ 及其对称变换 $\sigma_{r,m}\{u_j\}$ 产生的.

缺陷可以看成是许多基本错公度的积累.缺陷的过剩长度 $\Delta$ 也可类似于错公度的定义.很显然,对于上述缺陷,

$$\Delta=rw+m. \tag{4.1.32}$$

图 4-7 给出了 $w=1/2$ 时缺陷结构的例子,正是用前面的定义的 $\varphi_j$ 给出的.可以看到它是由几个基本错公度构成的.

另一个常见的情况是：系统的位形结构$\{u_j\}$在物理上是稳定的，但它不是一个极小的能量位形，我们称这种结构为亚稳态.亚稳态在FK系统中很容易看到.Copersmith的研究表明，亚稳态的数目随系统尺寸以指数规律增加.这密切联系着所谓反可积(anti - integrability)的概念，这一概念是由 Aubry 提出的[402].一个系统当其能量是可分的，即

$$H = \sum_j V(u_j), \tag{4.1.33}$$

则称此系统是反可积的.显然对于FK系统来说，反可积极限即粒子间耦合强度趋于零($K\to\infty$)的极限.在此极限下，标准FK模型的平衡态位形结构$\{u_j^{AI}\}$为

$$u_j^{AI} = \frac{1}{2}m_j, m_j \in \mathbf{Z}, \tag{4.1.34}$$

其中$\{m_j\}$为一任意整数序列.对反可积系统基态性质的研究是另一个大的问题[408]，我们这里不再讨论.

## 4.2 Frenkel-Kontorova 系统的耗散动力学

FK系统平衡态性质的研究揭示了丰富的结构和相变动力学行为.这些结构在有限温度下也可以观察到，表明FK系统的公度相与非公度相及其转变是系统内部固有的现象.有两类物理系统在FK非线性动力学与相变的研究中起到了至关重要作用：一类是电荷密度波导体，另一类是约瑟夫森结阵列.在实际系统中，外来的许多因素如外场、涨落等都会使得系统出现更多复杂的动力学行为.本节我们首先讨论FK系统的耗散动力学，即不考虑粒子的惯性效应.注意这里的“粒子”并不一定是实际粒子，因为FK系统可描述的范围很广，只要动力学方程与之一致则可以把有关FK的概念和结果应用进来.

### 4.2.1 常外力驱动下的钉扎-脱钉转变

一、模型与 Middleton 禁越规则

我们先考虑FK系统整体受到一个外力$F(t)$的作用.在耗散情况下，系统的运动方程为：

$$\dot{u}_j + \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi u_j) = (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + F(t), -\infty < j < \infty, \tag{4.2.1}$$

这里$\{u_j(t)\}$是与时间有关的粒子位形分布，$K$描述周期势垒的高度.对每一个初始位形分布$\{u_j(t_0)\}$，上述方程都会给出一个解$\{u_j(t)\}$.在均匀外力作用下，初始时粒子平均间距为$w$的位形随时间演化仍可保持.如果初始位形是周期的，即$\{u_{j+r}(t_0) + m\} = \{u_j(t_0)\}$，则解$\{u_j(t)\}$随时间仍保持周期结构.上述方

程有以下对称性：如果$\{u_j(t)\}$是方程(4.2.1)初始位形为$\{u_j(t_0)\}$的解，则对任意整数 $r, m, \sigma_{r,m}\{u_j(t)\}$为方程(4.2.1)的以$\sigma_{r,m}\{u_j(t_0)\}$为初始条件的解.

对方程(4.2.1)，最重要的一般性结果是 Middleton 禁越规则：如果系统的初始位形保持(或部分保持)一定的顺序关系，即如果$\{u_j(t_0)\}<\{v_j(t_0)\}$，则在任一时刻 $t>t_0$，总有$\{u_j(t)\}<\{v_j(t)\}$.这个保序的特征是相互作用势是凸函数的结果[409,410].当相互作用势非凸时，则这个保序规则不再总是成立. Middleton 禁越规则的重要性在于：

(1) 一个初始转动有序的位形在任何时间都会保持转动有序①；

(2) 一个初始有界的位形$\{u_j(t_0)\}$在任何时刻 $t>t_0$ 仍保持有界，即方程(4.2.1)的解不会随时间演化越来越混乱；

(3) 定义系统整体的运动速度 $\bar{v}=\lim\limits_{\substack{N\to\infty\\T\to\infty}}\dfrac{1}{NT}\sum\limits_{J=-N/2}^{N/2}\int_0^{t_0+T}\dot{u}_j(t)\mathrm{d}t$，则 Middleton 禁越规则决定了平均速度 $\bar{v}$ 的惟一性.当参数 $K, w$ 及外力 $F(t)$的形式给定，则系统有惟一的 $\bar{v}$.这在实验和计算中非常重要，它排除了 $\bar{v}$ 的多值性(多分支性).

二、常外力驱动下的定态与不变性

下面我们考虑 $F(t)=F$ 为常外力的情况.由于此时方程(4.2.1)左右不显含时间，因此时间平移方程形式不变.设 $r, m\in\mathbf{Z}, \tau\in\mathbf{R}$，则变换 $\sigma_{r,m,\tau}$：

$$\sigma_{r,m,\tau}\{u_j(t)\}=\{u_{j+r}(t-\tau)+m\}=\{u'_j(t)\}, \tag{4.2.2}$$

对应于初始位形为 $\sigma_{r,m,\tau}\{u_j(t_0)\}$的解.前面基态的讨论中我们引入了脱钉力 $F_d$，Middleton 禁越规则导致的 $\bar{v}$ 的惟一性，保证了 $F<F_d$ 时 $\bar{v}=0$. $F_d$ 把系统的动力学分成两个区域：当 $F<F_d$ 时系统处于钉扎区，当 $F>F_d$ 时系统处于滑动区.图 4-8(a)给出了 $w=3/5, k=4.0$ 时的 $\bar{v}\sim F$ 曲线，可以看到 $F_d\approx 0.191$.应注意的是，即使 $\bar{v}=0$，也不能说明系统的运动停止.如果系统内有错公度，则错公度仍是运动的，但由于只是微观少数粒子参与，因此系统总的平均速度仍保持为零.这里不再讨论这种特殊情形.我们只考虑$\{u_j(t)\}$为定态的情况.

设$\{u_j(t)\}$是任意定态解，$r\in\mathbf{Z}$，则$\{u_{j+r}(t)\}$也是一个定态解.存在某一个 $\tau\in\mathbf{R}$ 使得在所有时间 $t$，$\{u_{j+r}(t)\}=\{u_j(t+\tau)\}$，则

$$\bar{v}\tau=\langle u_j(t+\tau)-u_j(t)\rangle=\langle u_{j+r}(t)-u_j(t)\rangle=rw, \tag{4.2.3}$$

① 位形$\{u_j\}$转动有序是指对任何对称变换 $\sigma_{r,m}$，位形$\{u'_j\}=\sigma_{r,m}\{u_j\}$总是小于或大于$\{u_j\}$，即新位形整体左移或右移，或者$\{u'_j\}=\{u_j\}$.

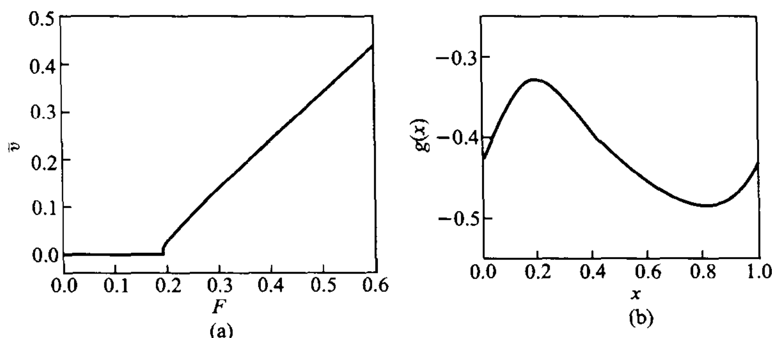



图 4-8 (a) $w=3/5, k=4.0$ 时的 $\bar{v}\sim F$ 曲线;
(b) 动力学壳函数 $g(x)=f(x)-x$ 的行为

由此我们有在任意 $t$,

$$\left\{u_{j+r}\left(t-\frac{rw}{\bar{v}}\right)\right\}=\{u_j(t)\}. \tag{4.2.4}$$

类似的讨论可得到方程解下面的不变性:

$$\{u_j(t-m/\bar{v})+m\}=\{u_j(t)\}. \tag{4.2.5}$$

上面两个结果可写成统一的表达:

$$\sigma_{r,m,[(rw+m)/\bar{v}]}\{u_j(t)\}=\{u_j(t)\}. \tag{4.2.6}$$

三、动力学壳函数

对于给定的定态解 $\{u_j(t)\}$,我们可以用函数 $f(x)=u_j(t)$ 来代换,这里 $x=jw+\bar{v}t$,对于每一个 $x$,$f(x)$ 是惟一的,因此 $f(x)$ 是一个单值的实函数.由于(4.2.5),$f(x+1)=1+f(x)$,并且它是解析的单调增加的函数,我们称其为动力学壳函数.图 4-8(b)给出了 $g(x)=f(x)-x$ 的行为,这里 $w=3/5$,$K=2.0$,$F=0.3$,相应的 FK 系统的定态平均速度 $v(t)$ 的行为也可由壳函数的性质得出:对于 $w=p/q$($p,q$ 互素)的公度结构,$v(t)$ 是振荡的,振荡周期为 $T=1/(q\bar{v})$.对非公度结构来说,$v(t)=\bar{v}$ 是一个常数.

四、脱钉相变

对于 FK 系统来说,当 $F\geqslant F_d$ 时,链会在周期势场中运动(脱钉).粒子在周期势场中的运动问题是物理上非常重要的方面,它涉及输运、超导体转变、界面等许多问题.最简单的是单个粒子在势场中的运动.在只有常外力作用下,粒子的脱钉相变实际上是动力系统理论中鞍结分岔的情况.在 $F_d$ 附近 $\bar{v}$ 的行为为

$$\bar{v}\propto\tau^{-1}\propto(F-F_d)^{1/2}, \tag{4.2.7}$$

这里 $\tau$ 是粒子在一个势阱内的逗留时间.当 FK 的结构是公度的时候($w=p/$

$q$),运动问题会简化为 $q$ 个自由度系统的运动.当 $F \geqslant F_d$ 时,系统处于滑动态,动力学壳函数 $f(x)$ 的存在性使得公度结构脱钉转变的分析可以用单一自由度运动来描述:

$$\dot{u} = h(u), \tag{4.2.8}$$

这里 $h(u) = \bar{v}f'(x), x = f^{-1}(u)$. $f^{-1}$ 的存在可由动力学壳函数的单调性来保证.很容易看出,$h(u)$ 是周期的,在转变点附近每个周期内有 $q$ 个局域极小值,它们与 $F = F_d$ 时粒子的静态位形 $\{u_j^0\}(j = 1, 2, \cdots, q)$ 相联系,如图 4-9(a) 所示.由于上述的单自由度描述,在 $F_d$ 附近公度结构 $\bar{v}$ 的行为与单粒子情况完全一致:

$$\bar{v} \propto (q\tau)^{-1} \propto (F - F_d)^{1/2}, \tag{4.2.9}$$

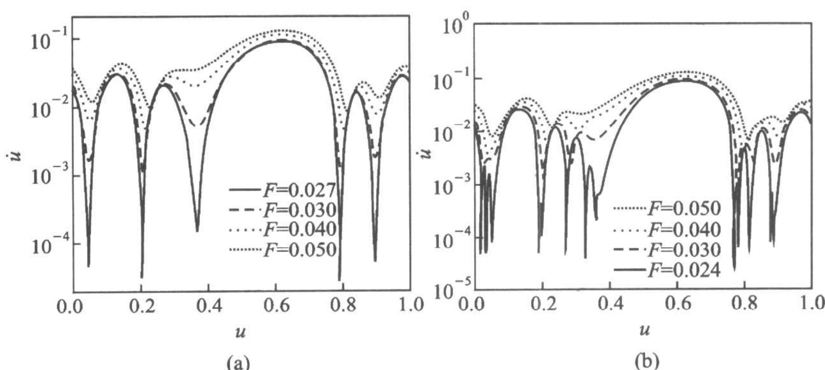



图 4-9 (a) 公度情况的 $h(u)$ 的行为;
(b) 非公度情况下 $h(u)$ 在不同 $F$ 下的情况

非公度结构的脱钉转变相对较为复杂.在 Aubry 相变点以下($K < K_c$,基态是非钉扎态)时,非公度结构的耗散动力学不存在脱钉转变,只要 $F > 0$,系统就会以常速度 $v(t) = \bar{v} \propto F$ 运动.当 $K > K_c$ 时,非公度基态处于钉扎态,此时需要一个有限大小的外力 $F_d$ 才能使结构产生运动.系统结构的非公度性使得我们只能处理一个无限大自由度的问题,而不能像公度情况那样化为单自由度情况处理.

在 $F < F_d$ 时,讨论非公度结构动力学重要的数值分析工具就是转动有序静态的线性稳定性分析.对无理数 $w$,可用有理逼近的方法处理.例如最重要的黄金分割的情况 $w_0 = (\sqrt{5} + 1)/2$,它可以用 Fibonacci 数列逼近:$w_n = F_n / F_{n-1}$, $n \to \infty$,其中 Fibonacci 数列为:

$$F_0 = 1, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n \to \infty. \tag{4.2.10}$$

因此 $w_n = \cdots, 8/5, 13/8, 21/13, 34/21, \cdots$ 可以以最快的速度逼近 $w_0$.

当 $F > F_d$ 时,对非公度结构运动的分析又可以约化到单变量的情况,因为此时系统同样存在解析的单调动力学壳函数 $f(x)$, $\dot{u} = h(u)$. 图 4-9(b)画出了 $h(u)$在不同 $F$ 下的情况,可类似看到有一系列极小值. 因此与这些极小值相联系的粒子在势阱的逗留时间为 $\tau \propto (F - F_d)^{1/2}$. 应当注意到,除了上面与公度情况的共同点之外,二者还存在明显的不同,即在 $F_d$ 附近公度情况$h(u)$的局域极小值个数保持为 $q$,而非公度时局域极小值的个数在 $F \to F_d^+$ 时趋于无穷多!且其数目以幂率发散:

$$\tilde{q} \propto (F - F_d)^{-\delta}, \tag{4.2.11}$$

这样,非公度结构在 $F_d$ 附近 $\bar{v}$ 的临界规律为:

$$\bar{v} \propto (\tilde{q}\tau)^{-1} \propto (F - F_d)^{\zeta}, \zeta = 1/2 + \delta, \tag{4.2.12}$$

这里 $\delta$ 是与 $K$ 和 $w$ 都有关的量. 一般情况下, $\zeta \in (1/2, 1)$, 图 4-10 给出了 $w = w_0$, $K = 2.0$ 时的 $\bar{v}(F)$曲线,在 $F_d$ 附近的规律为 $\zeta \approx 0.74$,从这里我们可以看到非公度情况与公度及单粒子情况的很大不同[411].

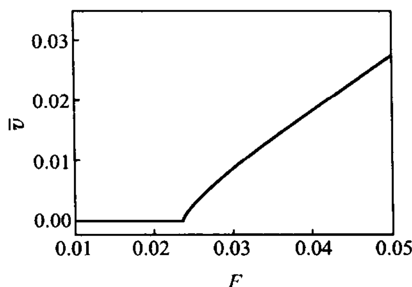



图 4-10　$w = w_0$, $K = 2.0$ 时的 $\bar{v}(F)$曲线

### 4.2.2 周期力驱动下的共振行为

本节我们考虑 FK 系统在周期外力作用下的耗散动力学. 设周期力是均匀地加到系统上的, $F(t) = F(t + T)$. 运动方程仍由(4.2.1)描写. 很容易看出,若 $\{u_j(t)\}$是系统初始条件为$\{u_j(t_0)\}$的解,则由下面变换定义的

$$\sigma_{r,m,s}\{u_j(t)\} = \{u_{j+r}(t - s/\gamma_0) + m\} \tag{4.2.13}$$

是系统初始位形分布为 $\sigma_{r,m,s}\{u_j(t_0)\}$的解. 这里 $r, m, s \in \mathbf{Z}$, $\gamma_0 = 1/T$ 为周期力的频率.

在有周期力的驱动下，FK 系统的动力学不仅存在空间尺度竞争，而且还存在时间尺度的竞争. 当上述的变换具有不变性，即

$$\{u_j(t)\} = \sigma_{r,m,s}\{u_j(t)\} \tag{4.2.14}$$

时，我们就说此解是共振的，由此，周期力的相位变换 $s$ 个周期的时间等于 FK 系统在空间平移 $rw+m$ 的时间，即

$$\Delta t = \frac{s}{\gamma_0} = \frac{rw+m}{\bar{v}}, \tag{4.2.15}$$

$w$ 为粒子平均间距. 这样 FK 系统共振解的平均运动速度为

$$\bar{v} = \frac{rw+m}{s}\gamma_0. \tag{4.2.16}$$

给定一个 $\bar{v}$，可以看到 $(r,m,s)$ 的选择不是惟一的. 对于无理数的 $w$，$(r,m,s)$ 有惟一的最小值. 当 $s=1$ 时，我们称共振是简谐的，当 $s>1$ 时共振是亚谐的. 当然此处的 $(r,m,s)$ 是不可约的. 上面的共振反映出系统与周期外力的同步行为（锁模）.

一、周期开关常外力下的运动

我们先考虑下面的周期力情形，它是用周期地开关常外力来实现的[412~414]：

$$F(t) = \begin{cases} F, t\in(nT, nT+t_{on}) \\ 0, t\in(nT+t_{on}, (n+1)T) \end{cases}, \tag{4.2.17}$$

其中 $n\in\mathbf{Z}$，$t_{on}$ 为常外力 $F$ 的作用时间. 为方便分析，下面设 $t_{on}$ 足够短，则 $F$ 的作用相当于一个短时的脉冲. 在短时脉冲时，前面常外力的结果可以用到这里.

我们先讨论公度结构的情形. 我们选初始位形为 $w=p/q\,(p,q\in\mathbf{Z})$ 的基态 $\{u_j\}$（这可以在撤去外力后容易得到）. 当 $F<F_d$ 时，上面的脉冲力不足以引起系统的运动，$\bar{v}=0$. 即使当 $F>F_d$ 时，如果 $t_{on}$ 太短，初始基态位形没有足够时间移出吸引域，系统也不会向一个方向运动，$\bar{v}=0$. 当 $F<F_d$ 且 $t_{on}$ 足够大（当然要相比 $T$ 较小）时，在关闭 $F$ 期间系统就可以弛豫到一个稳定的位形 $\{u_j^s\}$. 对标准 FK 情形，$\{u_j^s\}$ 具有下面的形式：

$$\{u_j^s\} = \{u_{j+r}+m\}, r, m\in\mathbf{Z}, \tag{4.2.18}$$

因此在外力的一个周期 $T$ 内每一个粒子移动的距离是 $rw+m$，则简谐共振的平均速度为

$$\bar{v}/\gamma_0 = rw+m. \tag{4.2.19}$$

图 4-11(a) 给出了 $w=1/3$，$K=2.0$，$T=21$，$t_{on}=1$ 时的 $\bar{v}(F)$ 曲线，纵轴用 $q\bar{v}/\gamma_0$ 表示，$q$ 为 $w=p/q$ 的分母. 可以看到只有 $\bar{v}=n\gamma_0/q$ 的台阶出现，$n\in\mathbf{Z}$. 每一个台阶都代表一种共振状态，每两个台阶之间是不连续的.

对于处于 Aubry 相变以下的非公度结构，基态的集合是连续的，外周期力的

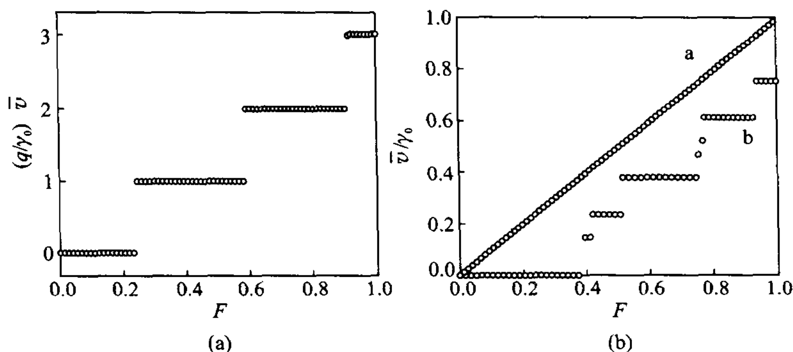



图 4－11　(a) 公度情况开关力作用的 $\bar{v}(F)$曲线;(b) 非公度的 $\bar{v}(F)$曲线

作用不会产生锁模,因此 $\bar{v}(F)$曲线是连续的.这一点可以从图 4－11(b)中的线 a 看出来,这里 $w=w_0, K=0.1<K_c$.当非公度结构处于 Aubry 相变点以上时,系统的运动又会出现与公度结构类似的锁模现象,$\bar{v}(F)$曲线由一系列台阶组成.当然由于 $w$ 是无理数,这些台阶就不再均匀(等间隙)地出现,如图(b)中的线 b 所示,$K=4.0>K_c$.

二、余弦力驱动下的锁模行为

下面考虑一个由直流力与余弦交流力组成的周期力[379,385~387]:

$$F(t)=\bar{F}+F_{ac}\cos(2\pi\gamma_0 t),\tag{4.2.20}$$

其中 $\bar{F}$ 代表直流力的大小,$F_{ac}$代表交流力的幅度,$\gamma_0$ 为周期力的频率.当 $K=0$ 时,系统是完全可解的:

$$u_j(t)=jw+\bar{F}t+\frac{F_{ac}}{2\pi\gamma_0}\sin(2\pi\gamma_0 t)+\alpha,\tag{4.2.21}$$

其中 $\alpha$ 为任意相位(系统平移不变性).当 $K>0$ 时,系统存在两个竞争的频率(时间)尺度:周期力的频率 $\gamma_0$ 和直流力 $\bar{F}$ 驱动下粒子在周期势场中运动的速度(频率).二者之间竞争的结果会导致较为复杂的同步运动.

当 $w$ 为整数时,在基态时每一个粒子都处于周期势势阱底部,有外力时上面的问题可约化成单个粒子的运动:

$$\dot{u}=-\frac{k}{2\pi}\sin(2\pi u)+\bar{F}+F_{ac}\cos(2\pi\gamma_0 t),\tag{4.2.22}$$

这个系统运动的平均速度 $\bar{v}(\bar{F})$会表现出简谐和亚谐共振行为.这在约瑟夫森结实验中表现为 Shapiro 台阶,并得到了广泛深入的讨论.

对于有理的非整数 $w$,我们同样可观察到简谐和亚谐共振台阶:

$$\bar{v}/\gamma_0=\frac{rw+m}{s}.\tag{4.2.23}$$

图 4－12(a)给出的是当 $w=1/2$, $K=4.0$. $F_{ac}=0.2$, $\gamma_0=0.2$ 时的 $\bar{v}(\bar{F})$ 曲线. 与脉冲力不同，除了共振台阶之外，在台阶之间还有连续的曲线，在此处，系统为非锁定状态. 值得注意的是，如果把大台阶之间连续部分放大，还可以发现小的亚谐共振台阶，如图 4－12 中的小图(a)所示($s=2$). 这些亚谐台阶可通过计算定态解的最大李雅普诺夫指数 $\lambda$ 看到，当指数为负时，系统处于亚谐共振锁模态. 图 4－12(b)给出了相应于图(a)参数下在一小区域中 $\lambda$ 的变化情况，可以看到很多 $\lambda<0$ 的区域.

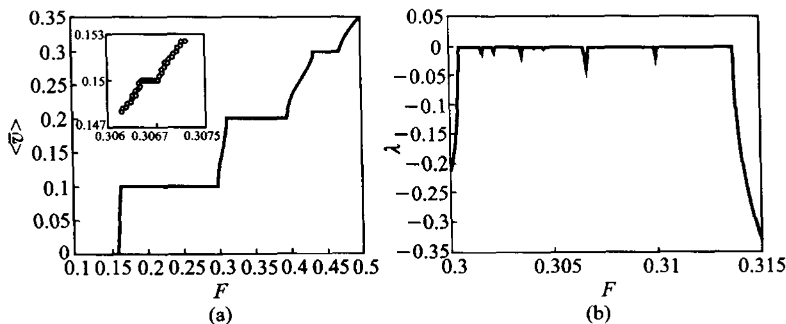



图 4－12 (a) 当 $w=1/2$, $K=4.0$. $F_{ac}=0.2$, $\gamma_0=0.2$ 时的 $\bar{v}(\bar{F})$ 曲线；(b) 相应于图(a)参数下一小区域中 $\lambda$ 的变化情况

Floria 与 Falo 研究了非公度结构的情况. 为方便下面的讨论，我们分析黄金分割倒数平均间距的情况，即 $w=w_0^{-1}=(\sqrt{5}-1)/2$. 对于小的 $K$，系统在外力作用下非公度结构不会产生锁模行为，因而

$$\bar{v}\propto\bar{F}. \tag{4.2.24}$$

为方便研究，可以类似于前面引入的动力学壳函数. 但由于周期力的存在，这里的壳函数应当是二维的，即 $f(x,y)$. 系统状态可表为：

$$u_j(t)=f(jw+\bar{v}t+\alpha,\gamma_0 t+\beta), \tag{4.2.25}$$

这里 $\alpha,\beta$ 为任意相位. 函数 $f(x,y)$是 $y$ 的周期函数和 $x$ 的阶跃周期函数：

$$f(x+1,y+1)=f(x+1,y)=1+f(x,y). \tag{4.2.26a}$$

因此同样可用另一 $x,y$ 均为周期的函数

$$g(x,y)=f(x,y)-x \tag{4.2.26b}$$

代替. 动力学壳函数 $f(x,y)$当 $K,\bar{F},F_{ac},\gamma_0$ 变化时也连续变化. 当 $K\to 0$ 时，$f(x,y)$为

$$f_0(x,y)=x+\frac{F_{ac}}{2\pi\gamma_0}\sin(2\pi y), \tag{4.2.27}$$

这个函数在 $x,y$ 平面是连续解析的. 一个小的 $K$ 对 $f_0(x,y)$ 只是加上了调制，其解析性仍保留. 系统存在临界的与 $\bar{v}$ 有关的 $K_c(\bar{v})$，当 $K>K_c$ 时，$f(x,y)$ 的解析性被破坏. 这种现象与基态的 Aubry 相变很类似，但它是在耗散的驱动动力学系统中的转变. 图 4-13 给出了 $K=1.4, 4.0$ 和 $F_{ac}=0.2, \gamma_0=0.2$ 时动力学壳函数 $g(x,y)$ 的情况，可以看到 $K=1.4$ 时 $g(x,y)$ 是连续的，而 $K=4.0$ 时就变得不连续. 这种相变称为动力学 Aubry 相变. 从动力学上看，**基态 Aubry 相变是非公度结构由钉扎态向滑动态的转变，而动力学 Aubry 相变则是由锁模态向非锁模态的转变**.

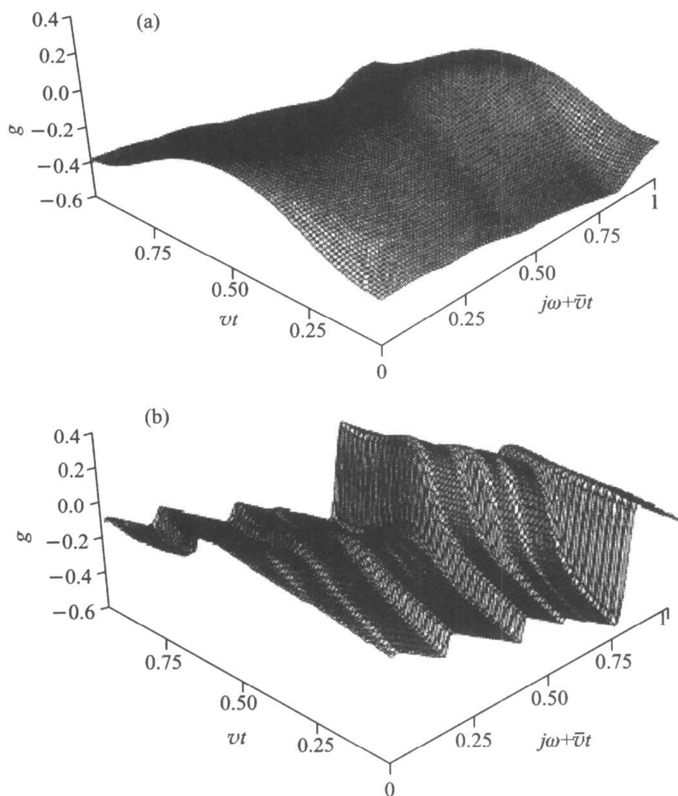



图 4-13　$K=1.4, 4.0$ 和 $F_{ac}=0.2, \gamma_0=0.2$ 时的动力学壳函数 $g(x,y)$

由于动力学壳函数 $f(x,y)$ 的解析性破坏，当 $K<K_c(\bar{v})$ 时，$\bar{v}(\bar{F})$ 曲线就不再是连续的，而是由许多台阶组成的. 特别当 $K$ 较大时，可从 $\bar{v}(\bar{F})$ 线上看到无穷多的锁模共振台阶：

$$\bar{v}/\gamma_0=(rw+m)/s. \tag{4.2.28}$$

图 4－14 给出了 $K=1.4, 2.8, 4.0$ 时三条 $\bar{v}(\bar{F})$ 曲线，可以看到大 $K$ 时的共振台阶．这些台阶对于固定的 $w=(\sqrt{5}-1)/2$ 可用三整数对 $(r,m,s)$ 来描述．对非公度情况 $(r,m,s)$ 可以约化到最小且惟一．图 4－15 给出了当 $F_{ac}=0.2$，$\gamma_0=0.2$ 时系统的锁模共振在 $(K,\bar{F})$ 平面的相图．我们可以看到许多的共振舌头（Arnold 舌头），每一个舌头都与 $(r,m,s)$ 惟一对应．系统较大的舌头 $(0,0,1)$ 对应于 $\bar{v}=0$（钉扎情形）．舌头的宽度随 $K$ 的减小而变窄，在某一 $K_c$ 收缩为零．因此，不同共振舌头的尖端起始点 $K_c$ 都不一样．但状态由舌头内移到舌头外时，系统就会发生动力学 Aubry 相变．

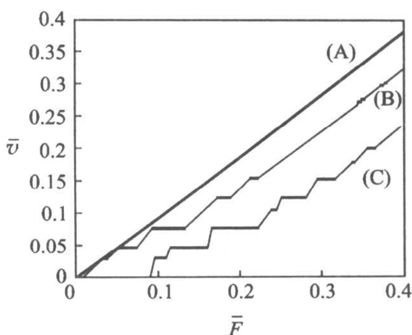



图 4－14　$K=1.4, 2.8, 4.0$ 时的 $\bar{v}(\bar{F})$ 曲线

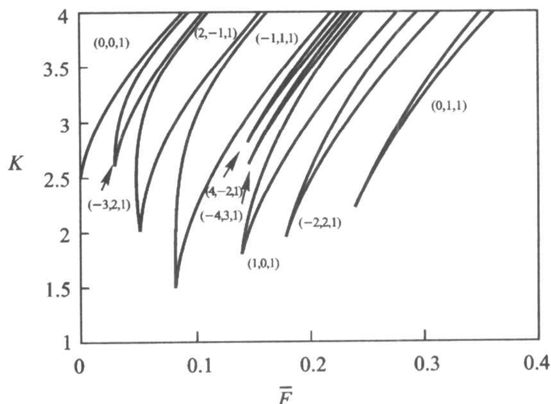



图 4－15　$F_{ac}=0.2$，$\gamma_0=0.2$ 时的锁模共振在 $(K,\bar{F})$ 平面的相图

## 4.3　Frenkel-Kontorova 系统的小阻尼时空动力学

### 4.3.1　模型

前面我们讨论了 FK 系统在外力驱动下的耗散动力学．在一些情况下，系统惯性项的效应可以不予考虑．但在更多情况下，由于系统受到的阻尼不太大，惯

性项仍起着重要的作用,因而在分析时就要考虑它的影响.本节我们要考虑下面的FK系统:

$$\ddot{\theta}_i+\gamma\dot{\theta}_i+\sin\theta_i=K(\theta_{i+1}-2\theta_i+\theta_{i-1})+F(t),i=1,2,\cdots,N,\quad(4.3.1)$$

这里我们用$K$代表振子间的相互作用强度(注意:前面讨论中$K$是代表周期势的高度),$\gamma$是阻尼系数,$F(t)$为均匀作用于FK系统上的力.本节我们主要考虑直流力的情形:$F(t)=F$.这样做的原因主要在于考虑了惯性项$\ddot{\theta}_i$之后,系统本身的动力学行为已经比较复杂了,而用直流力研究可以充分揭示系统内部的时空尺度竞争.若$F(t)$与时间有关,则系统又引入了新的时间尺度,势必使系统分析变得更加困难,不易抓住要害.另外,为便于分析,我们选用标准的FK系统为出发点,相互作用选用最简单的简谐作用.上面的运动方程被用来研究相当多的物理现象,如电荷密度波的输运行为、表面滑动摩擦问题、纳米尺度的摩擦问题、约瑟夫森结阵列、自组织临界性、固体的热传导问题等等.最简单的力学模型就是一系列弹簧连接的单摆在外力矩作用下的动力学行为.因此上面的简单系统可以描述许多不同物理体系中的现象,对它的研究可以发现这些不同物理系统中不同行为表现背后的共同本质问题.

尽管上面的系统看起来十分简单,但它有十分丰富的动力学行为,也只是近十年来这个系统才得到了较为细致的研究.这项研究的主要动力来自于对表面滑动摩擦问题[395]和超导体约瑟夫森结耦合阵列[379]的实验结果.表面摩擦问题本来是一个老问题,但实验上对表面及尺度的要求比较高,尤其是当人们试图从微观上去理解摩擦问题时,对实验设备就提出更高的要求.在纳米尺度的摩擦问题实验也是近十几年的事情,通过对摩擦力与运动速度及负载的关系的研究,人们提出了类似于上述方程的模型,而揭示出的许多现象用上面的FK系统也可实现,因而用FK系统做一些定性的分析使得人们对这一系统的非线性动力学有了很多新的认识.另一个大的方面是耦合约瑟夫森结中涡旋动力学(磁通动力学)的研究.我们知道,单个的约瑟夫森结是用相位差$\theta$来描述,其方程正是经典力学中的单摆运动方程.因此,研究约瑟夫森结阵列的动力学不仅有超导体性质研究的意义,用它们来研究一些非线性动力学行为也是非常理想的,如它们已被用来研究耦合非线性振子的同步、非线性格点系统中波的传播及时空系统复杂动力学等.当考虑约瑟夫森结阵列采取扩散型近邻耦合时,系统就可用FK模型来描述.

我们一般关心系统的长时间及空间平均行为,而FK系统的平均速度与外力的关系在耦合约瑟夫森结中表现为直流电压$V$与电流$I$之间的关系.实验表明,测量系统的$I-V$曲线会出现不连续的台阶现象,说明系统在即使没有交流力时也会出现共振现象,对应于FK系统就是系统的平均速度会出现共振台阶,而这些台阶反映出外力的增加并不导致更大的速度[388~392].我们将在本节中对

此进行讨论，研究这些共振产生的机制，并给出它们的表达式．我们还将分析在这些台阶上的动力学及其在台阶之间转变时动力学的变化．除研究标准的 FK 模型外，我们还将考虑耦合为非凸函数的情形，分析耦合的非凸性所带来的非线性效应．

在上述方程中并未出现粒子间平均间距 $a$（没有外势场时弹簧的自由长度），它实际隐含于系统的边界条件中．本节我们主要考虑周期调制边界条件：

$$\theta_{i+N}(t)=\theta_i(t)+2\pi M=\theta_i(t)+Na, \tag{4.3.2}$$

即粒子间的平均间距 $a=2\pi M/N$，$M\in\mathbf{Z}$ 代表在链上扭结的净数目．它由初始时给出，但在之后是固定的，不再随时间改变．用约瑟夫森结的语言来说，$M$ 即涡漩或磁通量子的数目，它们都是系统的拓扑量，由初始条件给定，可以调节．很显然，方程(4.3.1)在 $M\to M+N$ 时保持不变；另外，如果 $\{\theta_j(t)\}$ 是系统 $M=M_0$ 的解，则 $\{\theta_{N-j}(t)\}$ 为系统 $M=-M_0$ 的解．这两个解只是镜像的关系，因而只需研究 $M=0,1,\cdots,\frac{1}{2}N$ 情况即可．

如果考虑开放边界的情况，本节讨论的主要结果仍然适用．读者可用下面的开放边界条件

$$\begin{cases}\theta_0(t)=\theta_1(t)-2\pi f,\\ \theta_{N+1}(t)=\theta_N(t)+2\pi f\end{cases} \tag{4.3.3}$$

去检验后面的结果．这里 $f\in[0,1/2]\in\mathbf{R}$ 称为阻挫．当 $N$ 很大时，两种边界条件的结果趋于一致．

### 4.3.2 连续化极限：Sine-Gordon 方程

上面的运动方程(4.3.1)实际上是 Sine-Gordon 方程的空间分立化形式，因此 Sine-Gordon 方程的有关结果可以直接应用到分立情形．但分立化带来了新的效应——声子辐射，直接导致了共振现象．我们在这里先考虑连续化极限下的有关动力学．

我们可以把格点 $j$ 用连续变量 $x=j/N$ 代替，则耦合部分变为

$$\begin{aligned}\nabla^2\theta_j(t)&=(\theta_{j+1}-2\theta_j+\theta_{j-1})\\ &\to[\theta(x+l/N,t)-2\theta(x,t)+\theta(x-l/N,t)]\\ &=\frac{1}{N^2}\partial^2\theta/\partial x^2=\frac{1}{N^2}\theta_{xx}(x,t)+\cdots,\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

上面只保留到二阶导数．相应地方程(4.3.1)化为

$$\theta_{tt}+\gamma\theta_t+\sin\theta=F+\lambda^2\theta_{xx},\ x\in[0,1], \tag{4.3.5}$$

其中 $\lambda=K/N$，边界条件为

$$\begin{cases}\theta(x+1,t)=\theta(x,t)+2\pi M,\\ \theta_x(x+1,t)=\theta_x(x,t).\end{cases} \tag{4.3.6}$$

Sine-Gordon 方程在外力驱动下的一个典型解就是行波解[415~418].我们令

$$\theta(x,t)=h(\zeta),\zeta=x+ut, \tag{4.3.7}$$

$u$ 为波速,为待定量.将其代入方程(4.3.5),可得

$$(u^2-\lambda^2)h''(\zeta)+u\gamma h'(\zeta)+\sin h(\zeta)=F, \tag{4.3.8}$$

边界条件为 $h(\zeta+1)=h(\zeta)+2\pi M$.上述 $h(\zeta)$方程为阻尼直流驱动单摆运动方程,有效质量为$(u^2-\lambda^2)$,阻尼系数为 $u\gamma$.

先假定 $u>\lambda$,将变量标度 $\zeta=\sqrt{u^2-\lambda^2}\,\eta$,上述方程化为

$$d^2h/d\eta^2+\alpha dh/d\eta+\sin\eta=F, \tag{4.3.9}$$

其中 $\alpha=\gamma/\sqrt{1-(\lambda/u)^2}$.当 $F$ 足够大时,此方程有周期解(运动解).$F$ 减小时,此解失稳.当 $\alpha\in(0,\alpha^*)$时,系统会经历同宿分岔;当 $\alpha>\alpha^*$ 时,系统经历鞍结分岔,$\alpha^*\approx1.2$,在 $\alpha\in(0,\alpha^*)$及 $F$ 的一个区域内,系统的周期解与不动点解共存.

方程(4.3.9)的周期解满足

$$h(\eta+T_{sp})=h(\eta)+2\pi, \tag{4.3.10}$$

其中 $T_{sp}$为解的周期.由边界条件(4.3.6)可知:

$$M^{-1}=\sqrt{u^2-\lambda^2}\,T_{sp}, \tag{4.3.11}$$

因而

$$T_{sp}=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}(M\gamma\lambda)^{-1}, \tag{4.3.12}$$

由于 $T_{sp}$是$\alpha$ 和$F$ 的函数,当我们把 $\alpha$ 作为自由参量时,因为 $\gamma,M,\lambda$ 均可知,由此式可以确定 $F(\alpha)$.由 $\alpha$ 可以得到:

$$u=\lambda/\sqrt{1-(\gamma/\alpha)^2}, \tag{4.3.13}$$

$\alpha$ 的变化对应于$F$ 的变化,因此此式给出了行波波速 $u$ 与$F$ 的关系.$\alpha$ 的变化范围为$[\gamma,\infty)$(看(4.3.13)式).当 $\alpha\to\infty$ 时,$u\to\lambda$,$T_{sp}\to\infty$,$F\to\sqrt{1+(2\pi\gamma M\lambda)^2}\equiv F_c$;当 $\alpha\to\gamma$ 时,$u\to\infty$,$T_{sp}\to0$,$F\to2\pi\gamma Mu$.

对于 $u<\lambda$ 的情况,系统对应于另一支行波解.我们采取下面变量代换:

$$\zeta=-\sqrt{\lambda^2-u^2}\,\eta,h=\pi-g, \tag{4.3.14}$$

则方程(4.3.8)化为

$$d^2g/d\eta^2+\alpha dg/d\eta+\sin g=F, \tag{4.3.15}$$

其中 $\alpha=\Gamma\Big/\sqrt{(\lambda/u)^2-1}$,即

$$u=\lambda/\sqrt{1+(\gamma/\alpha)^2}, \tag{4.3.16}$$

相应地 $T_{sp}(\alpha,F)=\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}(M\gamma\lambda)^{-1}$. 此时 $\alpha\in(0,\infty)$. 当 $\alpha\to\infty$时, $u\to\lambda$, $T_{sp}\to\infty$, $F\to F_c$; 当 $\alpha\to 0$ 时, $u\to 0$, $T_{sp}\to\infty$, $F\to 0$.

上面两种情况构成了 sine-Gordon 方程(4.3.5)的两支解. 系统的运动速度 $v=\langle d\theta/dt\rangle=2\pi Mu$. 图 4－16 给出了 $v$ 与 $F$ 的关系曲线. 可以看到整个曲线在 $v=u$ 处被分成左右两支. 右边一支(对应于 $u>\lambda$)具有较高的速度,我们称为高速区,左边一支则称为低速区, $v_c=2\pi\sqrt{K}M/N$. 可以看到在 $v$ 很大时 $v$ 与 $F$ 之间是直线的关系,这与我们的直观结果是相符合的.

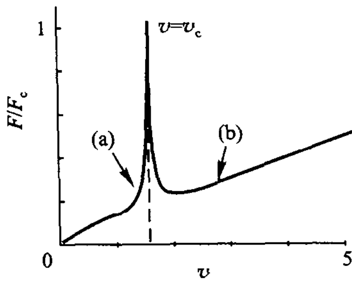



图 4－16 sine-Gordon 方程的 $v(F)$关系曲线

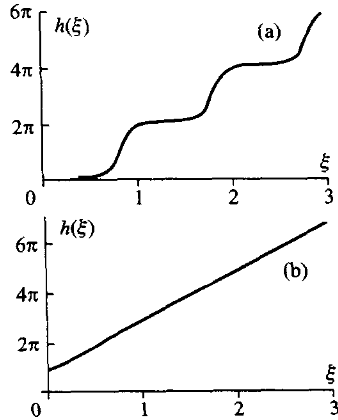



图 4－17 sine-Gordon 方程在低速和高速两个区域内的波形

前面的分析没有讨论 $v(F)$曲线上行波运动的稳定性. 研究表明,行波解在低速区都是稳定的,而是在高速区负斜率部分是不稳定的. 值得注意的是,在低速区和高速区,行波的波形 $\eta(\zeta)$是不一样的. 图 4－17 给出了在两个区域内的波形情况(对应于 $v(F)$曲线上的(a),(b)点). 可以看到在低速区的行波波形出现数个很陡的扭结结构(多个扭结来自于 $M>1$), $h$ 在 $\zeta$ 的一点范围内保持不变,在扭结区域有很陡的 $2\pi$ 变化. 当 $u\to\lambda$ 时(即 $v\to v_c^-$),扭结的宽度趋于 0,可以看到速度 $v$ 被压缩在 $v_c$ 附近. 此时的临界速度 $v_c$(或 $u_c=\lambda$)称为扭结的光速(扭结收缩的机制与 Lorentz 收缩类似). 在高速区,当 $u\to\lambda(v\to v_c^+)$时 $h(\zeta)$ 解也会出现类似的收缩,但由于靠近 $v_c$ 的负斜率部分动力学上的不稳定,因而这种扭结收缩在高速区观察不到. 因而可观察到的波形 $h(\zeta)$与 $\zeta$ 几乎是线性变化的,因定可称此时的扭结是拉伸的或延展的.

### 4.3.3 低速区的共振现象及动力学

一、共振台阶的机制及平均场理论

对连续化极限的讨论使我们对FK系统的大致动力学行为有了一个总体认识.系统在外力的作用下分为低速区和高速区两个截然不同的运动区域.低速区时系统为压缩的扭结运动,而在高速区压缩的扭结则被拉伸.对于分立化的FK格点系统来说,这两个区域仍然保留,但由于分立化,使得系统又有了有别于连续的情况和新现象.共振现象即为一种表现.我们首先着眼于低速区的情况.为研究系统的整体行为,我们会计算平均速度:

$$v = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\langle \dot{\theta}_i \rangle, \tag{4.3.17}$$

这里$\langle\cdot\rangle$代表时间平均.另外我们用$\delta = M/N$表示链内拓扑扭结数目与总粒子数的比值.下面的结果中我们看到,系统的动力学性质取决于$\delta$,而与$N$的大小没有直接关系.

在低速区,由耦合项的分立性带来的直接后果就是整体行波在运动过程中会辐射出小幅线性波(下面称为声子,因它是由振荡引起的).在这个行为背后的关键机制就是耦合链与周期势场的竞争作用.在连续化极限下,尽管周期势场存在,它的作用由Sine-Gordon方程给出.而在分立情况下,由于粒子间相互作用强度有限,耦合链在非均周期场中运动时会发生格点与势的相互作用,其后果就是使得扭结(kink)在运动时不是固定不变形的,它会产生小幅振荡.图4-18给出了在$F=0.4, N=100, M=1, \gamma=0.1, K=1.0$时某一时刻粒子的位置分布,我们可以观察到总体上系统位形结构是一个扭结结构,与连续情况类似.所不同的是,在靠近扭结的地方有一些粒子的位置在平衡位置附近作振荡型分布.因此,在分立格点情况下,系统的行波结构是由运动的扭结骨架和围绕骨架的辐射声子波构成.运动扭结的声子辐射现象曾由Currie等[419]、Peyrard与Kruskal[420]以及其他研究者[421,422]数值讨论过,而且这一现象在约瑟夫森结阵列实验中也观察到.通常声子的辐射含有多种频率模式.在某些情况下,其中一些特定的模

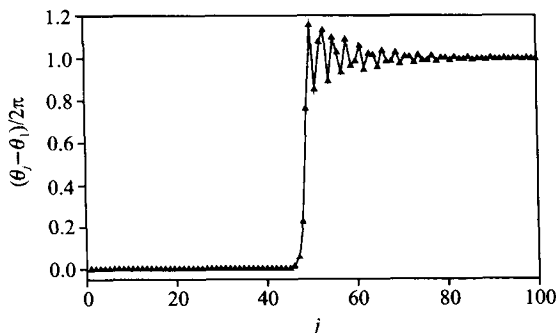



图4-18 小阻尼下某一时刻粒子的位置分布

式会与扭结的运动模发生共振作用,因而产生锁相行为.这种情况发生在线性模被单独激发(共振)时.这种锁相行为反映在粒子的运动上就是系统的平均运动速度 $v$ 出现共振台阶.在台阶上,虽然外力一直增加,但锁相速度没有明显增加.从后面我们可以看到,外力所注入的多余能量使系统的动力学变化复杂化.

根据上面的分析,我们下面对锁相行为进行较为系统的推导和描述.设FK系统的定态扭结解为$\{\theta_j^*\}$, $j=1,2,\cdots,N$.在外力驱动下扭结沿外力的方向运动.分立格点使扭结在运动中辐射声子,我们可以在运动方程(4.1.1)的运动扭结解附近线性化,$\theta_j(t)=\theta_j^*(t)+u_j(t)$,可得到

$$\ddot{u}_j+\gamma\dot{u}_j+[\cos(\theta_j^*)]u_j=k(u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}),j=1,2,\cdots,N. \tag{4.3.18}$$

对于较小的 $\gamma$,我们可以将上面方程中的耗散项略去,我们就得到保守的运动方程:

$$\ddot{u}_j+[\cos(\theta_j^*)]u_j=K(u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}), \tag{4.3.19}$$

我们的目的在于得到线性声子辐射的色散关系.但上面方程中左边第二项的$\cos(\theta_j^*)$是一个与格点 $j$ 有关的量,这使得色散关系的得出变得困难.由图4-18可以看出,声子辐射只是在扭结的尾部(尾波,wake)发生,因此我们可以采用平均场近似的方法,设法使得上述方程左边第二项的格点依赖性只发生于 $u_j$,即我们用一个平均值

$$\beta_{MF}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\cos(\theta_j^*) \tag{4.3.20}$$

来代替方程中含$\cos(\theta_j^*)$的项,我们称 $\beta_{MF}$ 为收缩因子.值得指出的是,$\beta_{MF}$是一个与时间无关的量,因为它只依赖于定态扭结的拓扑性质.收缩因子描述的是扭结解$\{\theta_j^*\}$的压缩效应.例如,当 $M=1$ 时,若 $N$ 很大,$\delta=M/N\to0$,此时扭结可用下面的 $2\pi$ 扭结近似:

$$\theta_j^*(t)=\begin{cases}0, & j<vt,\\ 2\pi, & j>vt,\end{cases} \tag{4.3.21}$$

所以 $\beta_{MF}\to1$.这个结果与Watanabe等人的结果一致.用了平均场近似后,声子方程为

$$\ddot{u}_j+\beta_{MF}u_j=K(u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}), \tag{4.3.22}$$

现在我们把线性声子模 $u_j(t)=\exp[i(w_lt+kpj)]$代入上面方程,就可很容易地得到声子频率 $w_l$ 与空间波矢 $kp$ 之间的色散关系:

$$w_l=\sqrt{\beta_{MF}+4K\sin^2\left(\frac{1}{2}kp\right)}. \tag{4.3.23}$$

在周期调制边界条件下,扭结在环上的运动角频率为 $w_k=2\pi/T=v$,即系统的

平均运动速度. 当 $w_k$ 与 $w_l$ 满足下述条件时:

$$m_1 w_k = m_2 w_l, m_1, m_2 \in \mathbf{Z}, \tag{4.3.24}$$

扭结的运动与声子的辐射就会发生共振,此时扭结运动频率与线性模锁定. 由周期边界,声子的波数应满足:

$$m_2 kp = m_1 \cdot 2\pi\delta. \tag{4.3.25}$$

这样系统的速度共振台阶就由下式给出:

$$v(m_1, m_2) = w_k = \frac{m_2}{m_1}\sqrt{\beta_{MF} + 4K\sin^2(m_1\delta\pi/m_2)}, m_1, m_2 \in \mathbf{Z}. \tag{4.3.26}$$

这个结果由笔者及合作者于 1998 年给出[423,424]. 相比于之前的研究者[388~391],上述结果考虑了以下几点:(1)上面的推导虽然用了平均场近似,但充分考虑了扭结的压缩效应,这一点反映在收缩因子 $\beta$ 上. 而在此之前的推导均未考虑到这一点,有的或者只考虑 $\beta_{MF}=1$ 的情况,有的干脆将此项不考虑(令$\beta_{MF}=0$);(2) 这里我们用一对整数($m_1$, $m_2$)来描写扭结与声子之间的锁相效应,充分考虑了亚谐共振效应. 这种共振在 $\delta=0$ 时尤为重要. 在此之前的讨论均只考虑了 $m_2=1$ 的情况. 上述结果既考虑了 FK 系统的公度性效应,又将亚谐共振包含进来,因而完整地给出了系统的速度共振台阶.

二、数值结果

对上述的理论预测公式,我们可以用数值模拟 FK 系统来检验. 在图 4-19 中,我们给出 $N=8, \gamma=0.1$ 及 $M=1,2,3$ 时的 $v(F)$曲线. 我们可以看到许多的共振平台,它们都是由于扭结在运动中与辐射出来的声子模发生锁定而造成的. 在许多地方可以看到, 同一力 $F$ 可对应多个不同的 $v$ 值. 这是由单粒子在周期势场中小阻尼运动的双稳性造成的. 当许多粒子相互耦合时,我们就会在同一 $F$ 下对不同的初始条件得到不同的定态,形成多稳性. 由于这种多稳性,我们如果绝热改变 $F$ 来计算 $v$,就会出现曲线的滞后效应. 另外由于共振台阶的出现,打破了连续极限下 Sine-Gordon 方程 $v(F)$曲线的连续性,曲线会出现多个共振平台. 在图中我们用($m_1$, $m_2$)来验证这些台阶,并对照系统实际的动力学行为,然后标在图中. 图中所有可看到的共振平台都可以用公式(4.3.26)很好地预测出来. 在图(a)~(c)中,我们分别取 $\beta_{MF}=0.55, 0.25, 0.15$. 可以看到,当 $M>1$ 时,亚谐共振台阶出现得十分频繁. 为了有一个对比,在表 4-1 中我们给出了上述三种情况下的台阶及其数值结果. 公式(4.3.26)的预测结果和以前的预测理论结果 $v=w_k=m_1^{-1}\sqrt{1+4K\sin^2(m_1\delta\pi)}$ 相对照. 可以清楚看到,公式(4.3.26)不仅可预测所出现的台阶,而且与数值结果更接近,有的在误差范围内几乎完全一样,而以前的预测值则差很多,而且对亚谐台阶根本没有预测.

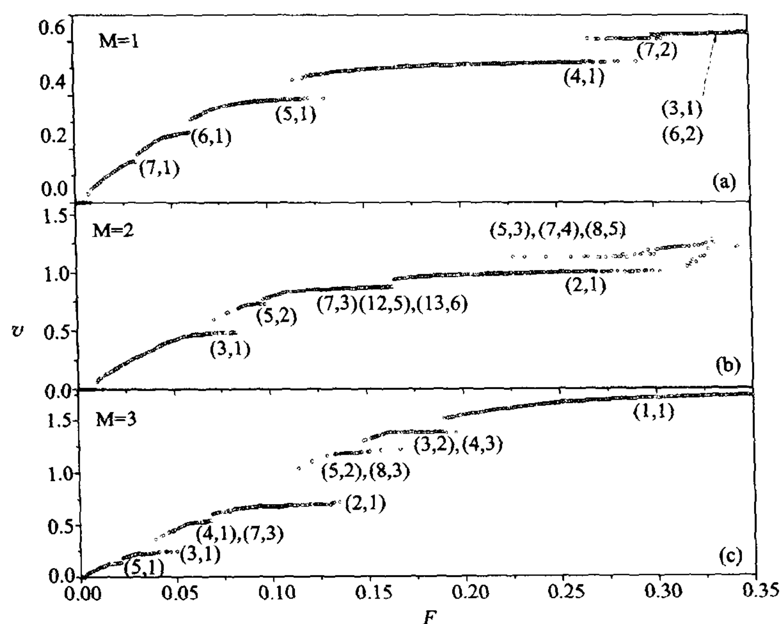



图 4-19 $N=8,\gamma=0.1$ 及 $M=1,2,3$ 时的 $v(F)$ 曲线

**表 4-1 共振台阶不同预测及其数值结果的对照**

| 共振($m_1,m_2$) | 数值结果 | 平均场近似 | 以前预测 |
|---|---|---|---|
| | | (a) $\delta=1/8,\beta=0.55$ | |
| 3:1 | 0.640 | 0.637 | 0.700 |
| 4:1 | 0.525 | 0.533 | 0.559 |
| 5:1 | 0.395 | 0.398 | 0.420 |
| 6:1 | 0.260 | 0.266 | 0.289 |
| 7:1 | 0.150 | 0.152 | 0.180 |
| 7:2 | 0.605 | 0.599 | 未预测 |
| | | (b) $\delta=2/8,\beta=0.25$ | |
| 2:1 | 1.000 | 1.030 | 1.118 |
| 3:1 | 0.501 | 0.500 | 0.577 |
| 5:2 | 0.751 | 0.766 | 未预测 |
| 5:3 | 1.125 | 1.197 | 未预测 |
| 7:3 | 0.850 | 0.855 | 未预测 |
| 7:4 | 1.125 | 1.157 | 未预测 |
| 8:5 | 1.230 | 1.229 | 未预测 |

续表

| 共振($m_1$, $m_2$) | 数值结果 | 平均场近似 | 以前预测 |
|---|---|---|---|
| 12:5 | 0.850 | 0.819 | 未预测 |
| | (c) $\delta=3/8,\beta=0.15$ | | |
| 1:1 | 1.800 | 1.888 | 2.100 |
| 2:1 | 0.720 | 0.733 | 0.866 |
| 3:1 | 0.250 | 0.286 | 0.420 |
| 3:2 | 1.368 | 1.333 | 未预测 |
| 4:1 | 0.510 | 0.509 | 0.559 |
| 5:1 | 0.131 | 0.172 | 0.252 |
| 7:2 | 0.510 | 0.488 | 未预测 |
| 8:5 | 1.210 | 1.213 | 未预测 |

图 4-20 画出的是在不同情况下 FK 系统一个粒子运动的速度 $v_j(t)=\dot{\theta}_j(t)$的变化情况. 在图(a)中, $N=16$, $M=1$, $\gamma=0.1$, $K=1.0$, $F=0.05$, 我们只显示了速度的大于零部分. 可以看到速度会有一个很大的脉冲, 之后伴随一系列小的脉冲. 大脉冲表明粒子从一个势阱跳到另一个势阱内, 相邻的稍低的脉冲实际上是相邻粒子发生相应跳跃时的响应, 其他小脉冲均是其他粒子经历跳跃

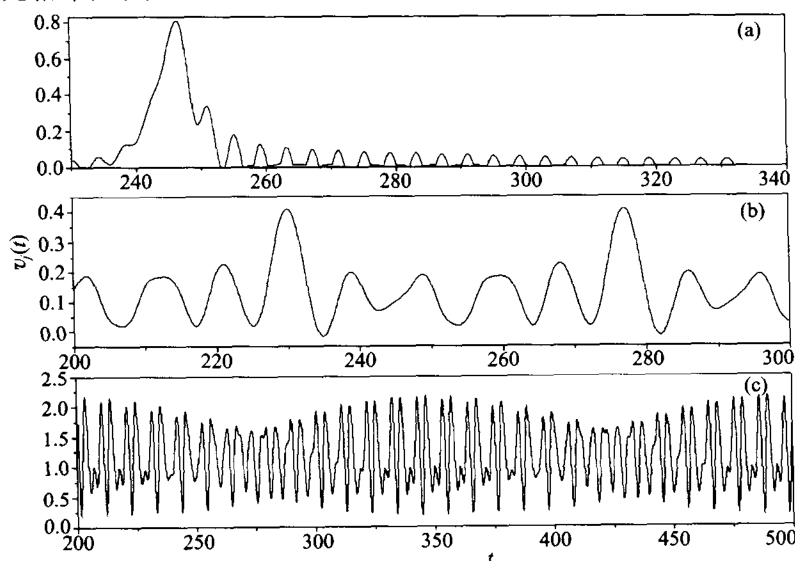



图 4-20　不同情况下 FK 系统一个粒子运动速度的变化情况

时的响应,这些响应随时间(实际是随格点距离)增加而指数衰减,一直到扭结波再传来,粒子重新出现大脉冲,发生新的跃迁.在小脉冲过程中,粒子不再有跳跃.这是典型的粘连-滑动(stick-slip)运动.如果在 $F$ 的一个变化范围里粒子速度在一定时间内的总脉冲数目保持不变,则 $v(F)$ 表现为共振台阶,$m_1:m_2$ 由大峰与小峰的数目决定,显然图(a)是一个 $m_1:1$ 的共振.随着外力 $F$ 的增大,相邻粒子间的影响也变大.图(b)给出了 $N=8, M=3, F=0.02$ 时的一个 5:1 共振,即粒子跳跃一次期间速度共有 5 个峰.当 $M>1$ 时,多扭结效应加强,我们可以看到高阶的共振形式,如图(c)所示.值得注意的是,$v(F)$ 曲线上的一点可以对应于系统多种运动状态,这一点以前的研究者没有指出来.例如,$m_1:m_2$ 和 $nm_1:nm_2(n\in\mathbf{Z})$ 的共振在约化形式上一样,但它们对应于完全不同的运动,这可在时空结构的多样性上体现出来.另外,当共振的值 $m_1:m_2$ 比较接近时,速度共振台阶几乎是简并的,这些相邻的模式会相互作用,从而导致更复杂的时空动力学.特别地,当粒子间耦合强度 $K$ 减小时,系统的分立性效应更明显,我们会观察到更多的共振,这些共振可以非常密集甚至重叠.此时系统的运动情况最为复杂.

三、平均场理论的物理解释

从前面的数值结果与平均场结果的对比可以看到二者符合得非常好.而从前面的收缩因子 $\beta$ 的选取来看它与 $\delta$ 有一定的关系.我们比较关心 $\beta$ 的物理意义.由于 $\beta$ 只与静态扭结的结构有关系,我们来研究耗散的情形:

$$\dot{\theta}_j = -\cos\theta_j + k(\theta_{j+1} - 2\theta_j + \theta_{j-1}) + F, \tag{4.3.27}$$

当 $F=0$ 时,上述方程用数值来确定 FK 系统的基态,因此实际上基态正对应于静态扭结.对直流力驱动的耗散的 FK 系统,我们在前面指出存在一个临界 $F_c$,当 $F<F_c$ 时 FK 的结构是钉扎的,而当 $F>F_c$ 时结构是滑动的.对公度情形($\delta$ 是有理数),$F_c$ 对所有 $K$ 都大于零,而对于非公度情形,当 $K>K_c$ 时 $F_c=0$.对上面的方程 $j$ 取和,可有

$$\langle\dot{\theta}_j\rangle = -\langle\cos\theta_j\rangle + F, \tag{4.3.28}$$

只有当 $F>F_c$ 时扭结是运动的,因此我们有

$$\beta_{MF} = \langle\cos\theta_j^*\rangle = F_c, \tag{4.3.29}$$

即 $\beta_{MF}$ 就是使得扭结克服 PN 垒沿链连续移动所需的脱钉力[377].这个结果很有意义,因为 Aubry 相变的很多信息都包含于 $F_c$ 中,$\beta_{MF}$ 反映 FK 系统公度性的影响.在图 4-21 中,我们画出了 $\beta_{MF}$ 在不同 $K$ 下与阻挫 $\delta$ 的关系.可以看到,所有的曲线都是关于 $\delta=0.5$ 对称的,这是 FK 系统对称性的结果.另外,所有的曲线都是非单调的,可以看到曲线上很多的小峰(特别是 $K$ 为中等强度时),这些峰位于 $\delta$ 为有理数的位置,反映出公度性的影响.最明显的峰位于 $\delta=0/1, 1/1, 1/2$

等处,所有的峰位置可用 Farey 序列给出:

$$p_n/q_n, p_{n+1}/q_{n+1} \rightarrow p_{n+2}/q_{n+2} = (p_{n+1}+p_n)/(q_{n+1}+q_n), p, q \in \mathbf{Z}. \tag{4.3.30}$$

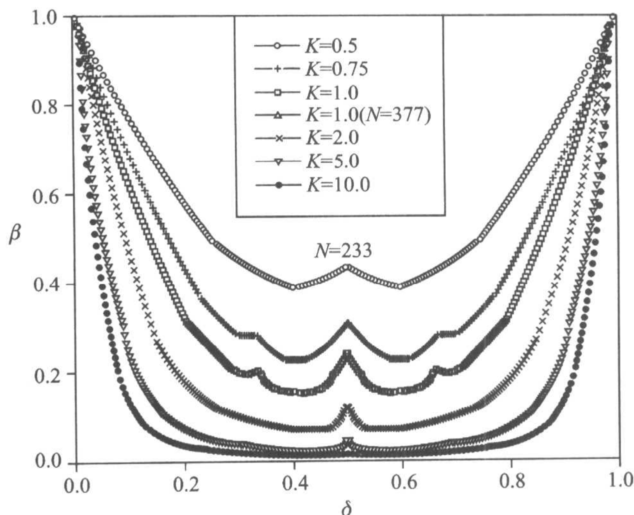



图 4-21 $\beta_{MF}$ 在不同 $K$ 下与阻挫 $\delta$ 的关系

图 4-21 的结果与前面的 $\beta_{MF}$ 试验值符合得非常好.这也从侧面证实了平均场的理论结果是合理的.

对于有限耦合 $K$,系统的分立性导致在低速区的最大速度位于 1:1 共振台阶上($m_1$ 不能小于 $m_2$):

$$v_{\max}(\delta, K) = \sqrt{\beta_{MF}(\delta, K) + 4K\sin^2(\delta\pi)}, \tag{4.3.31}$$

它是 $\delta$ 与 $K$ 的函数.图 4-22(a)画出了 $v_{\max}$ 在不同 $K$ 下与 $\delta$ 的关系.可以看到复杂的关系.当 $K$ 很大时,由于 $\beta_{MF} \in [0,1]$,因而上式中的 $\sin(\delta\pi)$ 项会起很大作用,但在 $\delta$ 接近于 0 或 1 时,$\sin(\delta\pi)$ 很小,此时 $\beta$ 起着重要作用.

虽然从理论上说系统在低速区的最大速度在 1:1 处,但实际观察中在很多情况下我们却不能看到 1:1 甚至 2:1 等台阶.许多台阶看不到的原因有这样几点:(1) 前面的推导中没有考虑耗散效应,略去 $\gamma\dot{\theta}_j$ 的项,当 $\gamma$ 较大时,耗散会使得一些共振被"平滑"掉了;(2) 耦合强度 $K$ 的影响,$K$ 很大时,系统趋于空间连续的 Sine-Gordon 方程,因而共振被抹平;(3) 系统存在内部的限制,即对连续 Sine-Gordon 系统,低速区的 $v \leqslant v_c = 2\pi\delta\sqrt{K}$.因此我们又有以下的判据:

$$v(m_1, m_2) \leqslant v_c = 2\pi\delta\sqrt{K}, \tag{4.3.32}$$

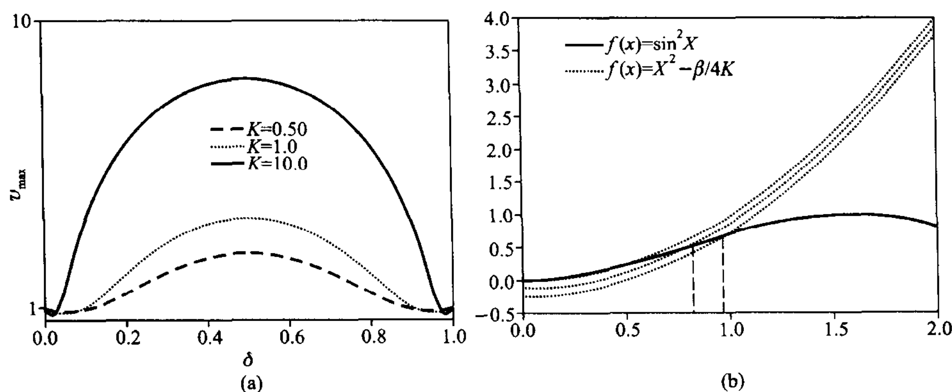



图 4-22 (a) $v_{max}$在不同 $K$ 下与 $\delta$ 的关系;
(b) $f(X)$和 $\sin^2 X$ 在不同$\beta_{MF}$下的曲线

这意味着超过 $v_c$ 的那些台阶将不能观察到. 将上式具体化,令 $X=\delta\pi m_1/m_2$, $X\in[\delta\pi,\infty)$(因为 $m_2$ 最大只能等于 $m_1$),我们有下述不等式:

$$X^2-\beta_{MF}/4K\geqslant\sin^2 X, \tag{4.3.33}$$

在图 4-22(b)我们画出了 $f(X)=X^2-\beta_{MF}/4K$ 和 $\sin^2 X$ 在不同$\beta_{MF}$下的曲线, $K=1.0$. 当在 $X=X_0$ 虚线越过实线时的共振台阶是可看到的. 在实际模拟中, 我们采用有限大小的 $N$,比如我们考虑 $M=1$ 即 $\delta=1/N$ 及 $m_2=1$ 的情况,则消失的台阶满足 $m_1\delta\pi=m_1\pi/N\leqslant X_0$,我们有 $m_1\leqslant NX_0/\pi$. 当 $\delta$ 很小($N$ 较大)时,$X_0\approx0.15$,因此 $m_1\leqslant0.95\ N/\pi$. 例如,当 $N=8$ 时,$m_1<3$,此结果与数值观察完全一致;当 $N=16$ 时,$m_1\leqslant5$,即 $m_1$ 在 6 以下的台阶都要消失,这个结果在数值计算中得到完全一致的验证.

四、共振台阶上的动力学

当系统没有共振台阶时,动力学的吸引子是简单的扭结行波. 共振台阶的出现来源于扭结运动与声子辐射之间的锁相,所以共振的出现使系统的运动变得复杂. 大波数($m_1$)共振台阶上的动力学比较简单,因为它们只需一个小的外力 $F$ 就可激发得到. 当 $F$ 较大时,更多的线性模(声子)可以被激发出来,它们相互竞争,相互作用,系统的动力学就变得复杂. 一个很有意义的问题就是共振台阶之间跃迁的动力学. 是什么使得原先的台阶失稳而跳跃到新的台阶上? 在实际观察中,我们可以看到沿着一个共振台阶绝热增加 $F$ 时系统动力学的变化:

(1) 周期运动→周期运动→跃迁到新台阶;

(2) 周期运动→准周期运动→跃迁到新台阶;

(3) 周期运动→准周期运动→混沌运动→跃迁到新台阶.

第(1)种情况主要出现于外力 $F$ 较小时的那些台阶上. 这种情况下,在共振台阶上,运动的扭结与其辐射出的声子相互作用,产生锁相. 当增加 $F$ 时,多出的能量没有使系统运动得更快,而是用来放大线性波的振幅. 振幅大到一定程度就会反过来破坏这个共振,导致运动跃迁到新的台阶上. 从这个角度来看,声子对扭结运动的锁定可以认为是为系统带来了额外的阻尼或耗散. 在 $F$ 较大时,系统扭结运动会辐射出几个线性波,它们相互作用的结果会导致准周期甚至混沌运动,即第(2)和第(3)种情况. 这里 $F$ 增大的作用不仅是放大线性波的幅度,而且也激发出新的模式.

在图4-23中,我们画出了 $N=8, M=3, \gamma=0.1, K=1.0$ 时在3:2台阶上改变 $F$ 的运动情况. 为方便,我们画出了 $\sin\theta_1$ 与 $\sin\theta_2$ 的 Poincané 截面. 截面上的点是当平均变量

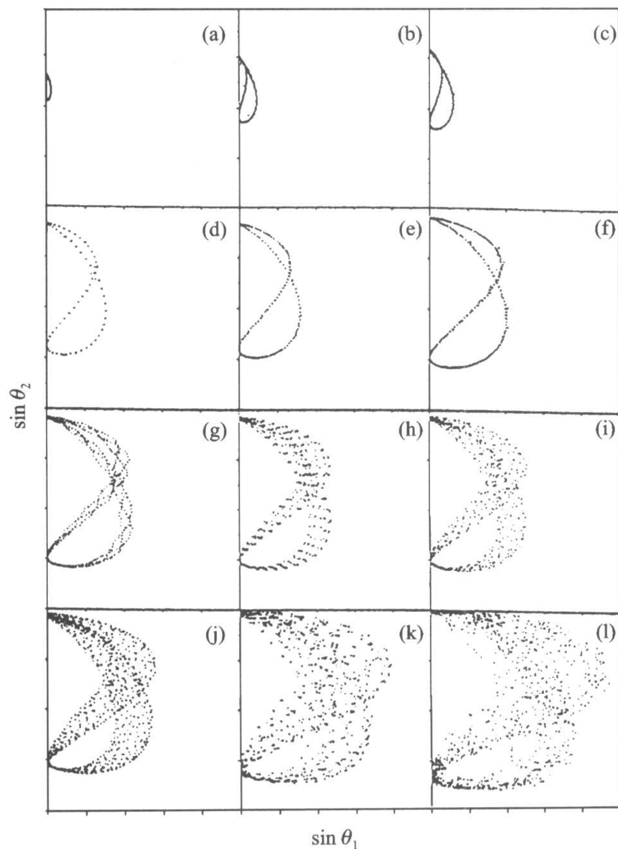



图4-23　3:2台阶上改变 $F$ 的 Poincané 截面

$$\langle \theta(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \theta_j(t) = 0 \pmod{2\pi} \tag{4.3.34}$$

时记录的.当 $F$ 处于台阶的左端时,Poincaré 截面上是一个点(没有画出来),说明系统的运动是周期的.增加 $F$,可以发现从某一 $F$ 开始,截面上的点变成了闭合环,表明周期运动被二频准周期所代替;继续增加 $F$,可以看到闭合环不断增大,在图(d)出现了环面倍分岔;在图(g)又会出现更为复杂的网状结构(我们没有考察在从(f)到(g)的过程中是否还有更多的环面倍分岔).$F$ 继续增加时,系统在环面上出现混沌运动(也没有三频准周期).在图(k)和(l)中,环面混沌被破坏,系统出现更大范围的混沌运动.这种现象与前面所讨论的准周期到混沌的道路非常类似.

### 4.3.4 高速区的共振现象及动力学

在高速运动区,FK 系统在外力驱动下也会出现共振台阶[390,391].与低速区的共振不同,这里的共振是由于周期的整体旋转解在运动中激发出系统的固有振荡模而出现了失稳.除机制不同外,高速区的这种参数不稳定性在连续化 Sine-Gordon 系统中也会发生.下面的讨论集中于分立的情况.在分析共振之前,我们先讨论关于周期解的稳定性分析问题,然后分析 $\delta=0(M=0)$的情况,再将结果推广到 $M\neq0$.我们会看到 $M\neq0$ 与 $M=0$ 的情况有明显不同,前者的模式是相互耦合的,而后者是可分离的.因而 $M\neq0$ 的分析更为复杂.

一、周期解的稳定性分析

设 FK 系统在高速区的周期旋转解为$\{\theta_j^*(t)\}$,$\theta_j^*(t+T)=\theta_j^*(t)+2\pi$,$T$ 为最小周期.为研究其稳定性,令

$$\theta_j(t)=\theta_j^*(t)+u_j(t),\ j=1,2,\cdots,N, \tag{4.3.35}$$

$u_j(t)$为一小扰动.将其代入方程(4.3.1)并只取线性项,我们有

$$\ddot{u}_j+\gamma\dot{u}_j+[\cos\theta_j^*(t)]u_j=K\nabla^2u_j,\ j=1,2,\cdots,N, \tag{4.3.36}$$

相应的边界条件为:

周期边界条件:$u_{j+N}(t)=u_j(t)$, (4.3.37a)

开放边界条件:$u_0(t)=u_1(t)$,$u_{N+1}(t)=u_N(t)$, (4.3.37b)

显然方程(4.3.36)有解$\{u_j=0\}$,这个平庸解的局部稳定性由 Floquet 乘子决定[425].方程有 $2N$ 个独立函数,每个函数都满足

$$u_j(t+T)=\mu u_j(t), \tag{4.3.38}$$

$\mu$ 为 Floquet 乘子,可为实数,也可为复数,显然我们有 $2N$ 个乘子.如果所有 $2N$ 乘子都满足$|\mu|<1$,则平庸解$\{u_j=0\}$是稳定的.只要有一个$|\mu|>1$,则解就不稳定.很明显,$u_j(t)=\dot{\theta}_j^*(t)$即沿周期解轨道的解是一个平庸乘子解,相应的乘

子 $\mu=1$.

我们作变量替换

$$u_j(t)=\mathrm{e}^{-\gamma t/2}v_j(t),j=1,2,\cdots,N, \tag{4.3.39}$$

可以将 $u_j(t)$的方程转化为含时的哈密顿系统:

$$\ddot{v}_j-p_j(t)v_j=K\nabla^2 v_j,j=1,2,\cdots,N, \tag{4.3.40}$$

其中

$$p_j(t)=K/4-\cos\theta_j^*(t). \tag{4.3.41}$$

方程(4.3.40)的所有乘子都必须处于单位圆上,即它们都是成对出现,且乘积为1,因此相应的乘子 $\mu$ 都必须处于半径为 $r=\mathrm{e}^{-\gamma t/2}$ 的圆上. 换句话说,这 $2N$ 个乘子构成 $N$ 个乘子对,其中任何一对($\mu_1,\mu_2$)满足

$$\mu_1\mu_2=\mathrm{e}^{-\gamma t}. \tag{4.3.42}$$

这样,乘子 $\mu$ 或者是实的,或者构成共轭复数对.

二、周期边界条件:$M=0$ 的情形

$M=0$ 时,系统在高速区的基本解是同相(完全同步)解,即解不依赖于格点:

$$\theta_j^*(t)=\theta^*(t),j=1,2,\cdots,N. \tag{4.3.43}$$

我们可以将扰动 $u_j(t)$按 Fourier 级数分解:

$$u_j(t)=\sum_{m=-N/2+1}^{N/2}A_m(t)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}mj/N}, \tag{4.3.44}$$

代入方程(4.3.36)可得

$$\ddot{A}_m+\gamma\dot{A}_m+[w_m^2+\cos\theta^*(t)]A_m=0, \tag{4.3.45}$$

此处

$$w_m=2\sqrt{K}\sin(m\pi/N),m=-N/2+1,\cdots,N/2. \tag{4.3.46}$$

可以看到,通过傅里叶变换,原来耦合的方程化为格点本征模式的独立方程,每一个方程都是 Hill 方程. 因此,微扰的每一个模式都是系统旋转解自身参数驱动的. 参数驱动会在一定强度下发生参数共振,导致某个 $m$ 模式增长,最终引发旋转解的失稳.

对每一个模式,方程(4.3.35)有两个 Floquet 乘子,它满足前面讨论的性质. 因此这两个乘子或者是实的,或者是复共轭的. 下面我们分析各个模式. $m=0$ 的模式较易分析,方程为

$$\ddot{A}_0+\gamma\dot{A}_0+[\cos\theta^*(t)]A_0=0, \tag{4.3.47}$$

方程的一个解即平庸解 $A_0(t)=\dot{\theta}^*(t)$,其乘子为 $\mu_1=1$. 由于 $\mu_1\mu_2=\mathrm{e}^{-\gamma t}$,因此必有另一乘子 $\mu_2=\mathrm{e}^{-\gamma t}<1$,在此方向的扰动总是衰减的. 这样 $m=0$ 的模式是中性稳定的. 当 $m\neq0$ 时,这些模式的稳定性与系统参数有关,必须进一步分

析.为能够解析分析,我们首先设法得到旋转解 $\theta^*(t)$的近似表达式.对同相旋转解,其方程为阻尼单摆运动方程(耦合项消失):

$$\ddot{\theta}^* + \gamma\dot{\theta}^* + \sin\theta^* = F. \tag{4.3.48}$$

为此进行时间尺度变换:$\tau = wt$, $w = F/\gamma$,则

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta^*}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{\gamma}{w}\frac{\mathrm{d}\theta^*}{\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{w^2}\sin\theta^* = \frac{\gamma}{w}. \tag{4.3.49}$$

旋转周期解可用 $w\to\infty$的 $w^{-1}$展开得到:

$$\theta^*(\tau) = \tau + \frac{1}{w^2}\sin\tau + \frac{\gamma}{w^3}\cos\tau + O\left(\frac{1}{w^4}\right), \tag{4.3.50}$$

在实际中只需取第一项即可得到很好的结果:

$$\theta^*(t) = \tau = wt. \tag{4.3.51}$$

将其代入 $A_m(t)$的方程,并采用 $\tau$ 为时间变量,可以得到

$$\frac{\mathrm{d}^2A_m}{\mathrm{d}\tau^2} + \gamma_\tau\frac{\mathrm{d}A_m}{\mathrm{d}\tau} + (\Delta + \varepsilon\cos\tau)A_m = 0, \tag{4.3.52}$$

这里 $\gamma_\tau = \gamma/w$, $\Delta = w_m^2/w^2$, $\varepsilon = w^{-2}$.上述方程即阻尼 Mathieu 方程.Mathieu 方程被广泛用来研究参数共振问题,读者可以参阅有关书籍.我们关心的是 $A_m\equiv0$解的稳定性,它依赖于系统的参数 $\Delta$ 与 $\varepsilon$.图 4-24 给出了 $N=8$, $K=2.56$时的稳定性区域.图中的阴影区为 Mathieu 舌头,在舌头中解是不稳定的,即扰动会指数增长.由于

$$\Delta = w_m^2\varepsilon, \tag{4.3.53}$$

因此上面系统的参数局限于线上.这些直线在图 4-24 中画出来,直线的斜率与模 $m$ 有关.在阴影区中的部分都是不稳定的,其参数宽度可由直线与舌头边界的交点确定.在交点处系统的周期旋转解失稳,会发生亚谐(倍周期)分岔.在直线与舌头左边界相交时的分岔是超临界的,即从同相解分支分岔出的新稳定解是连续变化的.直线与舌头右边界的交点处系统的分岔是亚临界的,分岔变化是不连续的.直线与舌头的交点给出了 FK 系统的共振台阶.

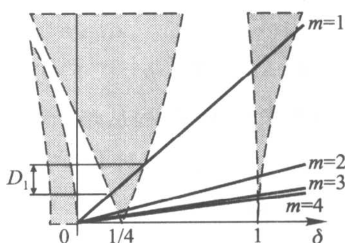



图 4-24 $N=8$, $K=2.56$ 时的稳定性区域

三、周期边界条件:$M>0$ 的情形

$M>0$ 表示在系统内部有 $M$ 个拓扑扭结.在高速运动区,这些扭结被拉伸展开.此时我们仍可用 $M=0$ 情况的微扰及傅里叶展开方法,但由于各种模式间有相互耦合,因此我们无法像 $M=0$ 的情况那样分别考虑各自模式的稳定性.另一方面,由于对 $M\neq0$,第 $m$ 个傅里叶模只与其左右的 $m\pm M$ 模式相耦合,我们又可以采取一定办法得到一些解析结果.

在高速区,周期的旋转解几乎是均匀的转动,空间中有 $M$ 个扭结:

$$\theta_j^*(t) \approx wt + 2\pi Mj/N, \tag{4.3.54}$$

将其代入模 $A_m$ 的方程有

$$\ddot{A}_m + \gamma\dot{A}_m + w_m^2 A_m + \frac{1}{2}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}wt}A_{m-M} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}wt}A_{m+M}] = 0. \tag{4.3.55}$$

微扰的平庸解为 $u_j = \dot{\theta}_j^*$,它对应于 $m=0$ 的模.类似于 $m=0$ 的讨论,我们仍可以 $\varepsilon$ 作近似,且只需近似到 $O(\varepsilon)$ 即可.另外上面方程中的耗散项可以略去,它对下面的计算没有太大影响,这样

$$\ddot{A}_m + w_m^2 A_m + \varepsilon(\mathrm{e}^{\mathrm{i}wt}A_{m-M} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}wt}A_{m+M}) = 0, \tag{4.3.56}$$

这里 $\varepsilon$ 选为 $\varepsilon = 1/2$,以其为展开参量.首先当不考虑 $\varepsilon$ 项的影响时,上式是一系列频率为 $w_m$ 的谐振子方程.因为第 $m$ 个振子只与第 $m \pm M$ 个振子相耦合,所以在 $O(\varepsilon)$ 展开中共振发生于以下频率:

$$w \approx w_l \pm w_{l+M}, \tag{4.3.57}$$

这里 $l$ 是一个固定的整数,我们可以分析这些频率附近的解.我们先讨论右边 $\pm$ 取正号的情况.令

$$w = w_l + w_{l+M} + \varepsilon\sigma, \tag{4.3.58}$$

$\sigma$ 为一失谐参数.下面我们用双时间尺度方法定出 $\sigma$.将 $A_m(t)$ 按 $\varepsilon$ 展开:

$$A_m(t;\varepsilon) = \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p A_{mp}(T_0, T_1), \tag{4.3.59}$$

其中 $T_0 = t, T_1 = \varepsilon T_0$ 分别代表快时间尺度与慢时间尺度.我们把 $T_0, T_1$ 作为独立变量处理.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \partial_0 + \varepsilon\partial_1, \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} = \partial_0^2 + 2\varepsilon\partial_0\partial_1 + \varepsilon^2\partial_1^2, \tag{4.3.60}$$

这里$\partial_p^s = \partial^s/\partial T_p^s$, $p = 0, 1$.将展开及时间微分代入 $A_m$ 方程,按不同 $\varepsilon$ 级数的系数相等来整理(过程从略),其中

$$A_{m0}(T_0, T_1) = B_m(T_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}w_m T_0} + C_m(T_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w_m T_0}, m \neq 0. \tag{4.3.61}$$

为使 $u_j$ 是实变量,上面的系数需要满足

$$B_m = C_{-m}^*, B_{-m}^* = C_m, \tag{4.3.62}$$

在 $O(\varepsilon)$ 量级,可以发现除 $B_{l+m}$ 和 $C_l$ 及其复共轭与时间 $T_1$ 有关外,其余系数 $B_m, C_m$ 均与 $T_1$ 无关.这两个系数为

$$B_{l+m}(T_1) = -2\lambda w_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda+\sigma)T_1}, C_l(T_1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda T_1}, \tag{4.3.63}$$

这里 $\lambda$ 满足方程

$$4w_l w_{l+M}\lambda^2 + 4\sigma w_l w_{l+M}\lambda + 1 = 0, \tag{4.3.64}$$

即

$$\lambda = -\frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{w_l w_{l+M}}}, \tag{4.3.65}$$

当 $\Delta = \sigma^2 - 1/(w_l w_{l+M}) < 0$ 时，$\lambda$ 为复数，则 $C_l$ 系数有一个随时间指数发散的分量. 当 $\Delta > 0$ 时，$\lambda$ 为负的实数，所有系数均为振荡的，此时解是稳定的. 所有失稳转变发生在 $\Delta = 0$，即

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{1}{w_l w_{l+M}}}, \lambda = -\sigma/2, \tag{4.3.66}$$

代入(4.3.64)式，可有

$$w = w_l + w_{l+M} \pm \frac{1}{2\sqrt{w_l w_{l+M}}}, \tag{4.3.67}$$

这也给出了相应的速度共振台阶，因为这里的 $w$ 实际上就是 FK 系统运动的速度.

值得指出的是，对 $M \neq 0$，在上述失稳点所发生的分岔是 Hopf 分岔，而不是 $M = 0$ 时的倍周期分岔. 另外，这里只分析了 $w = w_l + w_{l+M}$ 附近的共振，类似讨论可以分析 $w = w_l - w_{l+M}$ 附近的情况. 结果表明，在这个频率附近不存在失稳情况，故没有共振台阶.

对开放边界条件情况的讨论实际也类似，只是旋转周期解换成

$$\theta_j^*(t) \approx wt + 2\pi fj, \tag{4.3.68}$$

这里 $f$ 为阻挫. 结果分析证实了也有共振发生，但情况要复杂得多，这里不再讨论.

### 4.3.5 Frenkel-Kontorova 系统的拓扑动力学性质

前面我们分别在低速区和高速区讨论了 FK 系统的动力学行为. 迄今为止，我们只是指出：在低速区系统的拓扑结构是运动扭结，扭结辐射声子的结果会引发共振；在高速区扭结被拉伸，系统的基本模参数失稳也会导致共振. 实际上，由于共振的发生和扭结的运动，扭结的拓扑结构也会受到影响. 因此讨论系统的拓扑性质随参量的变化以及在动力学转变过程中拓扑结构的变化是很有意义的[426~435]. 下面我们就对这一问题进行较为细致的讨论.

一、动力学收缩因子与偏离因子

为描述系统的集体拓扑行为，我们可以引入下面的相干函数：

$$R(t)e^{i\varphi(t)} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{i\theta_j(t)}, \tag{4.3.69}$$

这里的 $R(t)$ 是典型的相干因子，它被广泛用来研究耦合振子系统的同步行为，

我们在第二章讨论耦合极限环同步时已经用过. $\varphi(t)$是一个集体相位. 上面是一个复变量,我们可以把上面的复变量分成实部和虚部:

$$\beta_1(t)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\cos[\theta_j(t)], \tag{4.3.70a}$$

$$\beta_2(t)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin[\theta_j(t)]. \tag{4.3.70b}$$

我们可以相应地计算 $\beta_{1,2}(t)$的时间平均:

$$\langle\beta_i(t)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\beta_i(t)\mathrm{d}t, i=1,2, \tag{4.3.71}$$

下面我们对这两个量的物理含义进行讨论. 首先,我们看到 $\beta_1(t)$的形式与我们在前面的平均场理论中引入的收缩因子 $\beta_{MF}$非常类似. $\beta_{MF}$描述的是静态扭结的拓扑性质,因此可以说 $\beta_1(t)$描述了格点系统拓扑结构的动力学特征,我们称其为动力学收缩因子. 通常 $\beta_1\in[0,1]$. $\beta_1$ 越大,表明扭结的局域化程度越高. 对于很小的外力 $F$,我们可以期望

$$\langle\beta_1(t)\rangle\approx\beta_{MF} \tag{4.3.72}$$

当改变系统参数如 $\delta=M/N$ 和$F$ 时,$\langle\beta_1(t)\rangle$也会发生改变. 在图(4-25)中,我们画出 $\delta=1/100$ 和 $34/89(\approx(3-\sqrt{5})/2)$时绝热改变 $F$ 时$\langle\beta_1\rangle$的变化情况. 对 $\delta=1/100$,如图(a). 当 F 不是很大时,$\langle\beta_1\rangle$几乎不变且约等于 $\beta_{MF}$,这与结果(4.3.72)一致;当增加 F 时,可以看到$\langle\beta_1\rangle$减小,表明系统拓扑结构的局域化程度降低,但此时局域扭结解仍然稳定. 在 $F_0\approx0.65$ 时,$\langle\beta_1\rangle$突然下降到一个小的负值. 这个变化对应于运动由低速区向高速区的转变,$\langle\beta_1\rangle$变成小值说明局域扭结被拉伸了. 当 $F$ 很大时,系统运动以 $v=F/\gamma$ 均匀进行. 系统的定态解可近似写成

$$\theta_j(t)=\varphi+2\pi j\delta+(F/\gamma)t, \tag{4.3.73}$$

$\varphi$ 为任意位相. 当 $F\to\infty$时,将上述解代入 $\beta_1(t)$表达式,可得

$$\beta_1(t)=Re\left\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j(t)}\right\}=0. \tag{4.3.74}$$

对有限的 $F$,$\langle\beta_1\rangle<0$,随着 $F$ 增加,$\langle\beta_1(t)\rangle$趋近于零. 我们可以看到$\langle\beta_1\rangle$趋于零的规律与其他参数无关:

$$\langle\beta_1(t)\rangle\propto-F^{-2}. \tag{4.3.75}$$

当我们从大 $F$ 绝热地减小时,由于系统在小阻尼时的多稳性,$\langle\beta_1\rangle$曲线会出现滞后现象,即在 $F_0$ 处$\langle\beta_1\rangle$并不跳回到高速区分支,而是继续为负,一直到 $F\approx$

0.42时才变为正.然后$\langle\beta_1\rangle$经历一系列中间过程才回到最上面的分支.这些结果在图 4-25(b)中也可以看到.所不同的是,图(a)中所有$\langle\beta_1\rangle$值均在$\beta_{MF}$以下,即运动的扭结总是会或多或少被拉伸;图(b)则在低速区很大范围内$\langle\beta_1\rangle$大于$\beta_{MF}$,这说明此时运动的扭结局域化程度比静止时要高.这种情况对于$M>1$的系统较多出现,特别是对于接近非公度的结构.

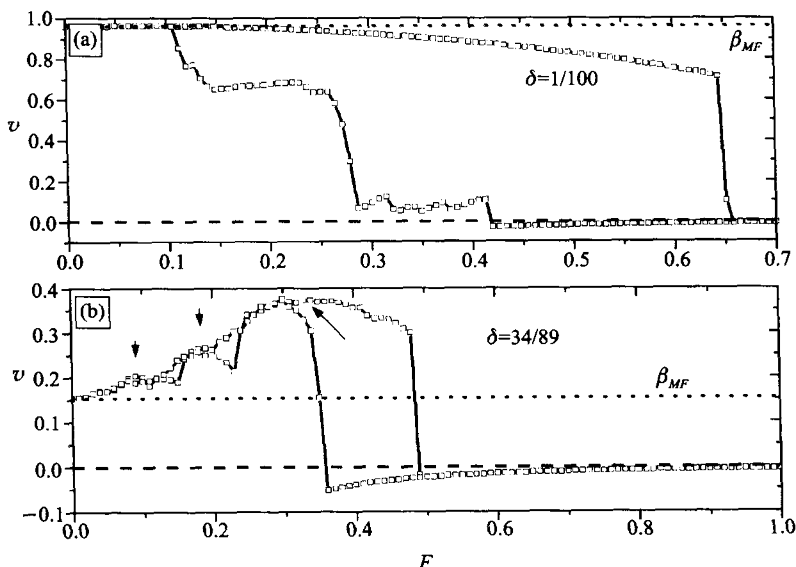



图 4-25 $\delta=1/100$ 和 $34/89(\approx(3-\sqrt{5})/2)$时绝热改变 $F$ 时$\langle\beta_1\rangle$的变化情况

下面我们讨论$\beta_2(t)$.在外力$F$下,系统运动状态主要是定态,因此运动方程中$\dot{\theta}_j(t)$的时间平均影响很小.可认为$\langle\dot{\theta}_j(t)\rangle\approx0$.对运动方程两边取时间和格点平均,可以得到$\gamma v+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\langle\sin\theta_j(t)\rangle=F$,$\langle\cdot\rangle$表示时间平均.根据$\langle\beta_2\rangle$的定义我们有

$$\langle\beta_2(t)\rangle=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\langle\sin\theta_j(t)\rangle=F-\gamma v. \tag{4.3.76}$$

对于大的$F$,系统运动遵循欧姆定律,即$v=F/\gamma$,此时$\langle\beta_2\rangle=0$.因此可以看出,$\langle\beta_2(t)\rangle$实际上描述了系统速度-外力关系偏离线性欧姆定律的程度,我们称为**偏离因子**.在图 4-26 中我们给出$\langle\beta_2\rangle$与$F$在$\delta=1/100$和$34/89$时的关系,$F$仍然是绝热增加或减小.图中虚线是理论结果(4.3.76),圆圈是模拟结果,可以

看到二者符合得很好. 在低速区的几乎所有地方和高速区的一些地方$\langle\beta_2\rangle\neq0$，说明系统的$v(F)$关系是非线性的. 这些偏离主要来自于$v(F)$的共振效应. 在高速区，我们可以看到虽然$\langle\beta_2\rangle=0$但$\langle\beta_1\rangle$可以不为零，说明系统的$v(F)$曲线虽然遵循线性关系，但系统的拓扑结构仍然会“感受到”周期势场的存在.

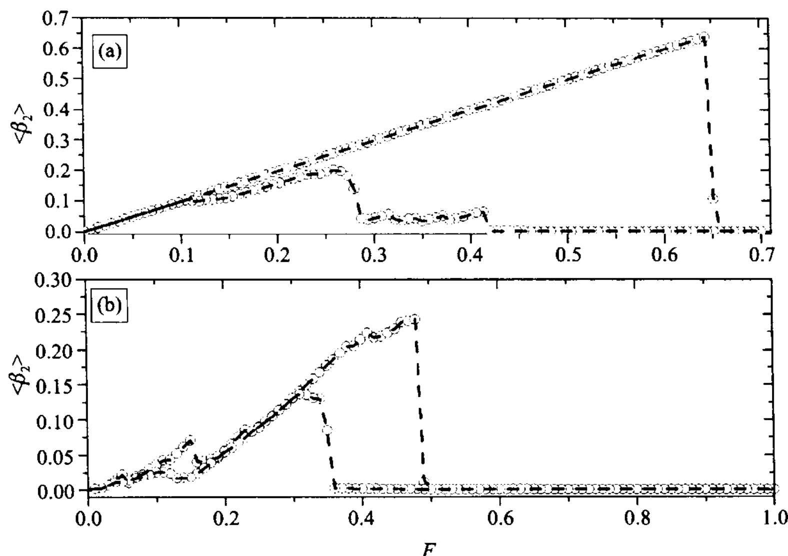



图4-26　$\langle\beta_2\rangle$与$F$在$\delta=1/100$和$34/89$时的关系

二、反扭结的产生及影响

上面我们主要讨论了$\beta_1$和$\beta_2$的平均性质. 实际上，$\beta_1$和$\beta_2$的时间性质也是值得探讨的. 在图4-27中，我们画出了$\delta=1/100$，$\gamma=0.1$及$F=0.1$，0.2，0.4和0.5时$\beta_{1,2}(t)$的时间演化. 初始条件是随机给定的. 当$F$很小时，$\beta_{1,2}(t)$会趋于一个正值，且有很小的振荡(在图中看不出来). 当$F=0.2$时，我们看到$\beta_{1,2}(t)$除趋于正值外，还出现大幅的脉冲式振荡，这种振荡带有阵发性质，每次发生都是接近几个脉冲. 另外，$\langle\beta_1\rangle$也随之下降. 当$F$增加时，这种振荡越来越频繁，反映出系统拓扑结构在运动中的强烈变化及向新拓扑态的分岔转变. 为了揭示这种振荡，我们可以看一下系统的时空演化行为，如图4-28所示，参数完全对应于图4-27. 时空图的横轴表示时间，纵轴表示格点，图中的黑色部分表示$\cos[\theta_j(t)]$较小的值(即势阱区域)，图(a)的黑色线给出了FK系统在小$F$时的扭结运动. 由于模拟中用到$N=100$，$M=1$，即只有一个拓扑扭结，因此我们只看到一条直线(周期边界条件). 可以看到直线右侧的许多黑点，这些黑

点表示运动扭结在运动中辐射出来的线性波(声子). 当 $F$ 增大时,在图(b)中我们看到三条沿扭结方向运动的直线和两条与扭结运动方向相反的直线. 图4-29画出了在某一时刻 $t_0$ 系统的空间位形结构. 可以看到与扭结结构不同,此时结构又多出一个峰和一个谷. 实际上,这个结构是由三个扭结和两个反扭结(antikink)构成的,或者说此时的结构由一个扭结和两个扭结-反扭结对(kink-antikink pair,KAP)构成的. 一般情况下扭结 $N_k$ 与反扭结的数目 $N_a$(或 KAP 数目 $N_{\mathrm{KAP}}$)有以下关系:

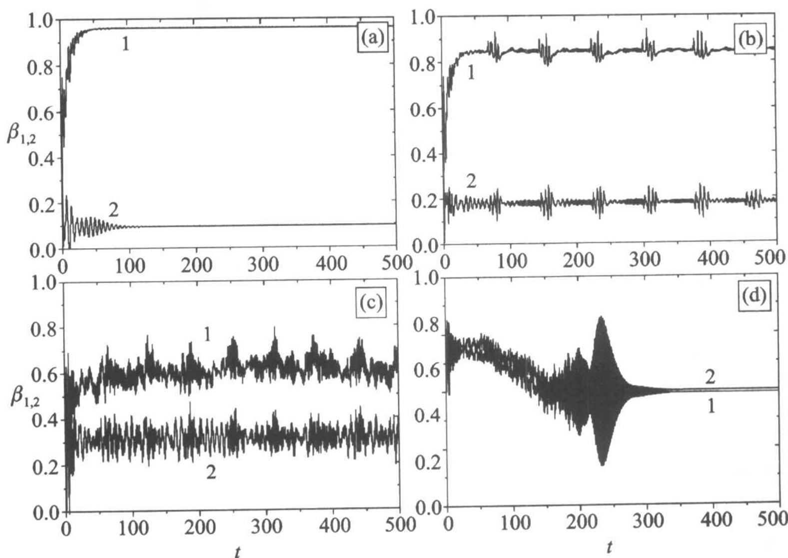



图 4-27 $\delta=1/100$, $\gamma=0.1$ 及 $F=0.1, 0.2, 0.4$ 和 $0.5$ 时 $\beta_{1,2}(t)$ 的时间演化

$$N_k - N_a = M,\ N_{\mathrm{KAP}} = 2N_a, \tag{4.3.77}$$

即它们受到系统总拓扑扭结数目 $M$ 的限制. 可以看到,扭结与反扭结相向运动,然后相遇而发生碰撞,在这些碰撞发生时,系统的拓扑结构都会受到影响,这就导致了 $\beta_{1,2}(t)$ 的脉冲振荡行为. 在扭结与反扭结各自运动时,可以看到 $\beta_{1,2}(t)$ 是小幅振荡. KAP 的出现削弱了原来单个扭结的压缩程度,因而可以看到 $\langle\beta_1\rangle$ 下降. 当 $F$ 增大时,更多的 KAP 产生出来,扭结与反扭结的碰撞更加频繁,如图 4-28(c)所示,这些碰撞使得 $\beta_{1,2}$ 的振荡更加厉害(如图 4-27 的(c)所示).

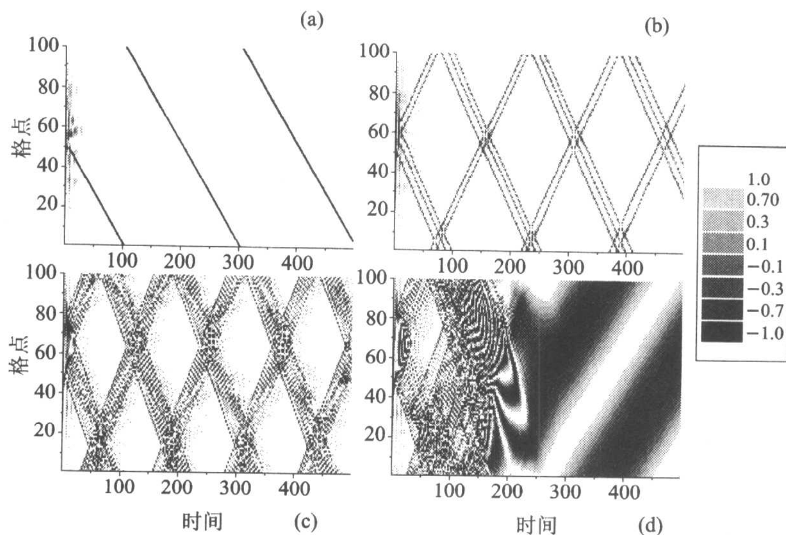



图 4－28 对应于图 4－27 的系统时空演化行为

三、从低速区向高速区的跃变

一个很有意思的问题是由低速区向高速区的转变. 在低速区，扭结是被压缩的，而在高速区，压缩的扭结被拉伸，这其中经历了什么变化？在图 4－27(d) 中，我们给出了当 $F=0.5$ 时系统向高速区的转变情况，可以看到 $\beta_1(t)$ 很快地衰减至零附近，而在零附近又经历一段时间的大幅振荡，振荡幅度甚至超过 $t=0$ 的值. 由图 4－28(d) 中的时空演化可以看到，这一大幅振荡的区域对应于扭结束和反扭结束发生大规模碰撞的时候. 为了证实这一机制，在图 4－29 中我们给出 $\beta_1(t)$ 在 $F=0.7, N=100, M=1$ 时的演化及其时空动力学. 我们的初始条件选在无外力时的基态，在 $t=0$ 时突然加上大的 $F$ 力，系统经历典型的淬火过程. $t=0$ 时，基态结构中只有一个拓扑扭结 ($M=1$)，加上外力后，静止的扭结发生移动，由于 $F$ 很大，因此 $\beta_1(t)$ 经历了一个大幅的振荡，最小一直到负值. 此时系统为响应外力，运动速度也会增大，当扭结以很大速度运动时，自身会失去不稳定性，称为快扭结不稳定性. 失稳的结果在 $t\approx10$ 时在单扭结基础上“分岔”出一个扭结－反扭结对，如图 4－29(b) 所示. 当 $t\approx22,28$ 时，我们还会看到新的扭结—反扭结对“分岔”出来，每次“分岔”都导致系统整体结构的拉伸，扭结束与反扭结束以相反方向运动，并且发生碰撞，快扭结不稳定性使得碰撞产生出更多的扭结－反扭结对，对应于 $\beta_1(t)$ 我们可以看到对应于“分岔”的振荡，并且 $\beta_1(t)$ 一边振荡一边快速下降. 在 $t\approx60$ 时，两个很大的扭结束与反扭结束发生碰撞，$\beta_1(t)$ 整体振荡也到零的附近. 上述的“分岔”并非参数意义上的分岔，而是由

于系统的快扭结不稳定性导致的系统状态的不断失稳，实际也体现了系统内部存在的分岔行为. 事实上，这一不稳定性构成了系统的低速状态雪崩失稳而过渡到高速状态. Braun 等人曾用非线性 FK 系统在热涨落环境下的雪崩失稳来讨论系统的滞后效应[428]，此处不再详细叙述.

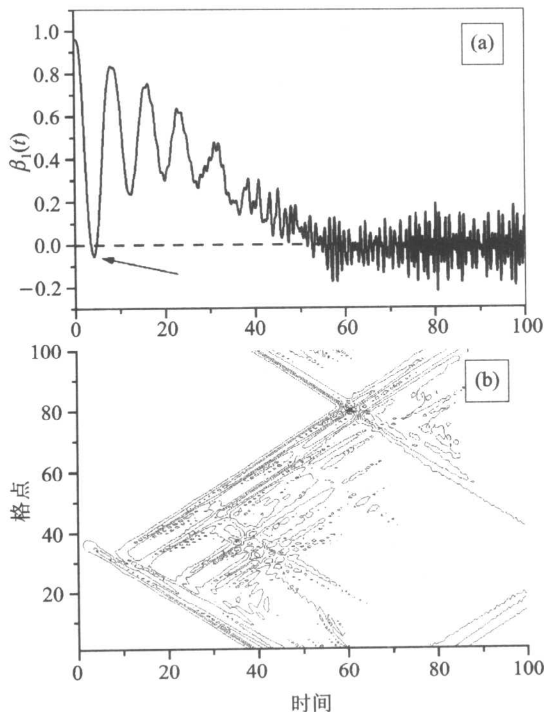



图 4－29 $\beta_1(t)$在 $F=0.7, N=100, M=1$ 时的演化及其时空动力学

如果我们仔细观察系统的拓扑结构在上述转变中的变化，可以发现当我们从基态出发时，扭结运动是从其“尾部”开始的，快速的运动使得其他粒子来不及反应(未加外力它们均处于静止状态)，因而扭结的快速运动导致结构局部的严重不平衡(堵塞)，我们可以用一个形象的词——“交通阻塞”来形容. 我们可以用下面的量：

$$\Delta(t)=\max\{\theta_j(t), j=1,2,\cdots,N\}-\min\{\theta_j(t), j=1,2,\cdots,N\} \tag{4.3.78}$$

来量度系统偏离局域扭结的程度. $\Delta$ 越大，反映出系统的“交通阻塞”越严重. 图 4－30 给出$\Delta(t)$在 $F=0.7, N=100, M=1$ 时的演化，可以看到当 $t<60$ 时

$\Delta(t)$持续增加，反映出在 $t=60$ 以前一些粒子运动而其他粒子运动被阻塞，到 $t=60$时阻塞最严重. $t>60$ 时，$\Delta$ 很快下降到零，说明系统由于大量的扭结与反扭结碰撞后而产生雪崩现象，系统严重非平衡的"交通阻塞"结构被逐渐抹平，所有粒子逐渐以相同速度运动，扭结解也被完全拉伸.

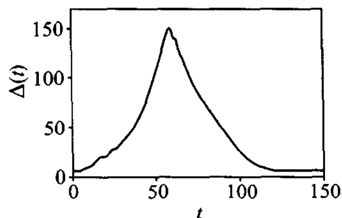



图 4-30 $\Delta(t)$在 $F=0.7, N=100, M=1$ 时的演化

### 4.3.6 非凸耦合 Frenkel-Kontorova 系统的时空动力学

一、正弦耦合的 FK 系统

在前面我们讨论的系统都是标准 FK 系统. 由于简谐相互作用，系统的动力学虽然仍是很复杂，但相对来说是比较简单的. 一般地，只要振子间相互作用势是凸函数，前面所观察到的对标准系统的现象同样也可以看到. 对于一般的相互作用势 $V(x)$，小阻尼及直流力驱动下系统的运动方程为

$$\ddot{\theta}_j + \gamma\dot{\theta}_j + \sin\theta_j = K[V'(\theta_{j+1} - \theta_j - a) - V'(\theta_j - \theta_{j-1} - a)] + F, \tag{4.3.79}$$

$V(x)$在一般情况下是非线性的(实际是指相应的力 $-\mathrm{d}V(x)/\mathrm{d}x$). 人们对 Lennard-Jones、Toda、Morse 等非线性相互作用势的 FK 系统进行过讨论. 这些作用势更多地反映了粒子之间的较为真实的相互作用. 除了这些种类的相互作用外，还有一类与自旋、相位有关的相互作用. 例如，对于 DNA 链中的螺旋和碱基对的相互耦合为复杂的转子类型的作用. 在反铁磁液晶中，偶极子与层面之间的耦合是正弦形式的. 这相当多的作用势都是非凸的. 下面我们讨论比较简单的正弦相互作用的情形：

$$V(x) = 1 - \cos x. \tag{4.3.80}$$

我们之所以选这种相互作用势有以下原因：(1) 这种相互作用是非凸相互作用中比较简单的，而且 $V(x)$是周期函数，它描述自由度变量为相位的系统较为典型；(2) 这种作用势曾在耦合转子系统、DNA 的碱基对旋转、磁性 Heisenberg 模型、一维手征性 XY 模型、细小颗粒体系以及约瑟夫森结阶梯等不同物理体系中被广泛讨论过[436~439]. 特别地，耦合约瑟夫森结阶梯系统的哈密顿就是用正弦耦合的 FK 系统描述的：

$$H = -2J_x \sum_i [\cos(\theta_i - \theta_{i+1} - 2\pi f) + h\cos(2\theta_i)], \qquad (4.3.81)$$

其中 $J_x$ 为水平约瑟夫森耦合强度，$f$ 为阻挫，$h = J_y/2J_x$ 为垂直约瑟夫森耦合．这也是 1D 手征性 XY 模型的哈密顿形式．因此，这种作用势真实地描述了许多系统的情况，因此结果具有一定的代表性；(3) 在连续化极限下，正弦耦合与简谐耦合会回到相同的 Sine-Gordon 方程，因而 Sine-Gordon 方程位形空间分立化不仅有线性分立化，而且也可以非线性分立化，正弦耦合就是其中一种．下面我们就对系统(4.3.79)的时空动力学进行讨论．将 $V(x)$代入方程，我们写出具体的运动方程：

$$\ddot{\theta}_j + \gamma\dot{\theta}_j + \sin\theta_j = K[\sin(\theta_{j+1} - \theta_j - a) - \sin(\theta_j - \theta_{j-1} - a)] + F, \qquad (4.3.82)$$

我们在下面的讨论中仍采用周期边界条件：$\theta_{j+N}(t) = \theta_j(t) + 2\pi M$．因此 $a = 2\pi M/N$．计算中采用 $\gamma = 0.1$．在 $K$ 较大时，上面的方程可连续化为 Sine-Gordon 方程．因此系统的运动也分为低速区和高速区．但由于非凸耦合，系统(4.3.82)在动力学上与普通 FK 系统就有许多差别．

二、转子呼吸子

我们先看在高速区的情况．图 4－31 画出了 $N=8, M=1, K=1.0$ 时各个振子速度的情况．与标准 FK 系统不同的是，系统的振子分成两个集团，一些振子以不为零的相同的速度转动，而其余的则被钉扎，在速度为零附近小幅振荡．这是系统非凸耦合和单个系统双稳性的结果．对于单个振子来说，其相空间中有两种吸引子，一种是局域解，另一种则是运动解，这导致了系统的双稳性．当这些振子通过正弦耦合结合在一起时，由于耦合的非凸性，系统不像简谐耦合那样形成整体的运动，而是仍可保持部分钉扎、部分运动的形式．我们称这种解为**转子呼吸解**(breather)[440,441]．转子呼吸子的概念是由 Takeno 与 Peyrard 讨论保守的

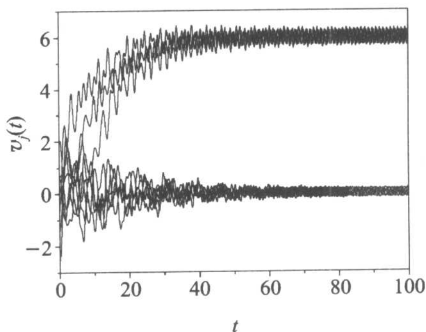



图 4－31 $N=8, M=1, K=1.0$ 时各个振子高速区运动情况

分立 Sine-Gordon 系统时提出的[436].呼吸子同扭结、孤立波等一样是非线波的一种,它是指在空间局域的(不传播的)时间振荡的一种解,已被证明只发生于非线性格点系统.这种波的动力学行为在近年来得到了密切的关注,它在格点系统的能量输运和热传导等方面都起着重要的作用[442~446].这方面的详细论述可见 Flach 的综述及其中的文献[445].上述的转子呼吸解是这样一种解:部分格点上的振子是转子解(即相位单调变化),其他格点的振子是局部振荡解(相位没有 $2\pi$ 变化),它与其他呼吸解一样是一种局域激发模式.

在图 4-32 中,我们计算了系统的平均运动速度 $v$ 与外力 $F$ 的关系,$N=8$,$K=1.0$,$M=1,2,3$.在高速区,我们可以看到 $v(F)$ 曲线的多支分岔现象,每一支都可表为

$$v_i(t) = v_i^0 + \delta v_i \sin(\omega t + \varphi_i), \tag{4.3.83}$$

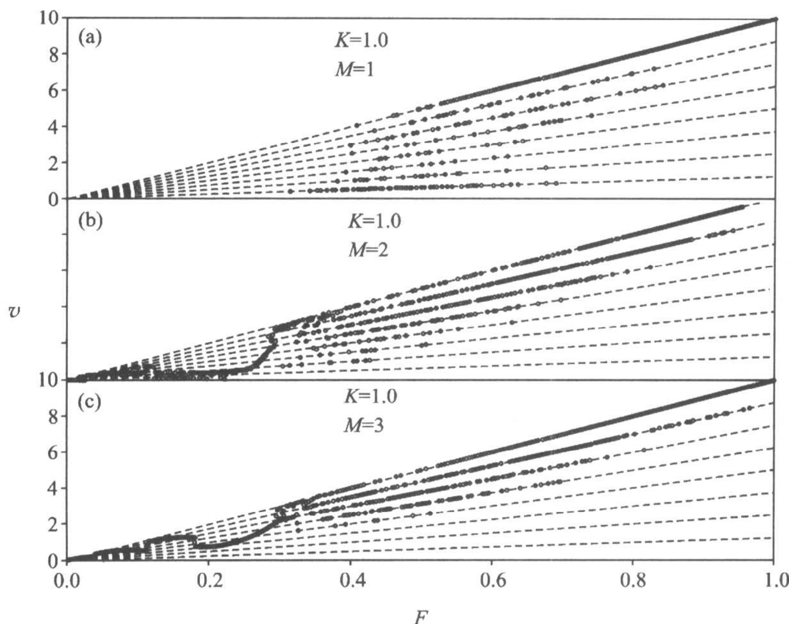



图 4-32 平均运动速度 $v$ 与外力 $F$ 的关系

$v_i^0$ 描述了第 $i$ 个振子的转动频率,第二项对应于 $v_i^0$ 附近的振荡.转动频率写为

$$v_i^0 = \begin{cases} 0, & \text{当振子钉扎时}, \\ F/\gamma, & \text{当振子转动时}, \end{cases} \tag{4.3.84}$$

因此系统运动的平均速度为

$$v = nF/N\gamma, \quad n = 0,1,2,\cdots,N. \tag{4.3.85}$$

这就是图中所观察到的多分支现象.可以看到理论结果与数值结果符合得非常

好.多分支现象说明系统的呼吸解与初始条件有密切的关系,从不同初始条件出发,系统运动可处于不同分支上.当 $M=2$ 和 3 时(如图(b)和(c)),可以看到 $n$ 较小的分支消失,这是系统多拓扑扭结的结果.另外可以看到不同分支出现的阈值是不同的.$v$ 越大,所需的 $F$ 阀值越大.

转子呼吸解对系统弱耦合是稳定的.当 $K$ 增大时,呼吸解会逐渐失稳,过渡到与凸耦合类似的单一分支 $v=F/\gamma$ 的情形,即所有振子都会变成转动解.图 4－33 给出了 $\gamma=0.1, a/2\pi=M/N=1/100, F=0.7$ 时改变耦合强度 $K$ 系统的时空演化图.图中横轴为时间,纵轴为格点.对每一格点,当其相位 $\theta_j(t)$ 穿过 $2\pi$ 的整数倍时就在图中标出.系统的初态取 $F=0$ 时的静态,而在 $j=10,20,\cdots,100$ 处对这些格点加一个大的激发.在图(a)中,$K=0.5$,我们可以很清楚地看到初始被激发的十个振子是转动解,而其他区域是白的,说明其他振子没有转动,它们只在各自的平衡位置附近小幅振动.当耦合强度 $K$ 增大时,呼吸子解会失稳.图(b)给出 $K=1.805$ 时的时空图,可以看到初始被激发振子引起的转动通过耦合传到附近振子,使附近振子也开始转动,形成呼吸子集团.当 $K$ 继续增加时,由图(c)的 $K=1.808\ 25$ 和图(d)的 $K=1.81$ 可以看到,呼吸子集团不断变大,形成更大的集团,最后所有振子都成为转动的,呼吸子解完全消失.这个由呼吸子解到呼吸子集团化最后到整体转动解的分岔揭示出耦合强度与耦合函数非凸性之间的竞争.

呼吸子解在二维耦合的 FK 系统也可以观察到[441].例如,我们可以研究下面的系统:

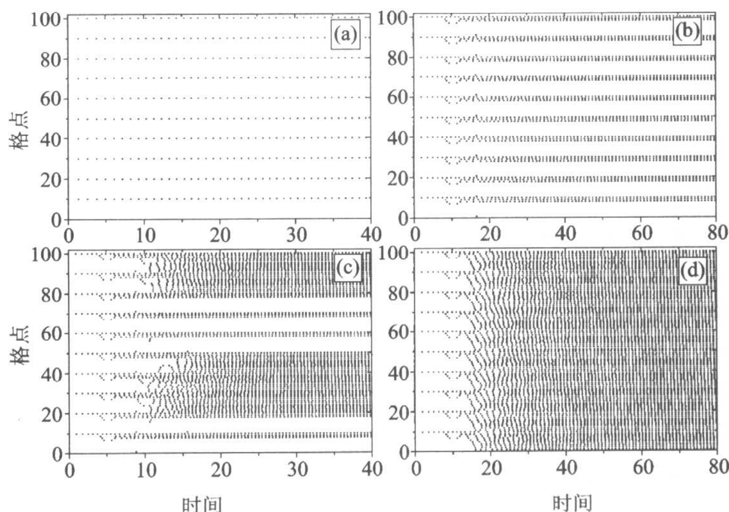



图 4－33 改变耦合强度系统的时空演化图

$$\ddot{\theta}_{i,j}+\gamma\dot{\theta}_{i,j}+\sin\theta_{i,j}=K_x[\sin(\theta_{i+1,j}-\theta_{i,j}-a_x)-\sin(\theta_{i,j}-\theta_{i-1,j}-a_x)]$$
$$+K[\sin(\theta_{i,j+1}-\theta_{i,j}-a_y)-\sin(\theta_{i,j}-\theta_{i,j-1}-a_y)]+F. \tag{4.3.86}$$

我们可以定义第$(i,j)$个振子的平均运动速度

$$v_{i,j}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\dot{\theta}_{i,j}(t)\mathrm{d}t. \tag{4.3.87}$$

我们可以通过 $v_{i,j}$ 的空间分布来确定系统的呼吸子解.在图 4－34 中,我们给出了当 $\gamma=0.1$, $N=100\times100$, $a_x=a_y=0.01\times2\pi$, $K_x=K_y=0.5$, $F=0.7$ 时 $v_{i,j}$ 的分布情况,初始条件随机给定,当 $v_{i,j}<0.2F/\gamma$ 时我们将格点$(i,j)$用点标记,当 $v_{i,j}>0.2F/\gamma$ 时我们用叉标记.可以看到在 $100\times100$ 的格点中有一个很大的集团是转动的,而其他区域则是局域振动的,$v_{i,j}$ 可认为约等于零,这从数值上证明了转子呼吸解在二维系统中的存在.

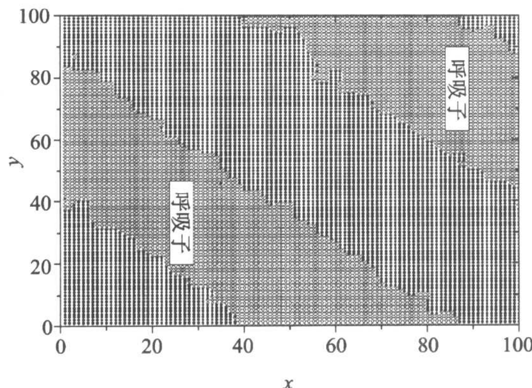



图 4－34　二维呼吸子:$v_{i,j}$ 的分布情况

三、非凸耦合对低速区共振的破坏

对简谐耦合,FK 系统在低速区由于运动扭结与辐射出来的声子耦合而产生共振现象,这种共振现象是以外界注入的多余能量用来转化为声子振荡能量作代价的,因而速度可以随 $F$ 增大仍保持不变.当振子间耦合为非凸形式时,共振可能会被破坏.如图 4－32 中 $M=1$ 的情况,我们在低速区完全没有观察到共振台阶,整个系统在低速区都处于钉扎态.最有意思的情况是当 $\delta=M/N$接近无理数时的动力学.在图 4－35 中,我们画出了 $N=8$, $M=3$, $K=1.0$, $\gamma=0.1$ 时 FK 系统的运动速度在低速区与外力 $F$ 的关系.为了有更清楚的对比,我们同时把标准 FK 系统相同参数的 $v(F)$曲线画在上面.对两种情况,我们都可以看到速度的共振台阶.对于小 $F$ 的情形,正弦耦合的共振台阶都存在且与标准 FK 的台阶基本一致.当 $F$ 逐渐增大时,可以发现有的共振台阶右端反而下降或

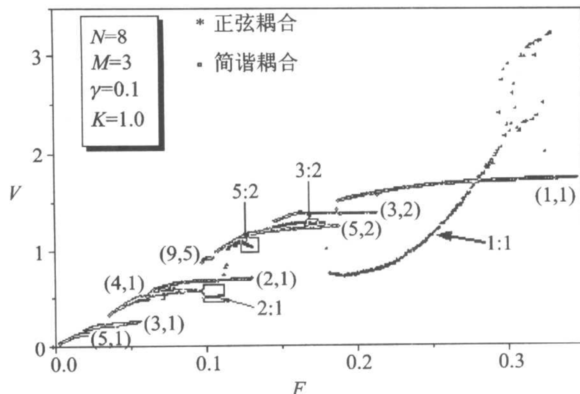



图 4-35 非凸耦合与标准 FK 系统的运动速度在低速区与外力 $F$ 的关系对照

跳到一个低的分支上去.这是典型的非凸效应,主要是由于过大的声子振荡波使台阶提前失稳造成的,这种失稳使得共振台阶被破坏. $F$ 越大,越靠近低速区与高速区边界 $v_c = 2\pi\delta\sqrt{K}$ 的速度台阶被破坏情况越严重,从图中我们可以看到,1:1 的共振被完全破坏,在简谐情况增加 $F$ 刚好出现 1:1 台阶的地方,正弦耦合的 $v(F)$ 曲线突然下跳到一个新的分支,这个分支从一个很低的 $v$ 值随 $F$ 增加而上升,1:1 的共振已经完全不存在.这意味着一个新相的出现.为了搞清楚在这个分支上的动力学,在图 4-36 中我们画出了在 5:2 共振失稳与 1:1 失稳处系统各振子 $\theta_j(t)$ 的演化情况.中间的图是一个非常好的行波结构,以便对照.图(a)对应于 5:2 失稳的情况,可以看到行波结构被破坏,各个振子都出现了无规则运动.图(c)1:1 失稳后的时空情况更为混乱,可以看到系统运动无论在时间还是在空间上都是无规则的.由于整个 1:1 区域系统的运动都是时空混沌的,我们称此区域为**无规相**(disordered phase)[440].这种 1:1 共振被完全破坏的无轨相是非公度正弦耦合 FK 系统的固有相.我们可以用 Farey 序列逼近黄金分割 $\delta = 8/13, 13/21, 21/33, \cdots \to (\sqrt{5}-1)/2$ 来验证,都发现同样的区域.图 4-37 画出了 $N = 54/89$ 时系统在 $F = 0.28$ 的时空演化图.为方便观察,我们用

$$\Delta_j = |\theta_{j+1}(t) - \theta_j(t)| (\bmod 2\pi) \tag{4.3.88}$$

来表示相邻振子之间的距离.对于标准 FK 系统而言,当系统初始从基态出发, $\Delta_j$ 一般是在 $a$ 附近振荡的量.我们这里将初始条件也设在 $F=0$ 时的状态,在 $t \geqslant 0$ 时加上 $F$,观察系统演化.可以看到在 $t < 15$ 以前 $\Delta_j$ 的演化是较为规则的,但 $\Delta_j$ 随时间是增加的,在 $t > 15$ 时, $\Delta_j$ 的值超出了 $2\pi$,即此时振子的顺序可以被打破,因而系统进入了时空混沌态.

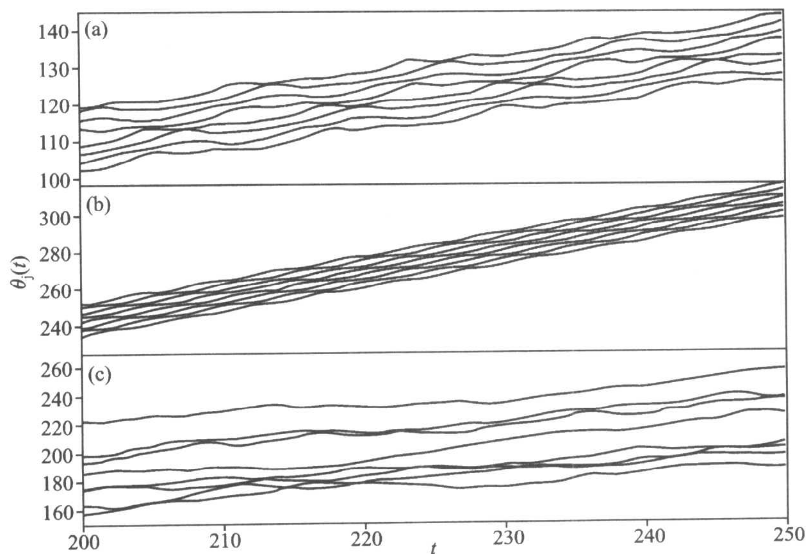



图 4-36 5:2 共振失稳与 1:1 失稳处系统各振子 $\theta_j(t)$ 的演化情况

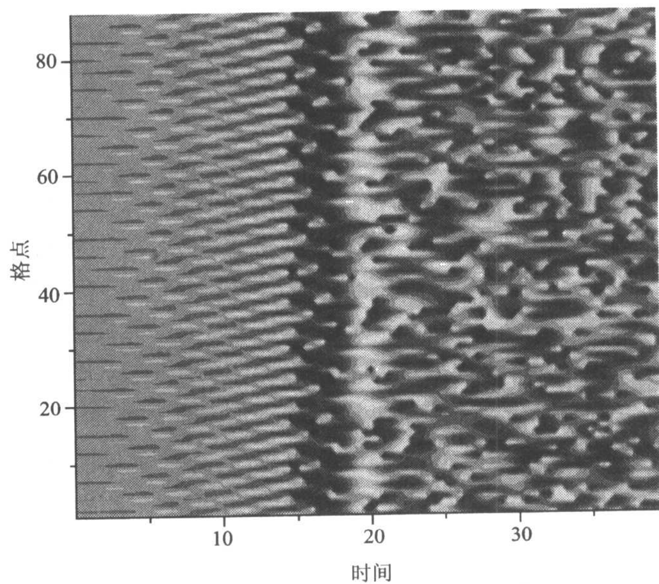



图 4-37 $N=54/89$ 时系统在 $F=0.28$ 的时空演化图

对其他形式的非凸耦合 FK 系统动力学行为的研究也是非常重要的，这方

面的专门研究迄今为止还不多,值得进一步深入讨论.

## 4.4 Frenkel-Kontorova 系统的输运性质研究

粒子在周期势场中的布朗运动问题有着深厚的物理背景.很多物理体系的周期性结构决定了粒子在其中的输运问题是一个有着共同本质机制的课题.这样的物理系统可以是简单的力学阻尼摆,电学中的锁相环,也可以是较为复杂的超离子导体、高温氧化物超导体内的涡漩动力学、约瑟夫森结的相位动力学、电荷密度波等人们一直在关注的问题[64].对于一维的体系,这些系统运动的 Langevin 方程一般可写作

$$\ddot{x}_j + \gamma\dot{x}_j + d\sin\left(\frac{2\pi x_j}{b}\right) = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial V(x_j, x_i)}{\partial x_j} + F_j(t) + \xi_j(t), \quad (4.4.1)$$

其中 $x_j$ 代表第 $j$ 个粒子的坐标,$\dot{x}_j$ 为相应的速度,$b$ 为周期势的周期,$d$ 为势垒高度.$V(x_j, x_i)$反映了粒子 $j$ 与 $i$ 之间的相互作用,$F_j(t)$为作用于第 $j$ 个粒子上的决定性外力,$\xi_j(t)$则为随机力.在这里的讨论中,我们讨论 $F_j(t)=F$ 及 $\xi_j(t)$为时空无关联白噪声的情形:

$$\langle \xi_j(t)\rangle = 0, \langle \xi_j(t)\xi_j(t)'\rangle = 2\gamma k_B T\delta_{i,j}\delta(t-t'), \quad (4.4.2)$$

$k_B$ 为 Boltzmann 常数,$T$ 为热浴的温度.当粒子间相互作用较弱或环境温度较高时,很多情况下我们只考虑单粒子在周期势场中的布朗运动问题就够了.我们在第一章中已对这个问题做过讨论.解决问题的关键是求出粒子的空间位置与速度的分布函数 $w(x, v=\dot{x}, t)$,其对应的 Fokker-Planck 方程为

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -v\frac{\partial w}{\partial x} + \gamma\frac{\partial}{\partial v}\left[vw + \frac{1}{\gamma}U'(x)w + k_B T\frac{\partial w}{\partial v}\right], \quad (4.4.3)$$

其中 $U'(x) = \mathrm{d}U(x)/\mathrm{d}x = \mathrm{d}\sin(2\pi x/b) - F$.这个方程求解已经是十分困难(见第一章),因而即使对单个粒子在周期势场布朗运动问题的封闭解析求解也仍然是十分困难的,我们只在大阻尼和小阻尼极限下可以得到形式仍十分复杂的解析解.对有相互作用系统输运问题的讨论则基本上局限于数值讨论与物理机制分析相结合的手段.当粒子间相互作用不能忽略时,相互作用会给系统带来新的时空尺度与竞争机制,因而会导致一些新的现象[447~453].考虑到空间波矢竞争,描述这种竞争的最简单的模型就是 FK 系统,此时相互作用为最近邻的简谐形式:$V(x_j, x_{j+1}) = \frac{1}{2}K(x_j - x_{j-1} - a)^2$.前面对其基态及时空动力学的讨论对本节的内容是很有帮助的.下面的讨论中,我们固定 $b=2\pi, d=1$.这样方程(4.4.1)就可写成:

$$\dot{x}_j = v_j,$$

$$\dot{v}_j = -\gamma v_j - d\sin x_j + K(x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}) + F + \xi_j(t), \quad (4.4.4)$$

相应分布 $w(\{x_j\},\{v_j\},t)$ 的 Fokker-Planck 方程为

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N}\left[-v_j\frac{\partial w}{\partial x_j} + \frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_j} + \gamma\frac{\partial}{\partial v_j}\left(v_j w + k_B T\frac{\partial w}{\partial v_j}\right)\right], \quad (4.4.5)$$

这里 $U(\{x_j\})$ 为 FK 系统的总势能：

$$U(\{x_j\}) = \sum_{j=1}^{N}\left[d(1-\cos x_j) + \frac{1}{2}K(x_{j+1} - x_j - a)^2\right]. \quad (4.4.6)$$

在过阻尼情况下，我们可用 Smoluchowski 方程来代替上面的 Fokker-Planck 方程：

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\gamma}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial U}{\partial x_j}p + k_B T\frac{\partial p}{\partial x_j}\right), \quad (4.4.7)$$

这里 $p(\{x_j\},t) = \int w(\{x_j\},\{v_j\},t)\prod_{j=1}^{N}\mathrm{d}v_j$ 为约化分布函数. 有一些工作集中于对上面的方程求解，得到一些近似结果，但由于系统本身很复杂，这些近似结果并不直观体现物理现象，我们这里不详细讨论.

对直流外力驱动 FK 系统的布朗运动问题，我们主要关心两个区域，一个是 $F\to 0$ 时的线性响应区，此区中主要研究系统的扩散性质；另一个是当改变 $F$ 时系统在外力下的迁移性质，此区域是非线性响应的. 下面我们分别对此讨论[452].

### 4.4.1　线性响应：扩散的加强效应

系统的扩散性质由扩散系数 $D$ 描述. 对有相互作用的粒子系统，我们可用下面的集体扩散系数来描述，它由平均平方位移的线性部分给出：

$$D = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2Nt}\sum_{i,j}\langle[x_i(t) - x_j(0)]^2\rangle, \quad (4.4.8)$$

上述的平均是系综平均，即 $\langle A\rangle = \int Aw\prod_{i=1}^{N}\mathrm{d}v_i\mathrm{d}x_i$. 注意平方位移不仅包含自平方位移 $(i=j)$，而且包含交叉平方位移 $(i\neq j)$. 在实际计算中，扩散系数可用线性响应下的迁移率给出：

$$D(T,k,\delta) = k_B T\lim_{F\to 0}\langle v\rangle/F, \quad (4.4.9)$$

$\langle v\rangle$ 是体系的平均运动速度. 在 $F\to 0$ 时，$D$ 与环境涨落温度 $T$，粒子间耦合强度 $K$ 和阻挫 $\delta = a/b$ 有密切的关系. 特别地，$D$ 与 $K$ 和 $\delta$ 的关系是耦合系统独有的，它体现出系统扩散的独有合作性质.

在图 4-38(a)中，我们计算了 $\delta$ 为黄金分割数 $\delta_G = (\sqrt{5}-1)/2$ 时不同温度下扩散系数 $D$ 与 $K$ 的关系. 我们看到的第一个现象是扩散系数与耦合强度之间

的关系是非单调的.对于弱耦合强度 $K$,扩散过程被压制,$D$ 随 $K$ 的增加而减小.当 $K>K_c$ 时,$D$ 开始随 $K$ 的增加而上升.在 $K_{c1}$附近,扩散系数 $D$ 与 $K$ 之间满足下面的关系:

$$D = D_0(T)\,|K - K_{c1}|^{\alpha(T)}, \tag{4.4.10}$$

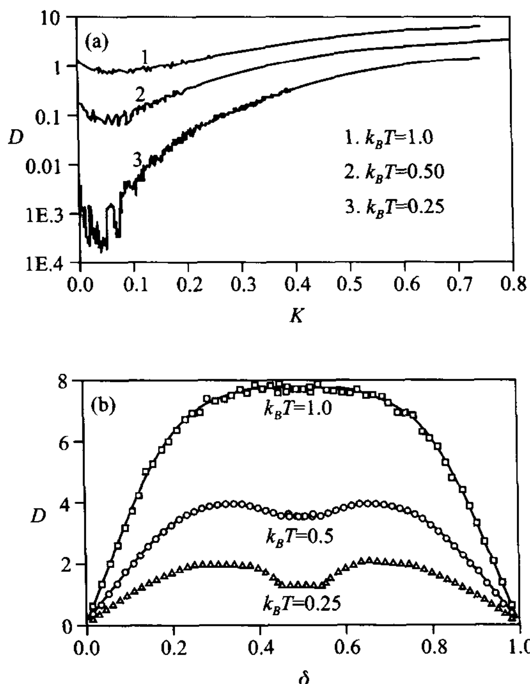



图 4-38 (a) $\delta=\delta_G$ 时不同温度下 $D$ 与 $K$ 的关系;(b) 扩散系数与阻挫 $\delta$ 之间的关系

这里标度指数 $\alpha(T)$随温度升高而降低.在第二个阈值 $K_{c2}$,耦合系统的扩散系数 $D$ 首次超过单个粒子的扩散系数值$D_s$(即 $K=0$ 时的 $D$ 值);当 $K>K_c$时,$D>D_s$,我们称这种现象为**阵列加强的扩散过程**.对于中等大小的 $K$,$D$ 与 $K$ 的关系遵循下面的幂律:

$$D \propto K^{\beta(T)}, \tag{4.4.11}$$

$\beta(T)$也是随 $T$ 增加而降低标度指数,$\beta(T)\sim T^{-1/2}$.当 $K$ 很大时,扩散系数会逐渐趋于一个饱和值,这个值比单个粒子扩散系数值 $D_s$ 要大得多.上面的现象揭示出非常有意思的结果,即我们只有克服一个临界耦合强度才能得到一个更强的扩散过程.$K_{c1}$和 $K_{c2}$随温度的增加而增加,即对于高温,我们必须有更大的耦合才能克服系统扩散上无组织状态.阵列加强扩散过程在一些实际应用中是

有价值的.在很多情况下(例如表面的生长过程)我们希望体系有较快的扩散速率.

上面的行为可以作直观的理解.它实际上是系统有序与无序的竞争.有序来自于粒子之间的耦合作用,它倾向于把粒子组织起来而形成集体行为.无序是由外界的热涨落造成的,它倾向于破坏系统的有序运动.对较弱的耦合强度,热噪声占主导地位,粒子无法组织形成协作扩散,相反这个弱的相互作用使得原本自由的粒子扩散受到约束.因此我们看到系统的扩散随耦合的加入反而减小,耦合成为体系高摩擦的另外耗散来源.当耦合强度增大到一定程度,系统可以通过相互作用而把无序的涨落变成有效的合作扩散能量,我们可以看到系统的扩散速率上升并超过单粒子(无耦合)的情况,形成阵列加强扩散的现象.

上面讨论的是非公度的情况.我们可以讨论系统的扩散系数与阻挫 $\delta$ 之间的关系.这一结果在图 4-38(b)中给出,这里 $K=0.1$,其他参数不变,温度取三种不同的值.可以看到 $D$ 与 $\delta$ 之间的关系是很复杂的. $T$ 较高时,公度效应不太突出.曲线是关于 $\delta=1/2$ 对称的,因此我们只需在 $\delta\in[0,1/2]$ 区间讨论.当 $\delta$ 很小时, $D$ 与 $\delta$ 之间是线性关系:

$$D=D_0T\delta, \tag{4.4.12}$$

斜率与温度 $T$ 成正比.这反映出 $\delta$ 很小时扩散会因耦合的引入而受到抑制.抑制的原因在于此时的 PN 垒很高,粒子与周期势的作用占主要地位,我们就需要更大的激发能克服 PN 垒.当环境温度 $T$ 较低时,扩散的公度效应就变得很明显.对于图中 $k_BT=0.25$ 的曲线,可以看到 $D$ 在 $\delta\approx1/3$ 和 $2/3$ 时有最大值,这两个值非常靠近黄金分割 $\delta_G=(\sqrt{5}-1)/2$ 和 $1-\delta_G$.

一般情况下扩散系统与温度关系是比较复杂的.当不考虑粒子之间相互作用时,在小阻尼和高温下,

$$D=\frac{\pi k_BT}{2\gamma}e^{-2d/k_BT}, \tag{4.4.13}$$

而扩散速率随温度升高而增加.在大阻尼和低温下,扩散主要是由于热涨落引起的阱间跃迁导致的,因此

$$D=\frac{k_BT}{\gamma}\left[I_0\left(\frac{d}{k_BT}\right)\right]^{-2}\to\frac{2\pi d}{\gamma}e^{-2d/k_BT}, \tag{4.4.14}$$

这里 $I_0(x)$是修正 Bessel 函数.在上面两个结果中,我们可以看到右边有同样的 Boltzmann 因子(Arrhenius 因子)$e^{-2d/k_BT}$,只是前面因子不同,它来自于热涨落的阱间跃迁效应.在一般情况下,扩散系数有复杂的形式[67]:

$$D=\frac{(2\pi)^2k_BT}{\gamma[\Omega(d,T,0)\Delta(d,T,0)-\Lambda(\gamma,d,T,0)]}, \tag{4.4.15}$$

这个形式是第一章的结果,它可由 $D=k_BT\lim_{F\to0}\langle v\rangle/F$ 直接得出,式中的各个

系数为：

$$\Omega(d,T,F)=\int_0^{2\pi}\exp\{[f(x)-Fx]/k_BT\}\mathrm{d}x,\qquad(4.4.16a)$$

$$\Delta(d,T,F)=\int_0^{2\pi}\exp\{[-f(x)+Fx]/k_BT\}\mathrm{d}x,\qquad(4.4.16b)$$

$$\Lambda(d,T,F)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\exp\{[-f(x)+Fx]/k_BT\}\int_0^x q(y)\exp\{[f(y)-Fy]/k_BT\}\mathrm{d}y,\qquad(4.4.16c)$$

这里 $f(x)=-d\cos x$，$q(x)$称为核函数，它可由下面的运算得到：

$$q(x)=\frac{1}{c}\gamma Hc,\qquad(4.4.17)$$

此处 $c$ 为一常数，$H$ 为一个算子连分：

$$H=I-\frac{1}{\gamma^2}K^+\frac{1}{I-\frac{1}{2\gamma^2}K^+\cdots K^-}K^-,\qquad(4.4.18)$$

这里 $I$ 是单位算子，$K^\pm$ 为

$$K^+=\sqrt{k_BT}\partial/\partial x,\ K^-=K^++\frac{1}{\sqrt{k_BT}}[\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x-F],\qquad(4.4.19)$$

上面结果对单粒子在任何温度和阻尼下都适用.

当考虑粒子间耦合时，耦合会导致系统的行波运动. 此时系统的扩散过程与扭结运动有关，扭结可以视为准粒子，它可用有效质量、静态能量和 PN 垒 $E_{\mathrm{PN}}$ 来描述[451]. 在低温下系统的扩散系数为

$$D=D_0\mathrm{e}^{-E_{\mathrm{PN}}/k_BT},\qquad(4.4.20)$$

$D_0$ 为与 $E_{\mathrm{PN}}$有关的因子，通常在小阻尼时 $D_0\propto E_{\mathrm{PN}}^{1/2}$，在大阻尼时 $D_0\propto E_{\mathrm{PN}}$. 在强耦合时

$$D\approx Ck_BT\left[1-\frac{1}{8}(E_{\mathrm{PN}}/k_BT)^2\right].\qquad(4.4.21)$$

在式(4.4.20)中我们看到类似单粒子的 Arrhenius 因子，只是能量项对单粒子而言是周期势垒，而对于 FK 系统是 PN 垒.

### 4.4.2 非线性响应：迁移过程的抑制效应

当 FK 系统所受外力增大时，系统的输运由漂移过程主导. 此时我们可以用系统的迁移率来描述输运过程：

$$\mu=\langle v\rangle/F.\qquad(4.4.22)$$

在图 4－39(a)和(b)中，我们计算了 $\delta=3/8$ 和 1/8 时不同温度下 $\mu$ 与外力 $F$ 的关系. 为方便对比，我们也画出了单粒子的 $\mu(F)$曲线($k_BT=0.5$). 我们看到的

第一个现象是当 $F$ 较小时，耦合系统的迁移率远远大于单粒子的迁移率. 当 $F$ 增加时，单粒子的 $\mu$ 随 $F$ 单调增加，而耦合系统的 $\mu$ 除随 $F$ 有增加部分外，在很大的区域内都是随 $F$ 增加而减小的. 温度的改变对系统的迁移率在 $F$ 的很大范围内几乎没有影响. 这个效应在图 4－40 中给出，$\delta=3/8$，我们画出了 $F=0.1$ 和 0.05 时 $\mu$ 随 $k_BT$ 的变化曲线. 可以看到 $\mu$ 随 $k_BT$ 的改变几乎不变，甚至对 $F=0.1$ 的情况还会降低. 我们称 $\mu$ 随 $F$ 减小及随 $k_BT$ 几乎不变的现象为迁移过程的抑制效应，这种效应显然是一种集体现象.

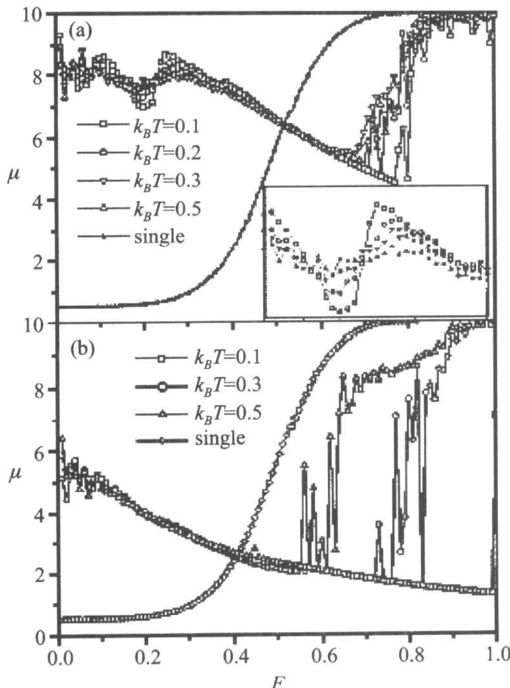



图 4－39 $\delta=3/8$ 和 1/8 时不同温度下 $\mu$ 与外力 $F$ 的关系

事实上，有了前面无噪声下 FK 小阻尼系统在 $F$ 作用下的动力学分析，这种抑制过程是不难理解的. 在低速运动区，运动的扭结与它所辐射出来的线性波发生耦合而产生锁相，导致系统运动的锁定. 它集中表现在系统整体运动速度随 $F$ 的变化出现平台[390,423]. 由于系统耦合的有序对噪声涨落有一定的抵抗力，因此在有限温度下，速度的主要平台仍然存在. 在平台上，系统的迁移速率 $\mu=v(m_1,m_2)/F\propto F^{-1}$，因此随 $F$ 的增加 $\mu$ 反而会减小，造成迁移过程的抑制. 此时热涨落的能量主要用来放大线性波(声子)的振幅. 在台阶的右边，热涨落使锁

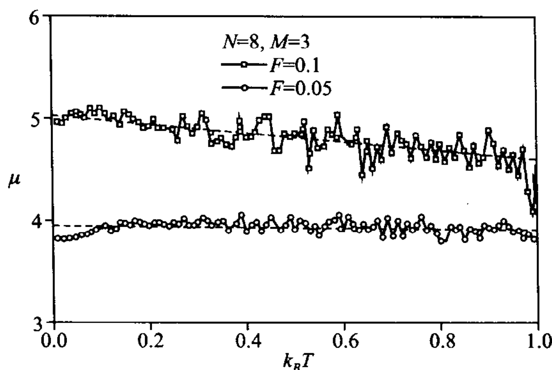



图 4－40 $\mu$ 随 $k_BT$ 的变化曲线

相失稳而造成共振台阶的振幅很小，热涨落不易使锁相破坏.

## 4.5 Frenkel-Kontorova 系统与热传导研究

### 4.5.1 研究意义和背景

统计物理学的最大成功之处就在于阐述了有大量自由度的系统的宏观热力学现象及其转变.通过合理的引进统计假设及其系统的作用规律，统计平均避免了在系统微观层次上的纠缠，从而理解了热力学的一般规律.如今统计物理的思想方法和结果已被用于大量的不同领域.只要系统有大的自由度或者随机因素，统计物理就有发挥其作用的空间.

另一方面，从统计物理学诞生伊始它就与系统的微观动力学规律藕断丝连.尽管人们想尽各种办法解释统计方法的合理性，但是关于统计与动力学的关系以及统计的适用性的争论几百年来至今就一直没停止过.从最早的 Bolzmann 的 H 定理，Maxwell 妖，到后来 Fermi、Pasta 和 Ulam 的 64 振子实验以至非线性系统混沌动力学的讨论，都反映出统计物理的基本问题重要性[3,7,37,39].我们在第一章中已讨论过这方面的一些问题，这里不再重叙.我们只想指出，虽然关于热力学系统平衡态的微观动力学与统计之间的关系已基本清楚，但我们对非平衡态的理解，无论从宏观层面还是微观层面上都是远远不够的.对于平衡态统计，我们有研究统计和动力学关系的遍历性理论，而对于非平衡统计，我们至今尚未建立一套关于其动力学基础的理论.这其中因素众多，而系统的非线性与复杂性是阻碍基础理论建立的重要原因之一.

本节我们着重于热传导问题微观动力学的研究.应该说对这一问题的研究

尚无最后的定论，但近年来对格点和格气系统的热传导微观机制的分析是很有启发性的. 利用 Frenkel-Kontorova 研究热传导问题只是这众多分析中的一个模型，但它扮演着承上启下的作用，使人们的研究思路有所转变. 因此，在下面的讨论中，FK 系统热传导问题只是一个小的部分，我们将尽可能地讨论涉及近年来人们利用不同系统研究的成果[454~471].

从热传导的研究历程来看，迄今为止共经历了三个阶段. 第一个阶段是 1984 年以前的研究[454,455]. 这个阶段热传导的研究主要是唯像理论，它是非平衡热力学系统输运理论与线性响应理论的一部分，人们得到在线性响应下热流与温度梯度关系的傅里叶定律：

$$J = -k(T)\nabla T, \tag{4.5.1}$$

这里 $J$ 为热流，$k(T)$为热传导系数，它通常与温度 $T$ 有关. 在这一阶段，虽然也有关于宏观热传导和微观动力学之间的讨论，但没有本质的突破. 研究者的主要兴趣在于各种物理材料和体系的热传导性质，其中以实验为主. 20 世纪下半叶非线性系统动力学和混沌行为研究的兴起，促使人们用动力学的眼光重新审视平衡态和非平衡态热力学系统的宏观性质. 热传导作为非平衡热力学中非常重要的输运行为也受到密切关注. 人们至今还十分关心的问题是；系统正常的热传导的微观机制是什么？不同的反常热传导与系统内部动力学有什么关系？由于热力学系统的微观自由度很大，且作用是非线性的，解析的方法基本不奏效，计算机技术的飞快发展也是这些问题得以研究的客观原因. 1984 年，Casati 等人模拟了 ding-a-ling 模型（下面有介绍）的热传导性质，并提出混沌性是能量扩散输运的本质条件[456]. 这项工作现在看来有特殊的意义，尽管在当时并未引起太大的关注. 它开创了热传导行为微观机制研究的先河，自此这方面研究进入第二个阶段. 在此期间，Prosen 与 Robnik 于 1992 年用 ding-dong 模型[458]对 Casati 等人的研究结果给予支持. 1997 年，Lepri 系人对 Casati 等人的机制提出质疑，他们用一维的 FPU 模型模拟热传导[459]. 研究发现，尽管 FPU 模型本身是混沌的（有正的李雅普诺夫指数），但系统的热传导是反常的. 由此他们认为，混沌性并不足以保证正常热传导. 1998 年，香港浸会大学非线性研究中心（CNS-HKBU）的研究小组利用 Frenkel-Kontorova 模型进行热传导过程的数值模拟，发现只要外势场存在，系统就会有正常热传导[460]. 这项研究没有涉及系统是否混沌，而是从另一个角度——声子散射与模式激发来进行热传导机制的解释. 此后，人们在多种不同系统中进行研究，热传导基本问题的研究成为热点. 可以说，从 1997 和 1998 年至今为热传导研究的第三阶段. 在此阶段中，一些有关热传导的机制从不同角度被提出来，这些机制分别可以在一定范围内做出解释，但至今尚未有统一的共识. 尽管如此，这方面的研究促进了大自由度系统统计性质、模式激发性质、非线性波等相关问题的研究.

人们研究的模型系统各种各样.从类型看大致有两类:一类为类气体的模型,我们称为格气模型,如 Lorenz 气体、Ehrenfest 气体、硬球系统等;另一类为类固体的模型,我们称为格点模型,如 ding-a-ling 模型、ding-dong 模型、FK 模型、FPU 模型、耦合转子模型等等.研究系统的维数涉及最多的是一维的情况,二维系统的也有,但不多,且主要是准一维的体系.三维的较为实际系统的研究迄今为止尚未见到.

我们下面的讨论主要是给出人们从不同角度研究的结果.FK 系统热传导的研究只是其中的一种,但由于其特殊作用,我们下面会单独讨论.

### 4.5.2 动力学不稳定性(混沌)对热传导的影响

Casati 等人提出了如下的模型[456]:系统由 $N$ 个粒子组成,运动局限在一维,这 $N$ 个粒子质量相同,其中编号为偶数的粒子为简谐振子,奇数的为自由粒子.每个振子都在各自的平衡位置附近振动,因此自由粒子只能在相邻两个振子之间来回运动,并会与它们发生弹性碰撞.由于这种形态像一个铃锤在两个铃铛之间,Casati 等人称其为 ding-a-ling 模型.将此系统置于高低温两个热源之间,就构成了研究的系统,如图 4－41 所示.

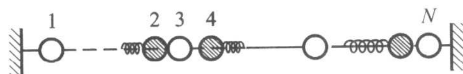



图 4－41 ding-a-ling 模型

Ding-a-ling 系统的哈密顿可写成:

$$H=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(p_k^2+\omega_k^2q_k^2)+V_H, \tag{4.5.2}$$

这里当 $k$ 为偶数时 $\omega_k=\omega$, $k$ 为奇数时, $\omega_k=0$,粒子质量均设为单位质量. $p_k$, $q_k$ 为第 $k$ 个粒子的动量与位置, $V_H$ 代表碰撞时的硬核相互作用.当总能量固定时,系统的动力学随 $\omega$ 的改变而改变. $\omega\to 0$ 时,系统变成一维等质量硬球气体; $\omega$ 逐渐增加时,系统可变成在整个相空间的混沌(K 系统).图 4－42 给出了 $N=2$ 时在 $\omega=0.2$ 和 3.0 的截面图($q'_1=(q_2-q_1+1)/\sqrt{2}=0$ 且 $p'_1=(p_2-p_1)/\sqrt{2}>0$ 时的截面).可以看到 $\omega$ 较大时系统的全局混沌.当 $N$ 增大时,全局混沌所需的 $\omega$ 阈值速减小.

现在考虑在系统左右两边加上热源.为方便,选择 $N$ 为奇数,且左右与热源接触的为自由粒子.热源的温度分别为 $T_L$ 和 $T_R$.

这里值得提一下的是,对热源的实际模拟可以有不同的方法.目前主要有三种方法:(1)热源可以用温度为 $T$ 的 Maxwell 气体给出[38,39],其速度分布为

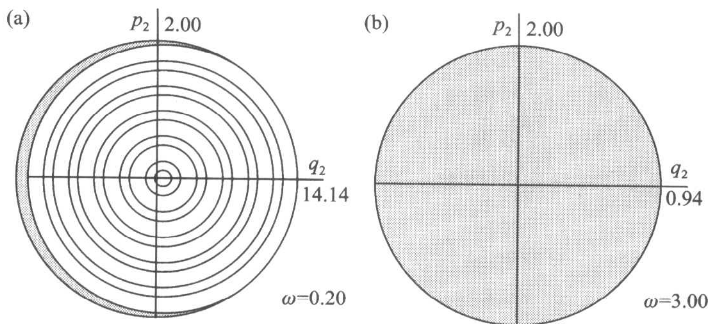



图 4－42　$N=2$ 时 $\omega=0.2$ 和 3.0 的截面图

$$f(v)=\frac{|v|}{T}\mathrm{e}^{-v^2/2T}, \tag{4.5.3}$$

当粒子碰到热源时，它被热源吸收，然后又发射回系统，其速度由符合 $f(v)$ 分布的随机值给出；(2) Nose-Hoover 热源[472]，它由热源方程给出，我们下面会涉及到；(3) 热噪声热源[64~66]，即我们可以将热源用噪声 $\xi_{L,R}(t)$ 来描述，它满足一定的关联性质，通常可用白噪声来描述：

$$\langle\xi_{L,R}(t)\rangle=0,\langle\xi_{L,R}(t)\xi_{L,R}(t')\rangle=2\gamma T_{L,R}\delta(t-t'),\langle\xi_L(t)\xi_R(t')\rangle=0. \tag{4.5.4}$$

相应地，与热源接触的粒子的动力学可用 Langevin 方程来描述. 上面三种热源模拟方法可根据具体问题需要灵活选取. 需要注意的是，第(2)种 Nose-Hoover 热源由于是动力学描述，因此有时结果不一定可靠，使用时需要小心.

对于 ding-a-ling 模型，这里用的是第(1)种热源. 粒子与热源作用前后能量改变，交换的能量设为 $\Delta E$，则热流为

$$\langle J(t)\rangle=\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n}\Delta E_i, \tag{4.5.5}$$

$\Delta E_i$ 表示第 $i$ 次与热源作用时的能量交换，$n=n(t)$ 为到时间 $t$ 时与热库作用次数. 当 $\langle J(t)\rangle_L=\langle J(t)\rangle_R$ 时说明系统达到定态. 定义粒子的温度为

$$T_k=\frac{1}{2}\langle p_k^2\rangle, \tag{4.5.6}$$

$\langle\cdot\rangle$ 为长时间平均. 由 $T_k$ 的分布可以确定温度梯度 $\nabla T$，然后根据傅里叶定律 $\langle J\rangle=-K\nabla T$ 我们可以定出系统的热传导系数 $K$. 图 4－43 给出了 $K$ 与 $N$ 的关系，可以看到对固定的 $\omega$，$N$ 增加时，$K$ 很快趋于一个定值. $K$ 也可以用 Green-Kubo 公式算出. Green-Kubo 公式给出了输运系数与自关联函数之间的关系. 对现在的一维 $N$ 粒子系统，在温度 $T$ 时

$$K = \frac{1}{NT^2}\int_0^t \langle J(t')J(t_0)\rangle \mathrm{d}t', \tag{4.5.7}$$

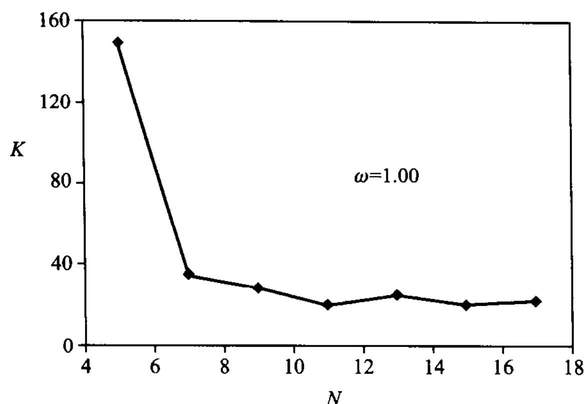



图 4－43 热传导系数 $K$ 与粒子数 $N$ 的关系

$J$ 为平均热流，$\langle\cdot\rangle$表示平衡态平均．Casati 等人验证了这种方法算出的热传导系数 $K$ 在 $\omega$ 比较大时与前面模拟的结果完全相符，而 $\omega$ 小时（非 $K$ 系统）则不相符，从而得出结论：**混沌性是保证系统产生扩散性能量输运和正常热传导的本质条件**．

上述论断由 Prosen 和 Robnik 在 1992 年用另一模型得到证实[458]．他们的模型也是一维格点，每个格点上都是局部振荡的简谐振子，振子之间有硬核碰撞作用以交换能量．他们把这个系统称为 ding-dong 模型．在一定能量范围内系统是混沌系统（硬混沌）．他们通过不同方法计算了系统的热传导，发现系统热传导是正常的．这一结果支持了 Casati 等人的论断．

1997 年，Lepri 等人讨论了一维 Fermi-Pasta-Ulam 系统的热传导问题[459]．系统的哈密顿为

$$H = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2}p_i^2 + V(q_i - q_{i-1})\right], \tag{4.5.8}$$

其中

$$V(q_i - q_{i-1}) = \frac{1}{2}(q_i - q_{i-1})^2 + \frac{\beta}{4}(q_i - q_{i-1})^4. \tag{4.5.9}$$

$\beta$ 描述了粒子之间耦合的非简谐程度，将系统置于两个热源之间，设热源的温度为 $T_{L,R}$，我们用 Nose-Hoover 热源来模拟，则系统方程为：

$$\ddot{q}_1 = -\xi_L\dot{q}_1 + V'(q_2 - q_1) - V'(q_1 - q_0), \dot{\xi}_L = \frac{\dot{q}_1^2}{T_L} - 1, \tag{4.5.10a}$$

$$\dot{q}_i = V'(q_{i+1} - q_i) - V'(q_i - q_{i-1}), 2 < i < N, \tag{4.5.10b}$$

$$\dot{q}_N = -\xi_R \dot{q}_N + V'(q_{N+1} - q_N) - V'(q_N - q_{N-1}), \dot{\xi}_R = \frac{\dot{q}_N^2}{T_R} - 1, \tag{4.5.10c}$$

这里采用固定边界条件：$q_0 = q_{N+1} = 0$. 格点的温度仍定义为 $T_i = \langle p_i^2 \rangle$. 对系统的模拟表明，当加上热源后，系统最后会达到非平衡定态，它满足局域平衡条件，但与热源接触的两端则会呈现奇异性. 图4-44(a)给出了 $T_L = 152, T_R = 24, N = 128, 194, 256, \beta = 0.1$ 时的温度曲线，可以看到曲线是非线性的. 这个非线性不是由于热传导与温度有关，而是与系统热传导的反常性质有关. 这可以从考察系统的热流看出来. 热流 $J(x,t)$ 满足连续性方程

$$\dot{\mathcal{H}}(x,t) + \mathrm{div} J(x,t) = 0, \tag{4.5.11}$$

这里 $\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \delta(x - x_i)\left(\frac{p_i^2}{2} + V(q_i - q_{i-1})\right), x_i = ia + q_i$. 将此方程作空间傅里叶变换并按波数的级数展开，最后可得到通过第 $i$ 个格点的热流为

$$J_i(t) = a p_i f_{i+1}, \tag{4.5.12}$$

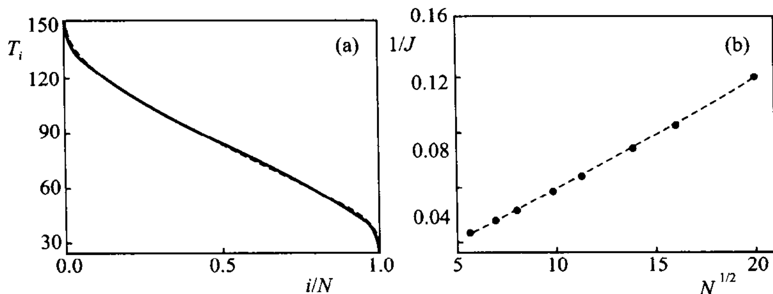



图4-44　(a) 温度曲线；(b) 热流 $J$ 与振子数 $N$ 的关系

这里 $f_{i+1} = -V'(q_{i+1} - q_i), J = \langle J_i(t) \rangle$；可以验证它与格点 $i$ 无关，因此系统处于非平衡定态. 图4-44(b)给出了热流 $J$ 与振子数 $N$ 的关系，可以看出 $J \propto N^{-\alpha}, \alpha = 0.55 \pm 0.05$. 由于 $\mathrm{d}T/\mathrm{d}x \sim N^{-1}$，因此由傅里叶定律算出的热传导系数 $k = |J/(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)| \propto N^{1-\alpha}$，即 $k$ 随 $N$ 的增加而发散. 这说明FPU系统不满足傅里叶定律. 系统要满足傅里叶定律，热流 $J$ 应该随着 $N$ 的增加以 $J \propto N^{-1}$ 的速度趋于0(或者 $JN$ = 常数). 这样，Lepri等人得出结论：混沌性并不是保证系统有正常热传导(满足Fourier定律)的充分条件. 这一结论直接对Casati等人的结果提出了质疑.

1999年，Alonso等人(Casati为合作者之一)对此进行了反驳[461]. 他们研究了二维的台球系统——Lorenz气体通道. 它是由一系列半圆形散射体构成的，自

由粒子在通道内必须与散射体碰撞才可以沿水平方向运动(如图 4-45(a)所示).将系统置于两个热源之间,Alonso 等人通过数值模拟验证了系统有正常的热传导.他们指出:正常的热传导来自于系统正常的能量扩散,而只有系统是完全双曲(即 Anosov 系统,系统在整个相空间都是双曲型的不稳定点,意味着全局混沌)时才会有正常的能量扩散行为,因而才会有正常的热传导行为.实际上,Casati 在 1984 年的工作中关于"混沌"的含义已经强调了**足够混沌**"以保证系统是扩散型的能量输运".Lepri 等人所讨论的 FPU 模型显然并不满足这个条件.FPU 在能量面上不是全局混沌的,而是存在许多 KAM 环面区,尽管他们随参数改变会缩小,但仍残存.这些残存的规则区会造成能量输运时的"粘连效应",即系统运动混沌轨道会被吸引在规则区边缘逗留较长时间,这直接导致能量输运的反常性.这种反常扩散使得系统的热传导行为也出现反常.由此可以看出,Lepri 等人的怀疑本身是站不住脚的,他们明显没有完全理解 Casati 等人的论断.

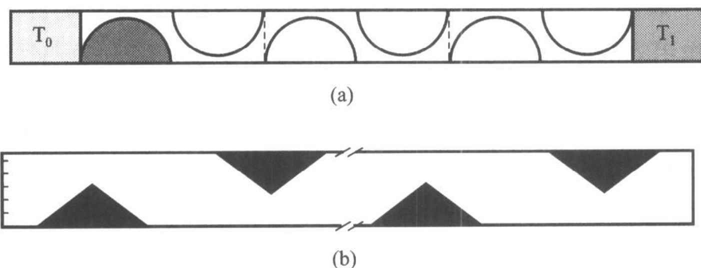



图 4-45 (a) Lorenz 气体通道;(b) Ehrenfest 气体通道

最近,李保文等人研究了 Ehrenfest 气体通道内的热传导问题[471].这个模型与 Lorenz 气体通道类似,但不同的是散射体是三角形,即所有的散射面都是平的,如图 4-45(b)所示,这种台球体系 KS 熵在数学上证明等于零,因此系统没有混沌性.他们的结果表明,当所有散射体相同且规则分布时,系统有反常的热传导,而当散射体高度或位置随机无序分布时,系统有正常的热传导.因此他们认为混沌与正常热传导之间没有直接联系.

实际上,以笔者的观点来看,系统是否出现了正常的热传导恰好是来自于他们模型中的无序性.在第一章中,我们讲到了遍历性理论中关于动力系统的随机性顺序时提到了 Bernoulli 移位变换,它是完全随机的,随机性比 Anosov 系统要高得多[39].回到 Ehrenfest 模型,这里散射体高度或位置的随机性分布恰好使得粒子在其中的反射是完全随机的,相当于 Bernoulli 变换,在每一步都是不确定的.因此这个系统的随机性比 Lorenz 气体通道系统中的还要强,当然能量就可

以以一种正常的方式扩散,从而导致正常的热传导.

从以上的讨论来看,混沌性是保证系统有正常的傅里叶热传导的根本条件.这个观点实际上仍然是有其合理性,仍是对热传导机制研究迄今为止最有说服力的观点之一.实际上,以笔者的观点来看,用扩散型的"随机性"(diffusive stochasticity)来代替"混沌性"作为正常热传导的动力学条件也许更为恰当.

### 4.5.3　一维FK链中的热传导问题:声子-格点相互作用

一维FK链热传导问题的研究在1985年就由Gillan和Holloway用数值方法讨论过[457],但由于不是关于机制性的研究而没有引起关注.1998年,胡斑比、李保文和赵鸿又讨论了这个模型[460].为方便,我们写出系统的哈密顿:

$$H=\sum_i\left[\frac{1}{2}p_i^2+\frac{1}{2}(x_i-x_{i-1}-a)^2-\frac{K}{2\pi}\cos(2\pi x_i)\right],\qquad(4.5.13)$$

这里粒子的质量约化为1,$a$为弹簧自由长度,$K$衡量周期势的高度,周期势的周期为1.下面研究FK系统的旋转数固定为$a=0.3$.如果考虑一般的情况,我们把相互作用势部分写为$\sum_i V(x_{i-1},x_i)$,周期势部分写为$\sum_i V(x_i)$.在模拟中仍采用Nose-Hoover热源,靠近热源粒子的运动方程为

$$\ddot{x}_1=-\xi_L\dot{x}_1+f_1-f_2,\dot{\xi}_L=\frac{\dot{x}_1^2}{T_L}-1,\qquad(4.5.14a)$$

而中间粒子的运动方程为

$$\ddot{x}_N=-\xi_R\dot{x}_N+f_N-f_{N+1},\dot{\xi}_R=\frac{\dot{x}_N^2}{T_R}-1,\qquad(4.5.14b)$$

$$\ddot{x}_i=f_i-f_{i+1},1<i<N.\qquad(4.5.14c)$$

这里$f_i=-V'(x_{i-1}-x_i)-U'(x_i)$.模拟中采用固定边界条件:$x_0=x_{N+1}=0$.

图4-46(a)给出了当$K=5,T_L=0.3,T_R=0.2$时FK系统的温度分布曲线,我们可以看到很好的温度梯度.对FK系统来说,它与FPU最大的差别在于考虑了定点外势,即$K\neq0$.为考察有外势后系统的热传导是否正常(即热传导系数在$N$无关),我们还需考察系统热流随$N$的变化情况.由连续性方程,对于两边积分可得

$$J_i-J_{i-1}=\dot{x}_i\frac{\partial V(x_i,x_{i+1})}{\partial x_i}-\dot{x}_{i-1}\frac{\partial V(x_{i-1},x_i)}{\partial x_{i-1}}.\qquad(4.5.15)$$

因此热流定义为

$$J_i=\dot{x}_i\frac{\partial V(x_i,x_{i+1})}{\partial x_i}.\qquad(4.5.16)$$

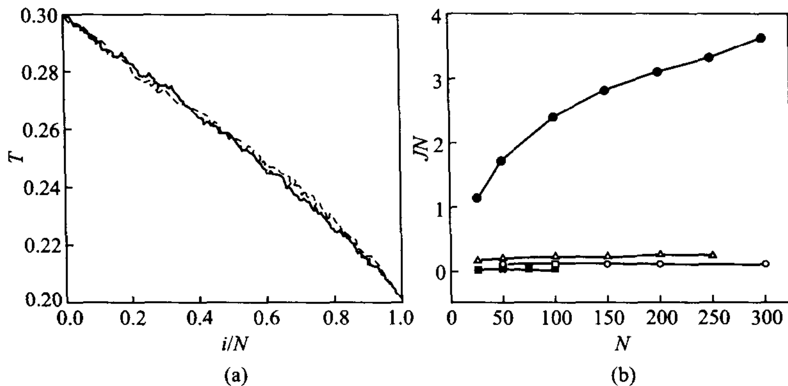



图 4-46 (a) FK 系统的温度分布曲线;(b) 不同情况下 $JN$ 随 $N$ 的变化

我们可计算其长时间平均.当系统达到非平衡定态时,平均热流 $J=\langle J_i(t)\rangle$ 与格点无关.在图 4-46(b)中给出的是不同情况下热流与粒子数的乘积 $JN$ 随 $N$ 的变化情况.实心圆点是 FPU 模型的结果,可以看到 $JN$ 随 $N$ 的增加而以 $N^{-1/2}$ 的规律增加,说明 FPU 系统的热传导是反常发散的;空心圆点是 FK 模型当 $K=5.0$ 的结果,实心方块对应于 FK 外势为

$$U(x)=-\frac{K_1}{(2\pi)^2}\cos(2\pi x)-\frac{K_2}{(4\pi)^2}\cos(4\pi x). \tag{4.5.17}$$

当 $K_1=5, K_2=15$ 时的结果,空心三角形为 FK 的相互作用势为

$$V(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{\beta}{4}x^4, \tag{4.5.18}$$

外势为

$$U(x)=-\frac{K}{(2\pi)^2}\cos(2\pi x) \tag{4.5.19}$$

时 $\beta=0.9, K=5$ 的结果.可以看到,对这三种 FK 不同的形式,只要外势存在,系统都表现出正常的热传导,即 $JN=$ 常数.

从上面的讨论可以发现,当外势 $U(x)$不存在时,格点系统不管是对于简谐耦合还是非简谐耦合都不再有正常的热传导行为,热传导系数都会随 $N$ 增加而发散.因此外势的存在是格点系统具有正常热传导的关键之处.这可以从声子的激发来理解.当格点系统仅仅是简谐耦合而没有外势时,系统具有不同模式的声子,但这些模式是相互独立的,故而声子之间没有相互作用.这导致热传导以声速传播,热传导系数是无穷大的.当格点的粒子耦合是非简谐时,如 FPU 系统,各种模式不再独立而是相互耦合的,对应于声子之间的相互作用.虽然温度可以有梯度存在,在热流以 $N^{1/2}$ 的速度而非 $N^{-1}$ 速度趋于 0,因而热传导系数是发散

原书缺页

量守恒,因而会出现正常热传导.

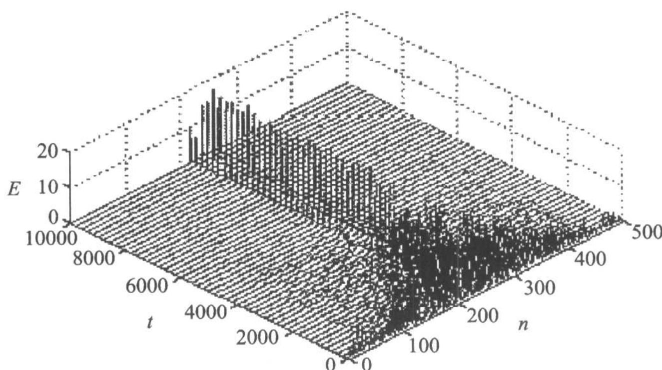



图 4-47 呼吸子的时空演化行为

3. 无序的影响:李保文等于2001年研究了一维质量无序分布的无外势格点系统的热传导[465],他们发现在低温时非简谐链系统的热传导系数 $K$ 是有限的,而在高温下 $K \sim N^{0.43}$;同年,Dhar 研究了其中的输运系数,包括热传导系数[467].这一问题由 Savin 等 2002 年又进行了讨论[468].杨磊等数值证实了二维无序的简谐耦合格点系统具有正常的热传导[469].

另外,尚有许多关于格点系统热传导的讨论,这里不再详述.

### 4.5.5 非线性格点体系中热传导的控制:热整流器

能量输运是一种宏观过程,对宏观过程的控制在应用上有现实的意义.2002年,Terraneo,Peyrard 与 Casati 合作,研究了控制一维非线性链上的热传导问题,开辟了对输运进行控制的新方向[470].他们通过引入缺陷的方式成功地控制热流的传导.通过这种控制,系统可以从正常的傅里叶热传导变化为绝缘体.这也为人们设计控制热能传输的热整流器提供了理论启示.

他们研究的是简谐耦合的有势系统:

$$H = \sum_{n} \left[ \frac{p_n^2}{2m} + V_n(y_n) + \frac{1}{2} K (y_n - y_{n-1})^2 \right], \tag{4.5.21}$$

这里 $K$ 为耦合强度,$V_n(y_n) = D_n(\mathrm{e}^{-\alpha_n y_n} - 1)^2$ 为 Morse 势.这一模型被用来研究 DNA 链的行为(尽管这里用的是 Morse 势,但结果也可用于其他情况).将其置于两个热源之间,计算中格点温度为 $T_n = m\langle \dot{y}_n^2 \rangle$,局域热流为 $J = K\langle \dot{y}_n (y_n - y_{n-1}) \rangle$.当 $D_n = D$,$\alpha_n = \alpha$,$n = 1, 2, \cdots$ 时,系统可有正常的热传导,且可以建立很好的温度梯度,如图 4-48(a)圆圈线所示.热源 $J \propto N^{-1}$,因此系统有有限的热传导系数.

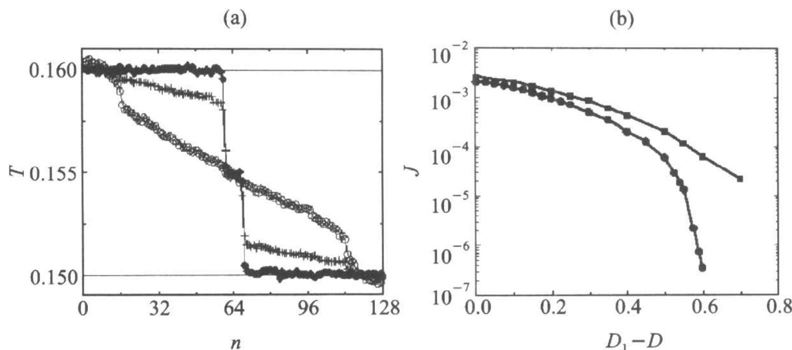



图 4-48 (a) 圆圈线:均匀链的温度分布,其他:改变 $D_1$ 时的温度分布;(b) 改变 $D_1$ 时 $J$ 与 $D_1-D$ 的变化曲线

为实现控制,我们将整个链分成三部分,每一部分有不同的参数.在与热源接触的左右两部分粒子($n=1,2,\cdots(N-M)/2$ 及 $n=(N+M)/2,\cdots,N$),我们令 $D_n=D$,而在中间的 $M$ 个格点我们令 $D_n=D_1(\neq D)$.我们仍保持 $\alpha_n=\alpha$.在实际模拟中,$N=128$,$M=8$,$\alpha=1$,$K=0.3$,$m=1$,$T_1=0.16$,$T_2=0.15$,$D=0.5$.$D_1$ 是可改变的参数,从 0.5 变到 1.2.图 4-48(a)给出了改变 $D_1$ 时的温度分布.在 $D_1=0.8$ 时(+字线),我们可以看到温度分布在中间区域有很大的跳跃,变得不再连续;当 $D_1=1.2$ 时(菱形),温度分布在中间是 $T_1$,$T_2$ 的平均,而在两边的温度分布均为两个热源的温度,此时系统像一个绝缘体,热量传递被中间的"缺陷"格点所阻碍.如果计算此时的热流,可以发现 $J\sim10^{-5}$ 几乎为零.在图 4-48(b)中的方块线即为 $J$ 与 $D_1-D$ 的变化曲线,可以发现 $D_1-D$ 增大时 $J$ 很快趋于 0.

上述的控制机制可用简谐势模型来理解:

$$H=\sum_n\left[\frac{p_n^2}{2m}+\widetilde{D}_n y_n^2+\frac{1}{2}K(y_n-y_{n-1})^2\right], \tag{4.5.22}$$

$\widetilde{D}_n=D_n\alpha_n^2$.模拟的结果表明,类似于上面 Morse 势,此系统也存在由导体到绝缘体的转变,而且现象更明显,转变更陡.这从图(b)的圆圈曲线中 $J$ 下降更快可以看出来.

下面我们来分析一下这种控制机制.当没有热源存在时,简谐势系统有平面波解:

$$y_n(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kn-\omega t)}, \tag{4.5.23}$$

将其代入运动方程:

$$\ddot{y}_n = K(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) - \widetilde{D}y_n, \tag{4.5.24}$$

我们可得到 $\omega$ 与 $k$ 的色散关系：

$$\omega^2 = 2(K + D - K\cos k). \tag{4.5.25}$$

因此系统的频率 $\omega$ 范围为 $\omega^2 \in [2\widetilde{D}, 2\widetilde{D} + 4K]$ 的声子带.

对于非均匀的简谐势系统($\widetilde{D}_1 \neq \widetilde{D}$)，系统要有行波在整个链上传播，就必须使得 $\omega^2 = 2(K + \widetilde{D} - K\cos k)$ 与 $\omega^2 = 2(K + \widetilde{D}_1 - K\cos k)$ 有重叠部分. 当 $\widetilde{D}_1 = \widetilde{D}$ 时显然声子带中的波都可以传播；当 $\widetilde{D}_1 \neq \widetilde{D}$ 时，则只有一部分(两个声子带的交集)频率的波可以传遍整个系统. 对于其他频率，$y_n \sim e^{-\widetilde{k}_1 n}$(其中 $\widetilde{k}_1$ 为实数)，传播在通过中间区域时会指数衰减，因而无法传播. 当 $\widetilde{D}_1 - \widetilde{D}$ 增大时，两个声子带的交集越来越小，能在整个系统传播的波的百分比越来越小. 当 $\widetilde{D}_1 - \widetilde{D} > 2K$ 时，两个声子带不再有重叠，此时所有波均被禁止传播至整个系统. 来自热库的波传到格点中间区域会全部被反射回来，因而热流 $J$ 几乎为零，系统犹如一个绝缘体.

当系统势为非简谐势时，上述的结论定性上是一样的，因此这就解释了热传导控制成功的原因. 在这种控制方法中，中间的“缺陷”格点相当于一个界面，它将系统分成两个部分. 在实际控制中，通常这个界面是事先设计好的，因而可通过保持温差 $\Delta T = T_1 - T_2$ 固定改变热源温度的方法达到控制热流的目的.

# 第5章
# 耦合布朗马达与合作定向输运

非线性系统的输运行为可以体现在许多不同的方面，表现为不同的具体行为，例如我们在前面所讨论到的扩散、漂移、热传导等宏观现象.先前讨论的随机共振过程实际上也是能量的输运过程.在诸多的输运行为中，有一种现象是近年来受到物理、生物等不同领域密切关注的，那就是物质、能量流的定向输运问题.在上一章中我们所涉及的FK系统在直流外力下的输运行为就是一种典型的定向输运(directed transport)过程.但是，这种定向输运的特点是：产生定向输运需要一个空间上的定向外场(偏置，或平均效果上为非零的定向外力).这方面的研究已经进行了很长时间并且相对成熟，另外从机制的理解上并没有原则性的困难.因此这不是本章的讨论内容.这里我们更感兴趣的定向输运问题是指作用于系统上的外力总的效果为零(甚至没有外力)时定向输运的可能性及效率.对于这种情况，系统要产生定向运动，就需要打破内部或外部的某些对称性，从而将涨落或非定向驱动的能量转化为定向运动的能量(做功).关于分子马达问题的研究，最早可追溯到热力学中有关第二类永动机(单源热机)问题的争论，近年来由于在生物学、物理实验等许多方面定向输运研究的进展而成为新的热点.本章中我们将着眼于由这些具体问题抽象出来的物理模型，因此讨论更具有一般性.我们将着重于定向输运的理论分析.另一方面，以往关于定向输运的研究多集中于单个分子马达输运机制的分析.但在许多情况下粒子之间的相互作用不可避免甚至起着决定性的作用.另外一个很有意义的问题是：定向输运是否可以纯粹由系统的耦合引起？这是一个新发展的领域，至今尚没有系统的讨论.所以本书的内容将花很多笔墨着重于耦合系统的合作效应：合作定向输运.合作定向输运是近年来分子马达研究的重要方向之一，尚有许多不清楚的问题，并有更为丰富的现象，因此这方面在本书中的介绍应该说还是初步的，并与作者的兴趣及背景有关系，故不可能面面俱到.我们建议有兴趣的读者可以查阅我们在后面列出的

有关文献.

## 5.1 热力学棘齿与布朗马达概述

### 5.1.1 概述

定向输运问题的研究重点是在空间周期系统中定向输运流的可能性及其特点.当体系处于热力学平衡态时,定向运动是不可能发生的(排除暂态过程).这可由热力学第二定律直接得出.在热力学平衡态下,定向运动就意味着系统可以从单一的热源吸收热量而转化为宏观运动的功,这恰恰成为第二类永动机(单源热机),违反第二定律.因此要产生定向输运,要满足的第一个条件就是系统必须处于非平衡状态.在实际中,我们可以引入非平衡外来扰动如确定性外力或随机涨落力使得体系离开平衡态.

上面是一个产生定向输运不可缺少的前提条件.对系统另一个不可缺少的要求就是空间反演对称性的破缺.这种破缺可以用几种不同途径来实现:(1)空间周期系统的空间反演对称性可以内禀地破缺,即周期势不满足反演对称性.我们称这种周期势为棘齿势(ratchet potential);(2) 非平衡扰动自身的特点某些情况下也可引起空间反演对称性被破坏;(3) 当系统由多个单元组成时,系统可通过耦合产生自发地产生对称破缺.系统的非平衡性与空间反演对称破缺是产生定向输运的基本必要条件,但并不是充分条件.要产生物理上可观察的定向运动,还需要系统各参数的适当匹配.存在定向输运的系统在物理上称为棘齿系统(ratchet),在生物学上则称为分子马达(molecular motor).若系统的定向输运是由于随机涨落引起的,我们称其为布朗马达(Brownian motor);若这种定向输运是由确定性外力引起或不含随机力时,则称为确定性马达(deterministic motor).

布朗马达的研究来源于多个方面.最早关于棘齿效应的讨论来源于对热力学第二定律的理解,这在阿基米德(Archimede)、塞贝克(Seebeck)、麦克斯韦(Maxwell)、居里(Curie)等人的著作中可零星见到,但都没有对此效应专门的讨论.1912 年由 Smoluchowski 提出的假想实验(gedanken experiment)可算是关于棘齿效应的专门讨论[473];接着,费曼(Feynman)对此进行了进一步的分析,并将其推广[474].另一个直接推动布朗马达研究的动力是近年来关于细胞内输运过程的研究,特别是分子马达与分子泵的生化问题.对于生物分子马达,Huxley 于 1957 年研究了肌肉收缩的问题[475],其后又有相当多的研究;对于分子泵,1986 年 Tsong、Astumian 与合作者用棘齿效应解释了有关生物实验,并将定向输运问题与分子泵联系起来[476,477].在物理方面,1967 年,DeWaele 等人从实验上观察到并从理论上解释了在一个磁场和无偏置交流电流作用下直流超导量子干涉装

置中的电压整流效应(棘齿效应的表现)[478,479].另外,关于无偏置周期驱动力作用下在对称破缺的空间周期结构中定向输运的研究,从20世纪70年代中期开始至今已有几百篇实验和理论论文.这些方面的研究使得布朗马达和定向输运的内容变得大为丰富[480~482].由于所涉及的定向输运过程大多与系统的非线性因素有关,因此近年来关于输运过程与系统非线性动力学的关系的研究以及时空非线性系统的合作输运研究为这一方面的探索注入了新的活力.

### 5.1.2 Smoluchowski-Feynman 棘齿

一个很有吸引力的问题是噪声(热涨落)的利用.在前面讨论中我们已经看到噪声的种种正面作用,如随机共振、噪声促进同步、噪声诱导斑图形成、噪声促进扩散等种种现象.把无序的能量转化为对我们有用的能量是多少年以来人们孜孜以求的梦想.人们要问:系统是否可以自发从无序的涨落中获取能量并转化为有用的功?如果能,怎样来实现?我们可以设想,如果可以实现的话,地球上无穷无尽的能量资源就可以被利用来为人类服务,如海洋、潮汐等,从而解决能源危机.在热力学研究的历史上,人们曾设计各种精巧的永动机,试图把热变为功.在热力学平衡态,热变功而不产生影响是不可能的.关于这个讨论,一个著名的假想实验是由 Smoluchowski 于1912年提出的,后来由费曼引入物理学教科书中并加以推广.

一、Smoluchowski-Feynman 棘齿

Smoluchowski 所提出的假想实验装置如图5-1所示,装置由几个部分组成.在一根轴的一头是轮翼(叶片),另一头是棘齿.棘齿是一个圆形的非对称锯齿.杆的中央是一个有负载的轮子.整个装置被处于热平衡的气体所包围.这样,如果系统能自由转动的话,它就可以实现由气体分子对叶片作用引起的转动布朗运动.为实现将无偏置随机运动转化为有向转动,我们可以借助于图5-1中的"棘爪",它可以使得棘齿不发生倒转.这样,如果气体分子对叶轮的作用使系统发生转动,棘爪就可以保证棘齿单向转动,从而可将轴中间的重物提起(做功),实现"单源热机"的"梦想":从单一热源吸收热量转化为功.

真的如此吗?答案当然是不对.上面的假想实验明显违反了热力学第二定律,它是永动机的一种.尽管系统存在非对称性(棘齿),但它并不足以引起定向转动.实际上,既然气体分子与叶片的作用发生在微观尺度,那么棘爪也应该足够小才可能实现热变功.正如 Smoluchowski 所指出的,棘爪本身也处于小的热涨落环境中.整个系统(棘爪与叶片)都处于同一温度的热库中,平衡态使得系统的非对称效应被抵消.

上面的假想实验可以用下面的简化随机模型来描述.考虑一维布朗粒子在周期势 $V(x)$ 中的运动,其 Langevin 方程为

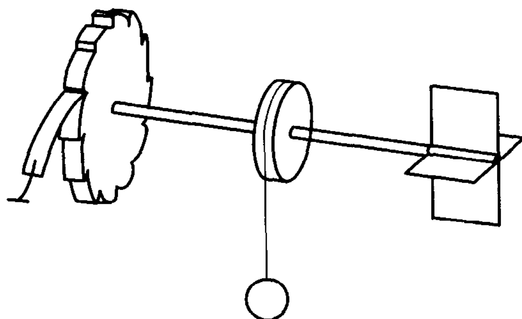


图 5-1 Smoluchowski-Feynman 棘齿的假想实验装置

$$m\ddot{x} + V'(x) = -\eta\dot{x} + \xi(t), \tag{5.1.1}$$

其中 $m$ 为粒子质量，$\eta$ 为阻尼系数，$\xi(t)$为热涨落. 这里周期势 $V(x)$为周期为 $L$ 的非对称势. 为方便，我们可以选用下面形式的势(如图 5-2 所示)：

$$V(x) = V_0\left[\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)\right]. \tag{5.1.2}$$

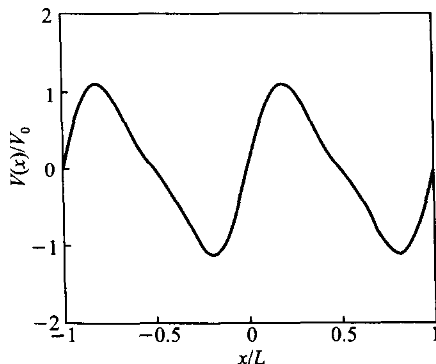



图 5-2 非对称周期棘齿势 $V(x)$，周期为 $L$

热涨落 $\xi(t)$是一个温度为 $T$ 的热源，可假设它是高斯型的白噪声：

$$\langle\xi(t)\rangle = 0, \langle\xi(t)\xi(s)\rangle = 2\eta k_B T\delta(t-s). \tag{5.1.3}$$

由于我们所研究的系统是很小的，通常阻尼效应远远大于惯性效应，系统运动处于过阻尼状态($m \ll \eta$)，因此方程(5.1.1)中的惯性项 $m\ddot{x}(t)$可以忽略. 这样我们可以得到最简单的 Smoluchowski-Feynman 棘齿随机模型：

$$\eta\dot{x}(t) = -V'(x(t)) + \xi(t). \tag{5.1.4}$$

相应地,我们可写出概率分布 $P(x,t)$ 的 Fokker-Planck 方程[64-66]:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{V'(x)}{\eta}P(x,t)\right\}+\frac{k_B T}{\eta}\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}. \tag{5.1.5}$$

我们最关心的就是粒子流 $\langle \dot{x}\rangle$,即粒子的运动速度.对于周期势中的布朗运动,我们在第一章和上一章中都曾涉及.由上面方程,我们有:

$$\langle \dot{x}\rangle=-\frac{1}{\eta}\int_{-\infty}^{\infty} V'(x)P(x,t)\mathrm{d}x. \tag{5.1.6}$$

此式不易计算.考虑到 Fokker-Planck 方程可写为下面的主方程:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial J(x,t)}{\partial x}=0, \tag{5.1.7}$$

其中 $J(x,t)$ 为概率流:

$$\begin{aligned} J(x,t) &\equiv \langle \dot{x}(t)\delta(x-x(t))\rangle \\ &= -\left[\frac{V'(x)}{\eta}+\frac{k_B T}{\eta}\frac{\partial}{\partial x}\right]P(x,t), \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

则粒子流为:

$$\langle \dot{x}\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} J(x,t)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty} xP(x,t)\mathrm{d}x. \tag{5.1.9}$$

可以证明,如果仅考虑粒子流,则只需考虑边界条件为周期边界条件时的 Fokker-Planck 方程,此时系统存在定态分布 $P_{st}(x)$ 且解惟一.定态分布为:

$$P_{st}(x)=\frac{1}{Z}\mathrm{e}^{-V(x)/k_b T}, \tag{5.1.10}$$

配分函数为:

$$Z=\int_0^L \mathrm{e}^{-V(x)/k_B T}\mathrm{d}x. \tag{5.1.11}$$

可见定态分布具有 Boltzmann 分布的形式.因此很容易算出系统的粒子流为零:

$$\langle \dot{x}\rangle=0. \tag{5.1.12}$$

上述的理论结果表明:尽管系统有空间对称性的破缺,但系统并没有优先的运动方向,因而无定向运动.这个结果直接说明了 Smoluchowski-Feynman 假想实验的棘齿系统不会出现自发热变功的情况,其关键原因就在于系统处于平衡态.这与热力学第二定律是相符的[483~488].上面结果可推广到 $x$ 为整个实空间的情况.

二、费曼棘齿

上面的假想实验是假设棘齿、棘爪与叶片处于同一温度环境中,在这一条件下,热力学第二定律将禁止单源热机将热量转换成功.费曼进一步考虑了一个新的情况:若棘齿和棘爪部分与叶片部分处于不同温度的热源(如图 5-3 所示),系统是否会将热量转化成功?

考虑两部分与不同热源接触，我们需要同时考虑两部分的情况．引入两个集体变量：$x(t)$为棘齿与棘爪的相对位置(角度)，$h(t)$为棘爪的高度(与 $x(t)$方向垂直)．$x(t)$实际反映的是叶片转动的角度，因此类似于单源棘齿模型，系统可用最简化的 Langevin 方程：

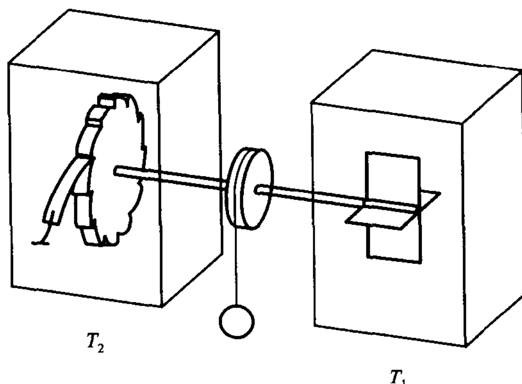



图 5-3 费曼的棘齿装置，棘爪部分与叶片部分处于不同温度的热源接触

$$\eta_1 \dot{x}(t) = -\frac{\partial V(x,h)}{\partial x} + \xi_1(t), \tag{5.1.13a}$$

$$\eta_2 \dot{h}(t) = -\frac{\partial V(x,h)}{\partial h} + \xi_2(t), \tag{5.1.13b}$$

$\xi_{1,2}(t)$描述的是两个热源的随机力，设为相互独立的高斯白噪声：

$$\langle \xi_{1,2}(t) \rangle = 0, \langle \xi_i(t)\xi_j(s) \rangle = 2\eta_i k_B T_i \delta_{ij} \delta(t-s), i,j = 1,2. \tag{5.1.14}$$

注意此时的棘齿势与 $x,h$ 均有关．上面的方程不再容易解析处理，一般可用数值模拟的方法来求解．结果表明，当 $T_1 \neq T_2$ 时，我们可以观察到棘齿的定向转动．实际上，当棘齿和棘爪部分与叶片部分处于不同温度的热源时，系统已处于非平衡状态，因此观察到棘齿的定向转动是可能的．研究还表明，棘齿的转动方向取决于热源温度 $T_1$ 与 $T_2$ 的相对大小，$T_1 < T_2$ 与 $T_1 > T_2$ 的转动方向相反．值得注意的是，由于这是假设实验，因此至今还未真正在实验上实现．因为实验上我们必须在一个很小的尺度下进行，这样热涨落才会起主导作用．

### 5.1.3 布朗马达的基本分类

由上面的讨论可知，系统除空间上的非对称性外还要始终偏离平衡态．一种偏离平衡态的方式就是使系统所处的环境温度**空间分布不均匀**．上一节的费曼棘齿模型就是一个典型的例子．另一种使系统处于非平衡态的方式可以是环境

**温度时间的不均匀性**,即温度随时间而变化.只要温度变化速度不太慢,以至于系统来不及弛豫回平衡态,系统就会保持在非平衡态.这种系统被称为温度棘齿系统.研究发现,这类系统也可以存在非零的定向流.第三种保持非平衡态的方法是系统的结构受到外来驱动而随时间变化.这个驱动可以是直接的外力,也可以是对系统的周期势本身的调制.驱动可以是确定性的(通常是周期的),也可以是随机的.一般地,只要满足这样几个条件就可以认为系统是一个棘齿系统:(1)空间势的空间周期性和时间的平移周期性或不变性;(2)所有的力或梯度在空间、时间、统计系综平均后应为零;(3)系统应始终处于偏离平衡的状态.当然周期势需要是空间非对称的,即反演对称性被破坏.

我们考虑下面的基本模型,它完全可以满足上面的要求,并且是空间一维的,使得讨论比较方便:

$$\eta\dot{x}(t) = -V'(x(t), f(t)) + y(t) + F + \xi(t), \tag{5.1.15}$$

$$\langle\xi(t)\rangle = 0, \langle\xi(t)\xi(s)\rangle = 2\eta k_B T\delta(t-s), \tag{5.1.16}$$

其中 $V'(x, f) = \partial V(x, f)/\partial x$, $V(x, f)$是空间周期的:

$$V(x+L, f(t)) = V(x, f(t)). \tag{5.1.17}$$

外力 $F$ 称为负载力,在系统定向运动时是等于零的,它只是用来研究系统的响应.系统受的外力 $y(t)$及其对势的调制参量 $f(t)$是周期的或随机的.

考察系统是否存在马达运动的基本量是平均粒子流$\langle\dot{x}\rangle = \langle dx/dt\rangle$.由于系统的遍历性,这里的统计系综平均可以由沿轨迹的长时间平均来代替:

$$\langle\dot{x}\rangle = \lim_{t\to\infty} x(t)/t. \tag{5.1.18}$$

另一个考察噪声效应的量是有效扩散系数:

$$D_{eff} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\langle[x(t) - \langle x(t)\rangle]^2\rangle. \tag{5.1.19}$$

根据中心极限定理,初始位置为 $x(0) = x_0$ 的粒子位置在 $t$ 时刻的分布将趋于如下的高斯分布:

$$P(x, t) \approx \frac{1}{\sqrt{4\pi D_{eff}t}}\exp\{-[\langle\dot{x}\rangle t - x_0]^2/(4D_{eff}t)\}, t\to\infty. \tag{5.1.20}$$

可以看出,粒子流$\langle\dot{x}\rangle$描述了高斯波包的漂移速度,而有效扩散系数 $D_{eff}$则描述了波包随时间的弥散速度.当$\langle\dot{x}\rangle = 0$ 时,波包是纯扩散的.

外力 $y(t)$可以是周期的,也可以是随机的.若它是周期的,设 $y(t+T_0) = y(t)$,则应有 $\int_0^{T_0} y(t)dt = 0$;若 $y(t)$是随机的,则其系综平均应该为零,即$\langle y(t)\rangle = 0$, $f(t)$也应有类似要求.

对周期势 $V(x, f)$来说,若存在一个 $\Delta x$ 使得

$$V(-x, f(t)) = V(x+\Delta x, f(t)), \tag{5.1.21}$$

则称它是空间对称的.它与 $f(t)$的具体形式无关.当上面的空间对称性不满足时,则称其为非对称或空间各向异性的.

对平均无偏置的外力 $y(t)$来说,若 $y(t)$是周期的且存在 $\Delta t$ 使得 $y(t+\Delta t)=-y(t)$,则称 $y(t)$是时间反演对称的.易见在两次反演后 $y(t)=y(t+2\Delta t)$.由于 $y(t)$的周期为 $T_0$,我们一般要求 $y(t+T_0/2)=-y(t)$.

由 $V(x,f)$的对称性及周期性,我们可把 $V(x,f(t))$写成下面的形式:

$$V(x,f(t))=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(f(t))\cos(2\pi nx/L). \qquad (5.1.22)$$

不失一般性,我们只讨论 $\Delta x=0$、$a_0(f(t))=0$ 的情况.类似地,对称的周期力 $y(t)$也可写成时间的傅里叶展开形式:

$$y(t)=\sum_{n=1,3,5\cdots}b_n\cos(\phi_n+2\pi nt/T_0). \qquad (5.1.23)$$

对于对称的随机力 $y(t)$,我们要求其奇阶矩为 0,即

$$\langle y(t_1)y(t_2)\cdots y(t_{2n+1})\rangle=0. \qquad (5.1.24)$$

值得注意的是,如果 $V(x,f(t))$与 $y(t)$同时满足上述的对称性,则在 $F=0$ 时系统不存在非零定向流,即$\langle\dot{x}\rangle=\lim\limits_{t\to\infty}x(t)/t=0$.其证明并不麻烦,因为由于对称性,当我们作时间平移变换和空间反演变换时,对于 $F=0$ 会有$\langle\dot{x}\rangle=-\langle\dot{x}\rangle$,所以$\langle\dot{x}\rangle=0$.这个结果的重要性在于告诉我们:要使系统产生非零的定向粒子流,周期势或外力 $y(t)$的对称性必须产生破缺.根据这两种对称性破缺的情况,我们可以将所研究的棘齿系统进行分类.一般来说有两种基本的棘齿模型,一类是 $y(t)=0$ 的系统,我们称为脉动棘齿(pulsating ratchets);另一类是 $f(t)=0$的系统,称为倾斜棘齿(tilting ratchets).对于脉动棘齿[489~493],由于 $y(t)=0$,因此应有 $f(t)\neq 0$.有一类脉动棘齿系统,$f(t)$是加性的:

$$V(x,f(t))=V(x)[1+f(t)]. \qquad (5.1.25)$$

这类系统称为涨落势棘齿,即 $f(t)$是在原势 $V(x)$基础上的振幅调制[494~499].这类棘齿系统有一个特殊的类型,称为开关棘齿,它满足:

$$f(t)=\begin{cases}+1(\text{或 }0),\\-1,\end{cases} \qquad (5.1.26)$$

即 $f(t)$随时间在两个不同值之间变化,使得 $V(x,f)$有时存在,有时为零[500~508].

脉动棘齿的另一大类称为行波势棘齿,势可表示为[509~511]:

$$V(x,f(t))=V(x-f(t)). \qquad (5.1.27)$$

这个称呼来源于势可表为类似于行波的单一的坐标 $u=x-f(t)$.当 $f(t)$有非零的长时间漂移即 $u=\lim\limits_{t\to\infty}f(t)/t\neq 0$ 时,我们称系统为真行波势棘齿.若 $f(t)$仅为时间的周期或定态随机函数,则 $u=0$,我们称其为非标准行波势棘齿系统.

这两类棘齿系统都得到了充分的研究.对行波势棘齿,周期势 $V(x)$可以不必是棘齿势,它可以是对称的.总势 $V(x,f(t))$的空间对称性可以由于$f(t)$的存在而发生破缺.

对于倾斜棘齿,$f(t)=0$,因而 $V(x,f(t))=V(x)$,即周期势不显含时间[512~521].当 $V(x)$为棘齿势时,我们一般只考虑时间对称的 $y(t)$即可.如果 $y(t)$是随机的,我们称系统为涨落力棘齿;当 $y(t)$随时间周期变化时,系统称为摇摆棘齿系统.在已有的相关研究中,后者在实验上较受重视.对于对称的 $V(x)$,如果 $y(t)$是非对称的,则系统一般会产生非零的定向流$\langle\dot{x}\rangle$.

若 $f(t)$与 $y(t)$均为零,即 $f(t)=0,y(t)=0$,则系统的非平衡态条件必须来自于热源,即我们开头讨论的热源温度的时间及空间依赖性.当温度 $T$ 与空间坐标有关时,系统称为塞贝克棘齿;当 $T$ 与时间有关时,称为温度棘齿.当然,摩擦系数 $\eta$ 也可以是与时间和空间有关的,这样的系统被称为摩擦棘齿.但研究表明 $\eta$ 的时空不均匀性本身并不破坏系统的细致平衡对称,因而不会观察到宏观的定向流.只有当 $\eta$ 有记忆效应时,细致平衡对称性被打破,我们才可能观察到宏观定向流.

虽然上面 $V(x,f)$与 $y(t)$的对称性破缺是产生定向流的必要条件,但并不充分.系统尽管有对称破缺,但若有隐含的超对称因素时,系统也不会产生定向输运[522~524].这是另外一个问题,此处不再讨论.另外,系统是否出现宏观定向输运还要取决于系统的具体参数.

## 5.2 布朗马达在棘齿势中的定向输运

### 5.2.1 脉动棘齿系统的定向输运

一、快慢脉动极限

本节中我们讨论脉动棘齿的定向流问题.这类问题由下面的随机微分方程描述:

$$\eta\dot{x}(t)=-V'(x(t),f(t))+\xi(t). \tag{5.2.1}$$

我们考虑 $f(t)$为一随机过程(无偏置),$\langle f(t)\rangle=\langle f(0)\rangle=0$,并假设其定态分布为 $\rho(f)$.$f(t)$的关联时间可定义为:

$$\tau=\left[\int_{-\infty}^{\infty}\langle f(t)f(0)\rangle\mathrm{d}t\right]\Big/[2\langle f^2(t)\rangle]. \tag{5.2.2}$$

系统的定向输运特征与关联时间 $\tau$ 有密切的关系.当关联时间 $\tau$ 非常小时,噪声 $f(t)$是一个快速变化的量,而且关联 $\int\langle f(t)f(0)\rangle\mathrm{d}t\to0$.此时 $f(t)$在方程

(5.2.1)中不起作用,我们又回到 Smoluchowski-Feynman 棘齿系统,因而$\langle \dot{x} \rangle = 0$. 当 $\tau$ 很大时($\tau \to \infty$),$f(t)$变化很慢,$f(t) \approx f =$ 常数(绝热近似). 对于任一固定 $f$,系统仍为 Smolichowski-Feyman 系统,因此$\langle \dot{x} \rangle = 0$. 上述的讨论可推广到 $f(t)$是周期函数的情况,也可推广到一般的行波势棘齿系统的情况. 所以我们可以得到一般性的结论:**对于任意一种脉动棘齿,在快脉动与慢脉动极限下系统都不存在净的定向粒子流,**$\langle \dot{x} \rangle = 0$.

当 $\tau$ 较小(但不是快脉动)时,$\langle \dot{x} \rangle \neq 0$ 且较小,我们可以求出其一级近似结果. 设 $f(t)$为一平稳随机过程. 在小 $\tau$ 情况下,$V(x,f)$可以用下面的平均势(周期为 $L$ 的周期势)代替:

$$V_0(x) = \langle V(x, f(t)) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} V(x,f)\rho(f)\mathrm{d}f. \tag{5.2.3}$$

$V'(x, f(t))$的周期关联为:

$$\begin{aligned} C(x,t) &= \langle V'(x,f(t))V'(x,f(0)) \rangle - [V'_0(x)]^2 \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} \rho(f_1,f_2,t)V'(x,f_1)V'(x,f_2)\mathrm{d}f_1\mathrm{d}f_2. \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

这里 $\rho(f_1,f_2,t)$为 $f(t)$的联合双时分布:

$$\rho(f_1,f_2,t) = \langle \delta(f(t)-f_1)\delta(f(0)-f_2) \rangle. \tag{5.2.5}$$

在小时间关联情况下系统的定向流为:

$$\langle \dot{x} \rangle = \frac{L}{\eta^2 k_B T} \frac{\int_0^L V'_0(x)\int_{-\infty}^{\infty} C(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x}{\int_0^L \mathrm{e}^{V_0(x)/k_B T}\mathrm{d}x \int_0^L \mathrm{e}^{-V_0(x)/k_B T}\mathrm{d}x}. \tag{5.2.6}$$

上述结果中,$C(x,t)$隐含着关联时间 $\tau$. 很容易证明$\langle \dot{x} \rangle \propto \tau$. 另外,对于涨落脉动势棘齿,$V(x,f) = V(x)[1+f(t)]$. 在小 $\tau$ 情况下我们有:

$$\langle \dot{x} \rangle = \frac{2L\tau\langle f^2(t) \rangle \int_0^L [V'(x)]^3\mathrm{d}x}{\eta^2 k_B T \int_0^L \mathrm{e}^{V(x)/k_B T}\mathrm{d}x \int_0^L \mathrm{e}^{-V(x)/k_B T}\mathrm{d}x}. \tag{5.2.7}$$

长关联下($\tau \gg 1$),定向流$\langle \dot{x} \rangle$可用绝热近似得到一级近似结果,但形式较为复杂,并且依赖于 $f(t)$的具体形式,我们在此不再讨论.

对于时间周期的 $f(t)$,在上述两种极限下我们也可作近似展开,这里不再给出,感兴趣的读者可参考有关文献.

二、开关棘齿的应用

开关棘齿系统于 1987 年由 Bug 与 Berne 引入[500],1992 年 Ajdari 与 Prost 独立地重新得出并进行了理论探讨[501]. 一维情况下,系统的运动可由下面的 Langevin 方程描述:

$$\eta\dot{x}(t)=-V'(x(t))[1+f(t)]+\xi(t), \tag{5.2.8}$$

其中 $V(x)$为非对称的周期棘齿势. $f(t)=\pm 1$,因此总的势随时间变化或处于"开"的状态,或处于"关"的状态. 在某些条件下,这个问题可作解析处理. 定性上来说,当 $V(x)$的极小值("谷")与其右边的极大值("峰")更接近时,我们会得到粒子在正方向的定向流,称为向前开关棘齿,反之则产生反方向的流,称为向后开关棘齿. 我们还可以讨论系统的有效扩散系数. 研究表明,系统的定向流大小与摩擦系数 $\eta$ 有密切关系. 不同种类和尺寸的粒子会有不同的定向输运流和扩散速度. 这一现象启发我们利用其作混合颗粒体系的分离,这在实际应用中无疑是很有意义的. Faucheux 与 Libchaber 实验研究了两种不同颗粒混合在一起的情况[506~507]. 初始时这些粒子处于几乎同一位置 $x(0)$. 利用开关棘齿势,在长时间之后两种颗粒的$\langle \dot{x}\rangle t$ 及$\sqrt{2D_{eff}t}$可以发生很大的差异,因而达到了颗粒分离的目的. 这种分离方法最近已被用来进行 DNA 片断及细小颗粒体系的分离,也达到很好的效果.

三、涨落势棘齿

涨落势棘齿模型是 1994 年由 Astumian-Bier 小组[494]与 Prost 等[495]各自提出的. 系统模型在形式上与开关棘齿完全相同,只是周期势幅度的调制 $f(t)$不再是$\pm 1$ 的变化,即 $V(x)[1+f(t)]$总是保持相同的形状,但幅度随时间变化. 因此开关棘齿实际是一种特殊的涨落势棘齿. 在过阻尼涨落势棘齿系统中,热噪声是产生有限定向流必不可少的. 另外,只有非对称的周期势 $V(x)$才会产生棘齿效应.

外力 $f(t)$可以是周期的,也可以是随机的. 如果 $f(t)$是随机的,则通常假设其随机过程是平稳的. 讨论比较多的一种情况是 $f(t)$为对称的双歧噪声,即 $f(t)$符合下面的分布:

$$\rho(f)=\frac{1}{2}[\delta(f-\sigma)+\delta(f+\sigma)], \tag{5.2.9}$$

其关联为:

$$\langle f(t)f(s)\rangle=\sigma^2\exp[-|t-s|/\tau], \tag{5.2.10}$$

其中 $\tau=v/2$ 为关联时间,$v$ 为$\pm\sigma$ 态间的翻转速率. $\sigma^2$ 为噪声强度:

$$\sigma^2=\langle f^2(t)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f^2\rho(f)\mathrm{d}f. \tag{5.2.11}$$

由此可写出 Fokker-Planck 方程:

$$\frac{\partial P_\pm(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(1\pm\delta)V'(x)}{\eta}P_\pm(x,t)\right]+\frac{k_BT}{\eta}\frac{\partial^2P_\pm(x,t)}{\partial x^2}-\gamma P_\pm(x,t)+\gamma P_\mp(x,t), \tag{5.2.12}$$

$P_\pm(x,t)$描述的是在 $t$ 时刻粒子在 $x$ 处且 $f(t)$处于$\pm\sigma$ 态的概率密度. 可以看

到,上面两个方程是相互耦合的.因此方程只有在一些特殊情况下[如当$V(x)$是锯齿势(分段线性)时]才可能解析求解.我们这里不准备列出其冗长的解析结果.定性上来说,其定向输运行为类似于开关棘齿系统,即如果锯齿势的局域极小值更靠近其右边的局域极大值,则对于任意有限的温度$T$和翻转速率$v$,定向流都是正的,反之则是负的.当$T$或$v$趋于零或无穷大时,$\langle\dot{x}\rangle\to 0$.实际上,只要$V(x)$与锯齿势有类似的走向,则系统的定向流方向取决于$V(x)$一个周期$L$内的较陡的斜坡的斜率符号.

另一个关于随机$f(t)$讨论较多的情况是其为Ornstein-Uhlenbeck型关联高斯噪声.如果$f(t)$和$\xi(t)$都较弱,则在$V(x)$相邻的势阱间跃迁非常小,此时可应用共振激发效应的有关方法进行处理.实际上,若$f(t)$随机变化,它起到的是乘性噪声的作用,这将导致复杂的马达输运行为.有兴趣的读者可参考有关文献.

四、行波势棘齿

下面我们考虑如下形式的系统:

$$\eta\dot{x}(t) = -V'(x(t)-f(t))+\xi(t). \tag{5.2.13}$$

此时$\xi(t)$仍为无偏置的高斯白噪声,而周期势$V(x)$可以不必是非对称的棘齿势.通过引入新变量$y(t)=x(t)-f(t)$,上述方程可化为

$$\eta\dot{y}(t) = -V'(y(t))-\eta\dot{f}(t)+\xi(t). \tag{5.2.14}$$

显然系统的定向粒子流$\langle\dot{x}\rangle=\langle\dot{f}\rangle+\langle\dot{y}\rangle$.方程(5.2.14)与倾斜棘齿形式非常类似.从这个意义上说,行波势棘齿与倾斜棘齿是等价的.当上面的系统为真行波势棘齿系统,即$f(t)=ut$时,上述方程直接化为

$$\eta\dot{y}(t) = -V'(y(t))-\eta u+\xi(t). \tag{5.2.15}$$

这是直流力作用下布朗粒子在周期势运动的方程,我们前面已给出解.因此很容易得到定向流$\langle\dot{x}\rangle$的表达式:

$$\langle\dot{x}\rangle = u-\frac{k_BTL[\exp(\eta uL/k_BT)-1]}{\eta\int_0^L \mathrm{d}x\int_x^{x+L}\mathrm{d}y\exp\{[V(y)-V(x)+(y-x)\eta u]/(k_BT)\}}. \tag{5.2.16}$$

由上式可以看到,$V(x)$可以不必是非对称的.另外,热噪声$\xi(t)$也可以为零.当$T\to 0$时,我们有

$$\langle\dot{x}\rangle = \begin{cases} u-\dfrac{L}{\displaystyle\int_0^L\frac{\mathrm{d}x}{u+V'(x)/\eta}}, & u+V'(x)\neq 0\text{ 时}, \\ u, & \text{其他}. \end{cases} \tag{5.2.17}$$

对于系统不需热噪声也存在定向流的情况,我们称为**确定性定向输运**,后面我们会专门讨论.另外,在对称势$V(x)$中的定向输运我们在后面也会论及.

在某些情况下我们还会遇到若干行波势叠加的棘齿系统，即

$$V(x,f(t)) = \sum_n V_i(x-u_it), V_i(x+L_i) = V_i(x). \quad (5.2.18)$$

对于单行波势的处理，前面实际是用近似展开到 $V(x)/k_BT$ 的第二阶. 在同样的近似下，对于数个行波势叠加的情况，只要它们各自的 $L_i$ 和 $u_i$ 不同，则各个行波势可单独处理，即各行波势的贡献是各自独立的，没有交叉项. 此时系统的定向流为

$$\langle \dot{x} \rangle = \sum_i u_i \left[ \int_0^{L_i} \frac{V_i^2(x)}{L_i(k_BT)^2} dx - \frac{\alpha_i}{\alpha_i - 1} \int_0^{L_i} \frac{dx}{L_i} \int_x^{x+L_i} \frac{dy}{L_i} \frac{V_i(x)V_i(y)}{(k_BT)^2} e^{\frac{\alpha_i(y-x)}{L_i}} \right], \quad (5.2.19)$$

其中 $\alpha_i = \eta u_i L_i / k_BT$. 上式要求 $|V_i(x)/k_BT| \ll 1$.

对于正弦行波势：

$$V(x,f(t)) = \sum_i A_i \sin\{2\pi(x-u_it)/L + \phi_i\}, \quad (5.2.20)$$

我们有

$$\langle \dot{x} \rangle = \frac{1}{2(k_BT)^2} \sum_i u_i A_i^2 \{1 + (L_i u_i \eta / 2\pi k_BT)^2\}^{-1}. \quad (5.2.21)$$

另外还有行波势与静态势混合、涨落势与行波势混合等更为复杂的情况，在此不再一一讨论.

### 5.2.2 倾斜棘齿系统的定向输运

我们现在考虑含时外力为加性的情况：

$$\eta \dot{x}(t) = -V'(x(t)) + y(t) + \xi(t), \quad (5.2.22)$$

这里的 $y(t)$ 为无偏置（$< y(t) > = 0$）的周期力或平稳随机力. 按照前面的分析，倾斜棘齿系统的定向运动可由 $V(x)$ 的空间对称性破缺或 $y(t)$ 的时间对称性破缺来达到. 下面的讨论将会涉及这两种情况.

最简单的情况是 $y(t)$ 随时间的变化非常缓慢时的输运行为，此时在任一给定时刻 $t$，粒子流都可用常外力作用下的 Smoluchowski-Feynman 棘齿来描述，即 $F = y(t)$. 在这种绝热近似下，系统的非定态问题可化为定态问题处理，时间 $t$ 此时起着参数的作用. 对周期驱动 $y(t+T_0) = y(t)$，系统的平均定向流为

$$\langle \dot{x} \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} v(y(y)) dt, \quad (5.2.23)$$

这里 $v(y(t))$ 为 $t$ 时刻外力 $F = y(t)$ 时的粒子流：

$$v(y) = \frac{Lk_BT(1 - e^{-Ly(t)/k_BT})}{\eta \int_0^L dx \int_x^{x+L} dz e^{[V(z)-V(x)-(z-x)y]/k_BT}}. \quad (5.2.24)$$

在低温 $T\to 0$ 的极限下,我们有:

$$v(y,T=0)=\begin{cases}\dfrac{\eta L}{\displaystyle\int_0^L\frac{\mathrm{d}x}{y-V'(x)}}, & y\neq V'(x)(\text{对所有 }x)\text{ 时},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases} \tag{5.2.25}$$

由此可见,即使在没有热噪声 $\xi(t)$的情况下,我们也可能观察到非零的定向流.当 $T$ 很小时,对于 $y\neq V'(x)$的情况上述结果只有稍微的改变.当存在 $x$ 使 $y=V'(x)$时,令 $x_{\min}$ 为势 $V(x)-xy$ 在$[x_{\min}-L,x_{\min}]$间有极小 $x$ 值,$x_{\max}$ 为 $V(x)-xy$在$[x_{\max}-L,x_{\max}]$间有极大 $x$ 值,则在小噪声下 $v(y)$可用 Kramers 逃逸率给出:

$$\begin{aligned}v(y)&=L[k_+-k_-]\\&=\frac{L\sqrt{V''(x_{\max})V''(x_{\min})}}{2\pi\eta}(1-\mathrm{e}^{-yL/k_BT})\mathrm{e}^{-\Delta V(y)/k_BT},\end{aligned} \tag{5.2.26}$$

这里

$$\Delta V(y)=V(x_{\max})-V(x_{\min})-(x_{\max}-x_{\min})y. \tag{5.2.27}$$

此结果在 $k_BT\ll\Delta V(y)$和 $k_BT\ll\Delta V(y)-yL$ 时有效.

如果 $y(t)$是一个随机变量,且具有较长的关联时间 $\tau$:

$$\tau=\left[\int_{-\infty}^{\infty}\langle y(t)y(0)\rangle\mathrm{d}t\right]\Big/[2\langle y^2(t)\rangle], \tag{5.2.28}$$

则上面的绝热近似仍然有效,定向流为

$$\langle\dot{x}\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}v(y)\rho(y)\mathrm{d}y, \tag{5.2.29}$$

这里 $\rho(y)$是噪声的分布.

当 $y(t)$快速变化时,研究表明在低阶近似下$\langle\dot{x}\rangle=0$,高阶的近似则依赖于 $y(t)$的具体特点.如果 $y(t)$是随机变量,快速变化意味着关联时间 $\tau$ 很小,以 $\tau$ 为展开参量作近似,到一阶近似,$y(t)$可认为是高斯白噪声,系统可回到传统的 Smoluchowski-Feynman 棘齿系统,因而$\langle\dot{x}\rangle=0$.周期变化的 $y(t)$有类似情形.

同脉动棘齿的输运行为相比,对倾斜棘齿来说,通常在慢变倾斜的极限下可以观察到有限的定向流,而前者在慢变与快变的极限下的定向流为零;另外,对涨落力棘齿和摇摆棘齿而言,定向流的"自然"方向由较平坦势的斜率符号决定,而我们看到涨落力棘齿(脉动棘齿的一种)的定向流方向判定刚好与此相反;第三,对于倾斜棘齿来说,热涨落并非不可缺少的,只要倾斜力 $y(t)$足够大,则我们就可能观察到定向流,而涨落势棘齿必须借助于噪声方可实现定向运动.当然,行波势棘齿(脉冲棘齿的一种)也可以不需噪声的支持.但正如前面讨论的,

从某种变换意义上说，行波势棘齿实际上可化为倾斜棘齿.

倾斜棘齿的各种复杂情形也得到详尽的研究，它在超导材料、分子泵等实验方面也被观察到并得到应用.有兴趣的读者可参阅 Reimann 近期的综述[482]，此处不再一一列举.

## 5.3　确定性定向输运

布朗马达的定向输运是在热噪声作用下产生的.热噪声的无序能量可以通过系统对称性的破缺在非线性作用下转化为有序的定向运动，这反映了噪声的积极作用.另一方面，我们在前面的讨论也看到，如果系统的非对称性在非线性条件下，则噪声有时并不起主导作用.我们把在没有噪声时产生的定向输运系统称为确定性棘齿系统，相应的过程称为确定性定向输运.确定性输运可以由自身结构对称破缺而产生，也可由外加周期力(无偏置)的时间对称破缺而产生.对于耦合的棘齿系统来说，确定性输运可以由耦合的对称破缺产生，也可由外加周期力的空间对称破缺而产生.本节中我们着重讨论单粒子的确定性定向输运行为.

在单粒子定向输运的研究中，人们更多地关注于系统的非线性动力学如混沌轨道、信号、周期轨道等在输运中所起的作用.特别是，当系统有混沌时，混沌是否扮演着噪声作用？混沌驱动与一般的噪声驱动有何相同和不同点？一个研究较多的情形是前面一直未涉及的惯性效应，即在系统动力学方程保留惯性项对系统定向输运所带来的影响.这些都是本节将涉及的内容.

### 5.3.1　惯性马达与时空对称破缺

我们考虑下面的周期驱动系统：

$$\ddot{x}+\gamma\dot{x}+f(x)+E(t)=0, \tag{5.3.1}$$

这里 $f(x)=U'(x)$，$U'(x)$为周期 $2\pi$ 的外势，$E(t)$是周期力，$T=2\pi/\omega$，作用于粒子的力平均为零，即$\langle f(x)\rangle=\langle E(t)\rangle=0$.这个方程中包含惯性项，当 $\gamma=0$ 或很小时，惯性项起着重要作用.上述方程代表一大类系统，它在力学、电学、超导等相当多的物理体系中都得到了充分的讨论.以前的研究大多集中于 $f(t)$，$E(t)$只是简谐函数的情况.Flach 等人于 2000 年指出，系统对称性的降低可以导致非零的定向流[525].我们下面分保守和小耗散两种情况进行讨论.

一、保守情况($\gamma=0$)

当 $\gamma=0$ 时，上述方程代表周期冲击的哈密顿系统.在大速度极限下，即当 $|\dot{x}|\gg1$时，外势的 $f(x)$项可忽略，因而系统有解

$$x(t)=x_0+p_0t+\int_0^t\int_0^{t'}E(t'')\mathrm{d}t''\mathrm{d}t', \tag{5.3.2}$$

其时间一阶导数是有界的.为了描写系统(5.3.1)的对称性,我们必须考虑那些通过 $x,t$ 的变换使得系统动量(或速度)$p=\dot{x}$ 改变符号的变换,它包括$(x,t)\to(-x,t+\tau)$(空间反演,时间平移)和$(x,t)\to(x+x',-t)$(空间平移,时间反演).我们先考虑这两种变换对 $f(x)$ 和 $E(t)$ 的影响.$f(x)$ 和 $E(t)$ 都是周期的,因此它们可用傅里叶级数展开:

$$f(x)=\sum_k f_k e^{ikx},E(t)=\sum_k E_k e^{i\omega kt}. \tag{5.3.3}$$

$f(x)$ 和 $E(t)$ 的平均为零,说明 $f_0=E_0=0$;二者均为实变量,说明 $f_k=f^*_{-k},E_k=E^*_{-k}$.如果存在 $X$ 使得 $f(x+X)=-f(-x+X)$,则 $f(x)$ 是反对称的,此时我们称 $f(x)$ 具有 $\hat{f}_a$ **对称性**;若存在 $\tau$ 使得 $E(t+\tau)=E(-t+\tau)$,则 $E(t)$ 是对称的,我们称 $E(t)$ 具有 $\hat{E}_s$ **对称性**;若 $E(t)=-E(t+T/2)$,则有 $E_{2k}=0$,我们称 $E(t)$ **具有** $\hat{E}_{sh}$ **对称性**.

下面我们定义方程(5.3.1)的两种重要对称性.若 $f(x)$ 具有 $\hat{f}_a$ 对称性且 $E(t)$ 具有 $\hat{E}_{sh}$ 对称性,则方程(5.3.1)在变换

$$\hat{S}_a:\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-x+2X\\t+\dfrac{T}{2}\end{pmatrix} \tag{5.3.4}$$

下保持形式不变,我们称系统具有 $\hat{S}_a$ **对称性**.另一种对称性是:若 $E(t)$ 具有 $\hat{E}_s$ 对称性,则方程(5.3.1)在变换

$$\hat{S}_b:t\to(-t+2\tau) \tag{5.3.5}$$

下具有不变性,我们称系统具有 $\hat{S}_b$ **对称性**.这两个对称性的重要性在于:给定系统以初始条件$(x(t_0;x_0,p_0)=x_0,p(t_0;x_0,p_0)=p_0)$出发的一条轨迹 $x(t;x_0,p_0),p(t;x_0,p_0)$,在对称变换 $\hat{S}_{a,b}$ 下我们可以得到系统新的轨道,即

$$\hat{S}_a:\quad -x(t+T/2;x_0,p_0)+2X,-p(t+T/2;x_0,p_0), \tag{5.3.6a}$$

$$\hat{S}_b:\quad x(-t+2\tau;x_0,p_0),-p(-t+2\tau;x_0,p_0). \tag{5.3.6b}$$

可以看到变换后的新轨道动量 $p$ 与原轨道动量符号相反,这使得原轨道对应的平均速度(时间平均)与新轨道的平均速度符号相反.至于产生新轨道的变换,还有更多的其他对称操作,但这些操作都不改变 $p$ 的符号.

当 $\gamma=0$ 时,动力学系统(5.3.1)的运动既有准周期解、周期解,也有处于随机层中的混沌轨道.假设系统在随机层 $S_L$ 中是遍历的,则沿其中所有轨道的平均速度都是相同的.对随机层内的轨道进行 $\hat{S}_a$ 和 $\hat{S}_b$ 操作仍将得到随机层中的轨

道.由于上面提到的 $\hat{S}_{a,b}$ 操作的速度变号特点,因此这实际上表明沿随机层 $S_L$ 中任何一条轨道的时间平均速度都为零,即

$$\langle p \rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T p(t;x_0,p_0)\mathrm{d}t = 0,(x_0,p_0)\in S_L. \tag{5.3.7}$$

一旦 $\hat{S}_a$ 或 $\hat{S}_b$ 的对称性破缺,上面的结果不再成立,我们就会观察到非零的平均速度.对称性破缺导致的非零速度与初始条件无关,但其符号取决于对称破缺的方式.系统的动力学表现为反常输运(Lévy 飞行),当系统在左右两方向的 Lévy 飞行出现非对称化时,系统就会出现上述的非零流.

现在我们考虑一个具体的情况:

$$U(x) = -\cos x,$$
$$E(t) = E_1\cos\omega t + E_2\cos(2\omega t+\alpha), \tag{5.3.8}$$

我们考虑准周期运动区.当 $E_1=0$ 或 $E_2=0$ 时,可以验证系统满足 $\hat{S}_a$ 对称性;当 $\alpha=0,\pi$ 或者 $E_1=0$ 或者 $E_2=0$ 时,系统都满足 $\hat{S}_b$ 对称性.考虑 $p_0\gg1,\omega\gg p_0$ 的情况($p_0$ 为初始速度),我们可把 $x(t)$ 分成快变和慢变两部分,其中快变量可以认为是一个小量:

$$x(t) = x_s(t) + \xi(t). \tag{5.3.9}$$

将其代入方程(5.3.1),按 $\xi(t)$ 展开且保留线性项,我们有

$$\ddot{x}_s + \ddot{\xi} - \sin x_s - (\cos x_s)\xi + E(t) = 0. \tag{5.3.10}$$

对快变量部分,我们有

$$\ddot{\xi} - (\cos x_s)\xi + E(t) = 0. \tag{5.3.11}$$

由于快慢尺度分离,在此方程中我们实际是认为 $x_s$ 不变(在 $\xi$ 的时间尺度内),这样可得到方程的解为

$$\xi(t) = A_1\cos\omega t + A_2\cos(2\omega t+\alpha), \tag{5.3.12}$$

即解的形式与外力 $E(t)$ 相同,而系数为

$$A_1 = -\frac{E_1}{\omega^2-\cos x_s}, A_2 = -\frac{E_2}{4\omega^2-\cos x_s}. \tag{5.3.13}$$

对快变量平均,从方程(5.3.1)我们可以得到

$$\ddot{x}_s - \sin x_s = 0. \tag{5.3.14}$$

系统的初始条件为

$$x_0 = x_s(t_0) + \xi(t_0), p_0 = \dot{x}_s(t_0) + \dot{\xi}(t_0). \tag{5.3.15}$$

系统的平均速度由 $\dot{x}_s$ 决定:

$$\langle p \rangle = \langle \dot{x}_s(t) \rangle. \tag{5.3.16}$$

因此问题的关键是求 $\langle \dot{x}_s(t) \rangle$.对于 $p_0\gg1$,可以用 $p_0^{-1}$ 作近似展开,并保留最

低非零项.计算过程我们不再详述,最后可得到近似解

$$\langle p \rangle = \langle \dot{x}_s(t) \rangle = -\frac{25\sqrt{2}}{32}\frac{1}{p_0^{\,6}}\frac{E_1^{\,2}E_2}{\omega^2}\sin\alpha, \qquad (5.3.17)$$

这个结果与前面的对称性分析完全一致.可以看到,当 $E_1=0$ 或 $E_2=0$ 或 $\alpha=0,\pi$ 时,我们有 $\langle p \rangle=0$.这恰好对应于系统的 $\hat{S}_a$,$\hat{S}_b$ 对称性.当这两个对称性不能满足时,则有 $E_{1,2}\neq 0$,$\sin\alpha\neq 0$,$\langle p \rangle\neq 0$,系统存在非零的定向流.

在图 5-4 中,我们可以看到系统在不同情况下轨道 $x(t)$ 的演化.这里相关参量及具体函数为 $\gamma=0$,$f(x)=\cos x+v_2\cos\left(2x+\frac{2}{5}\right)$,$E(t)=E_1\sin\omega t+E_2\sin\left(2\omega t+\frac{7}{10}\right)$,$\omega=2.4$.对曲线(1),$v_2=0$,$E_1=2.3$,$E_2=0$,系统满足 $\hat{S}_a$ 与 $\hat{S}_b$ 对称性,可以看到 $x$ 在长时间内都没有增长或减小,平均定向流为零.而曲线(2)、(3)、(4)都破坏了 $\hat{S}_a$,$\hat{S}_b$ 对称性,$x(t)$ 有非零的斜率,因而有非零的平均速度.

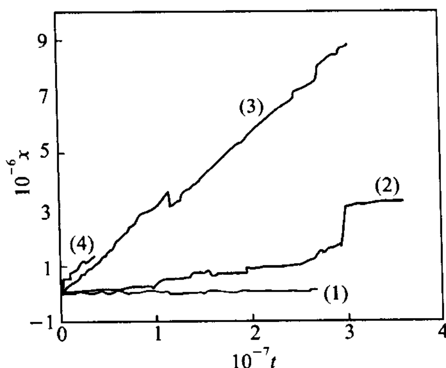



图 5-4 保守系统在不同情况下轨道 $x(t)$ 的演化

二、小耗散情况($\gamma=1$)

对小的 $\gamma$,系统不再是哈密顿的,系统的相空间会分成低维吸引子的不同吸引盆.这些吸引子一般是周期轨道或极取限环,哈密顿系统的随机层在小耗散下变成相空间中复杂的暂态部分,在这里不同极限环的吸引域以复杂的方式交织在一起.在耗散情况下,$\hat{S}_b$ 的对称性不再保持,只有 $\hat{S}_a$ 还可以保持.

我们现在来考虑 $\hat{S}_a$ 对称满足的情况.设我们可以找到下面的极限环:

$$x(t+T)=x(t)+2\pi m, \qquad (5.3.18)$$
$$p(t+T)=p(t), \quad m\in\mathbf{Z},$$

由于外场 $E(t)$ 的周期性，我们有 $T=2\pi n/\omega, n\in\mathbf{Z}$，则在此极限环上平均速度为

$$\langle p\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T \dot{x}(t)\mathrm{d}t=\frac{m}{n}\omega. \tag{5.3.19}$$

由于 $\hat{S}_a$ 对称性，我们还同样可以找到 $\langle p\rangle=-m\omega/n$ 的极限环. 另外，对称性还表明两个对称相交极限环的吸引域是等价的. 当 $\hat{S}_a$ 对称性破缺时，这两个极限环仍存在，但二者不再有明显的对称性. 对称性的破缺也说明了两个吸引域的去对称化. 这样，当 $\hat{S}_a$ 对称性满足时，系统的平均速度在对初始条件(相空间)平均后为零；而去对称化则会导致非零的定向流. 图 5-5 给出了当 $f(x), E(t)$ 与图(5-4)的模拟相同时(但参数不同)的平均速度 $\langle p\rangle$ 随时间的演化(对初始条件进行了平均). 曲线(1)是当 $v_2=E_2=0$($\hat{S}_a$ 对称满足)时的结果，可以看到 $\langle p\rangle=0$；曲线(2)给出的是当 $v_2=0.6, E_2=-5.23$ 时的结果，$\langle p\rangle$ 趋于一个非零的稳定值，说明定向流的存在.

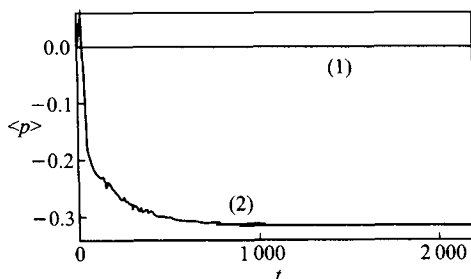



图 5-5 小耗散情况下平均速度 $\langle p\rangle$ 随时间的演化

### 5.3.2 惯性马达的规则输运与混沌输运

前面我们看到，惯性马达在系统对称破缺时会产生非零的定向流. 当考虑惯性项时，在周期力作用下，系统会出现混沌运动. 混沌(微观动力学)对输运行为有什么影响[526~535]？1996 年，Jung 等讨论了下面的系统[526]：

$$M\ddot{x}(t)+\dot{x}(t)+V'_\mu(x)=A\sin(\Omega t), \tag{5.3.20}$$

其中 $M$ 为约化质量，$A, \Omega$ 为周期力的幅度和频率，周期力是对称的. 外势为棘齿势：

$$V_\mu(x)=-\sin x-\mu\sin 2x, \tag{5.3.21}$$

通常选 $\mu=1/4$. $V_\mu(x)$ 的形状如图 5-2 所示.

在过阻尼极限下($M\to 0$)，惯性项可以忽略. 此时系统也可以存在确定性定向运动. 系统存在一个 $A_0(\Omega)$，当 $A<A_0(\Omega)$ 时，振动有界，无定向流；当 $A>$

$A_0(\Omega)$时,系统有非零定向流.运动速度为

$$v(n,m)=\frac{x(t+nt)-x(t)}{nT}=\frac{m}{n}\Omega(m,n\in\mathbf{Z}). \tag{5.3.22}$$

当 $M\neq0$ 且惯性项不能忽略时,系统的轨迹可以是混沌的,也可以是规则的.规则轨道可以由

$$x(t+nT)=x(t)+2\pi m, \tag{5.3.23}$$

描述.它可分为两类,一类是 $m=0$ 的周期轨道,称为无输运轨道,$v(n,m)=0$.另一类是 $m\neq0$ 的规则轨道,称为输运轨道.与过阻尼相比,惯性马达在规则周期轨道上的输运方向与初始条件有关,$m=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

对混沌轨道而言,系统总存在非零的定向输运,此时 $A$ 不一定要克服 $A_0(\Omega)$的阈值,小的 $A$ 就可能引起定向运动.混沌吸引子可以用$(x,\dot{x})$的截面图显示出来,这里 $x$ 是取 $2\pi$ 模的值,即 $x(t)\to x(t)(\mathrm{mod}2\pi)$.对于上面的模型来说,混沌吸引子只有一个.为考察混沌的特点,可以引进含时概率分布.给定初始的概率分布 $\rho_0(x,\dot{x})$,其演化为

$$\rho(x,\dot{x},t)=\int\mathrm{d}x'\int\mathrm{d}\dot{x}\delta(x-x_d(x',\dot{x}',t))\delta(\dot{x}-\dot{x}_d(x',\dot{x}',t))\rho_0(x',\dot{x}'). \tag{5.3.24}$$

这里 $\dot{x}_d(x',\dot{x}',t)$是运动方程以 $x_d(t=0)=x'$,$\dot{x}_d(t=0)=\dot{x}'$为初始条件的混沌解.在图 5-6(a)中,不同曲线给出的是不同时刻约化分布 $\bar{\rho}(x,t)=\int\mathrm{d}\dot{x}\rho(x,\dot{x},t)$ 的情况,这里 $A=0.79$,$\Omega=0.1$,$M=20$.初始位置分布为 $\dot{x}(t=0)=0$ 的宽度为 1/2 的高斯分布.可以看到 $\rho(\bar{x},t)$基本保持高斯形式,但逐渐弥散开.通过变换 $x\to x/\sqrt{t}$可以看到在图(5-6)(b)中不同时刻的 $\bar{\rho}(x,t)$完全

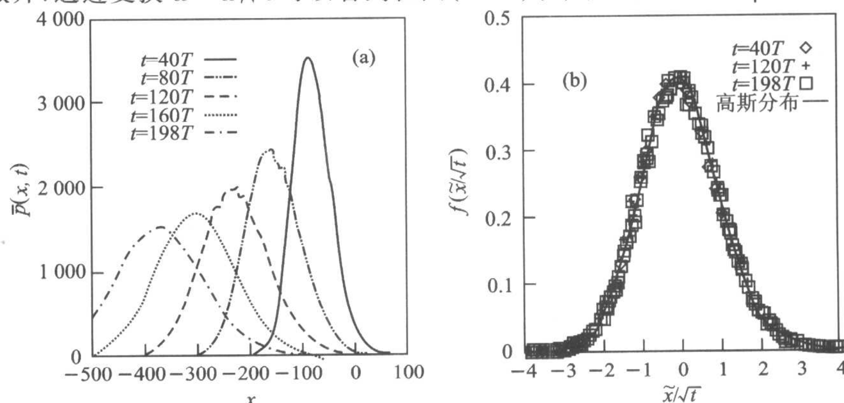



图 5-6 (a) 不同时刻的约化分布;(b) 通过变换的不同时刻的分布,完全与高斯分布重合

与高斯分布重合，说明$(\Delta x)^2 \propto t$，这与典型的自由布朗运动完全一致．因而混沌信号此时就可扮演着热噪声的作用．由于有“热噪声”，我们可以不必用很大的力$A\sin \Omega t$就可以实现定向运动．在实际观察中运动速度$v$随$A$，$\Omega$的变化会表现出复杂的行为．另外，系统的输运行为还敏感地依赖于粒子的有效质量$M$（或阻尼系数$\sim M^{-1}$）．

在惯性马达运动中还会出现一种称为反向定向流（或称为流逆转）的现象，即定向流与棘齿势自然走向恰好相反，$v<0$．Mateos于2000年研究了与Jung相同系统的反向流问题[532]．图5－7是其核心结果，(a)是系统随力的幅度$A$变化时的动力学分岔图．可以看到大片的混沌区、周期窗口和激变（混沌吸引子尺寸的突然变化）；图(b)计算了相应的定向流的变化．两个图的对照清楚地显示出在倍周期分岔的窗口处$v<0$．因此，他们的结论是：流的逆转来自于一个由混沌向周期区的分岔．在这个分岔点附近，系统的混沌是阵发性质的，输运行为表现

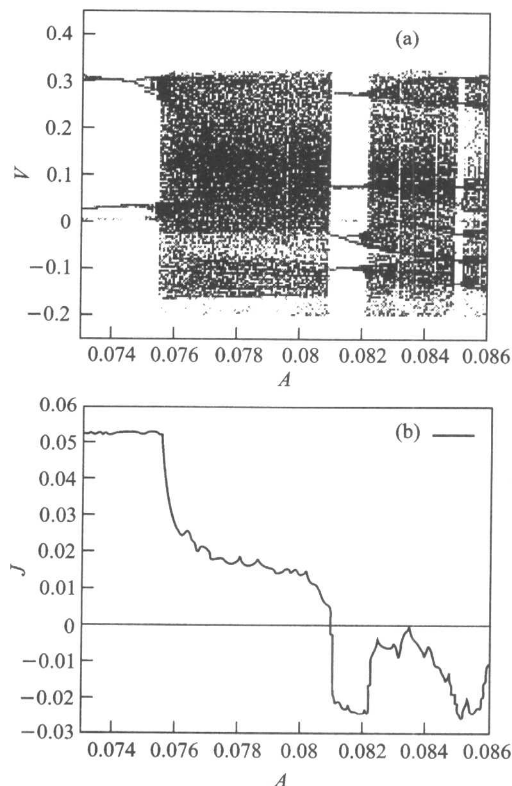



图5－7 (a) 系统随$A$变化的动力学分岔图；(b) 相应的定向流的变化

为反常扩散.这个结果在几个月后就由 Barbi 和 Salerno 提出了质疑[533].他们发现在没有从混沌向周期运动的分岔时同样可观察到定向流的逆转.他们认为逆向流的产生是由于周期的转子解(即 $x(t)$随时间不断增加或减小)不同的稳定特性造成的.但这个问题的解释目前仍然不太清楚,值得进一步研究[534].

最近,Borromeo 等人研究了改变系统阻尼系数导致的扩散输运问题[535].他们用了同样的模型,只是惯性质量为 $M=1$,而保留阻尼系数:

$$\ddot{x} = -r\dot{x} - V'(x) + A_0 \sin \Omega t, \tag{5.3.25}$$

其中

$$V(x) = -\frac{1}{k}\left(\sin kx + \frac{1}{4}\sin 2kx\right). \tag{5.3.26}$$

计算中若使用 $k=\pi/2$,则周期势的周期为 $L=4$;相应的,在势阱底部的振荡频率为 $\omega_0 = \sqrt{k\sqrt{3\sqrt{3}/2}} \approx 1.591$.使粒子发生定向运动的周期力振幅 $A_0$ 的阈值可由倾斜势 $U(x)=V(x)\mp x|A_0|$来确定.可以得到,在区间$(A_1,A_2)=\left(\frac{3}{4},\frac{3}{2}\right)$内系统会发生定向运动,如图 5-8 中的小图所示.此时周期力的频率 $\Omega$ 选得足够小,因此 $A_1,A_2$ 与 $\Omega$ 几乎无关.

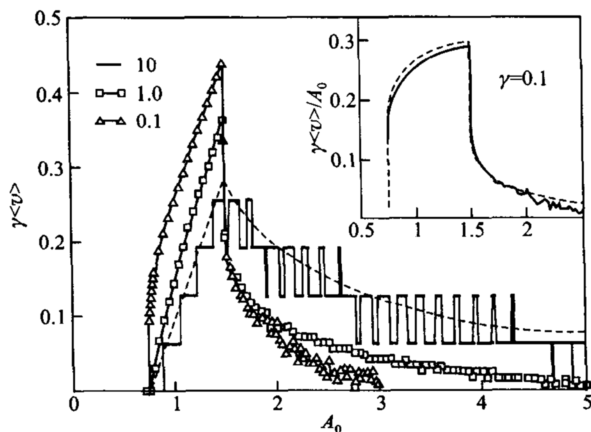



图 5-8 共振台阶曲线,虚线是理论预测线

在绝热极限下,$\Omega \ll \omega_0$、$\gamma$,$\langle v\rangle$是分立的(共振台阶),台阶间隔为 $\Delta v = L/T_\Omega$,即在一个力的周期 $T_\Omega = 2\pi/\Omega$ 内粒子运动恰好经历势场的一个周期 $L$.共振台阶见图 5-8 中 $\gamma=10$ 的曲线.虚线是理论预测线.在大 $\gamma$ 极限,$\langle v\rangle$在 $A_0 \geqslant A_1 = \frac{3}{4}$时随 $A_0$ 的增加而线性增加,当$\langle v\rangle$达到最大值$(A_2-A_1)^2/2\gamma$ 时,

$\langle v\rangle$随 $A_0$ 的继续增加而减小,趋于零. 当 $\gamma$ 减小时,有定向流的 $A_0$ 区间会变窄,且$\langle v\rangle\propto\gamma^{-1}$. 另外,在第一个阈值 $A_0=A_1$ 处定向流的变化是很陡的,而在 $A_0>A_2$ 时的变化是连续的.

$\gamma\langle v\rangle$与 $A_0$ 的变化关系可以解析讨论. 当 $A_1<A<A_2$ 时,粒子向右边运动,速度是 $v(t)=A_0\sin(\Omega t+\phi)/\gamma$,这里 $\phi=-\arctan(\Omega/\gamma)$是绝热相滞后. 在这个区间,粒子运动的平均定向流为

$$\frac{\gamma\langle v\rangle}{A_0}\equiv\mu(A_0,A_1)=\frac{1}{2\pi}\{\sqrt{1-(A_1/A_0)^2}+1\}. \tag{5.3.27}$$

可以看到上述表达式右边不含 $\gamma$,说明随 $\gamma$ 的减小,在$(A_1,A_2)$区间系统的定向流表现出$\langle v\rangle\propto\gamma^{-1}$的普适行为,这在 $\gamma/\omega_0\to 0$ 极限下是准确的. 当 $A_0>A_2$ 时,系统的平均定向流为(推导过程从略):

$$\frac{\gamma\langle v\rangle}{A_0}=\mu(A_0,A_1)-\mu(A_0,A_2). \tag{5.3.28}$$

当 $\gamma<0.07$ 时,系统的定向流行为出现多稳性,即对应于同一个 $A_0$ 值可以有多个不同的$\langle v\rangle$值. 图 5-9 给出了 $\gamma\langle v\rangle$与 $A_0$ 的关系,我们可以观察到多重的$\langle v\rangle\sim A_0$ 曲线. 这些曲线中有很多的共振曲线 1: $m$,其中 1:1 对应于式子(5.3.27)的曲线. 图中还标出了 1:2,1:3 和 1:4 的曲线,可以看到理论曲线与数值模拟完全一致.

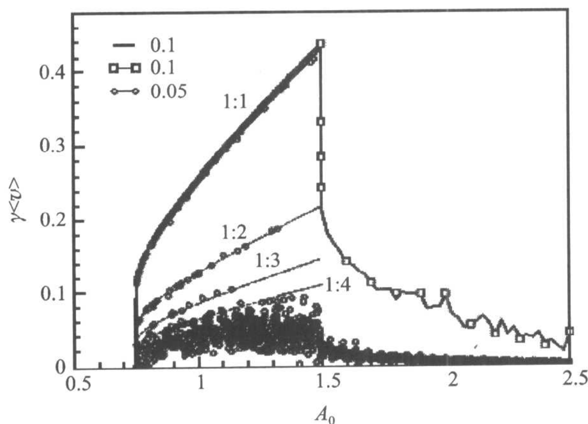



图 5-9 $\gamma\langle v\rangle$与 $A_0$ 的关系曲线

### 5.3.3 混沌信号驱动下的定向输运

在前一节我们讨论了系统运动中混沌的噪声特点. 这里的混沌是系统内禀的. 对于定向马达运动来说,噪声一般是外部加入的,即所谓的外噪声. 本节我们

讨论利用一个混沌信号(平均无偏置)驱动下在周期势中运动的粒子的输运性质.

一个较早的工作是 1995 年 Hondou 与 Sawada 进行的[536].他们考虑了如下的动力学方程:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial V}{\partial x}+\sum_{j=-\infty}^{\infty}\xi_j(t-j), \tag{5.3.29}$$

其中 $V(x)=V_0(x)+ax$,$V_0(x)$是一个周期势,$a$ 是一个偏置(直流力).上面方程描述了一个过阻尼粒子在倾斜周期场中受到周期性冲击的行为.这里 $\xi_j$ 为在 $t=j$ 时力的大小,设$\{\xi_j\}$是一个混沌序列.我们可以考虑对称的 $V_0(x)=V_0(-x)$:

$$V_0(x)=h-\frac{h}{L}|x(\mathrm{mod}(2L))-L|,\quad x\geqslant 0, \tag{5.3.30}$$

其中 $L,h$ 为常数.上述的周期脉冲冲击方程可用下面的分立方程来代替:

$$x_{n+1}=x_n-\left.\frac{\partial V_0}{\partial x}\right|_{x=x_n}+\xi_n,\quad n=0,1,2,\cdots \tag{5.3.31}$$

$V_0(x)$的曲线如图 5-10 所示,可以看到当 $a\neq 0$ 时 $V_0(x)$是一个上倾的周期势.混沌序列$\{\xi_n\}$作用于系统上,其平均为零,即$\langle\xi_n\rangle=N^{-1}\sum\limits_{i=1}^{N}\xi_i=0$.我们下面用帐篷映射或 Bernouli 移位变换作为驱动混沌信号:

$$\xi_n=-\eta_n,$$

$$\eta_{n+1}=f(\eta_n)=\begin{cases}-2|\eta_n|+\dfrac{1}{2}, & \text{帐篷映射,}\\[2ex] 2\eta_n-\dfrac{1}{2}\mathrm{sgn}(\eta_n), & \text{Bernoulli 映射,}\end{cases} \tag{5.3.32}$$

sgn(.)为一符号函数.这两个映射的共同特点是:它们都是遍历的 $K$ 系统,且具有不变分布 $\rho(\eta)=1,\eta\in(-1/2,1/2)$.这与均匀分布于$(-1/2,1/2)$的随机数具有相同的分布函数.在无外势即 $V(x)=0$ 时,粒子的运动是无漂移的布朗运动.另外,可以验证,帐篷映射的关联函数是 $\delta$ 函数.这都与完全随机噪声(白噪声)是相同的.

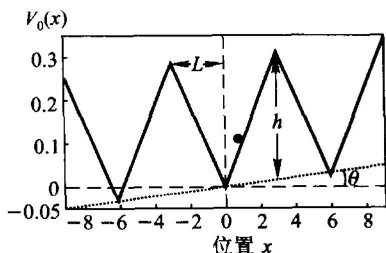


图 5-10 周期势 $V_0(x)$曲线

从这些分析来看,似乎可以认为上面两种混沌信号对系统输运的影响应与随机噪声的作用一致.当粒子处于图 5-10 的势场中时,在混沌信号作用下,由于直流力的存在,它应该会向负方向运动,即$\langle v\rangle<0$.但令人意外的是,模拟的结果恰恰与这个猜测相反.图5-11

给出了当 $a=0.005, L=3, h=0.3$ 时用随机力和帐篷映射驱动的运动演化. 在随机力作用下, $x_n$ 单调减小(粒子沿直流力的方向运动), 而在混沌信号作用下粒子运动方向则相反, 即粒子可以逆着倾斜势的方向运动! 即使在当 $a=0$ 时, 粒子在对称周期势中本来没有优先的运动方向, 但在混沌噪声下仍可发生对称破缺的单向运动. 我们要问: 造成这种相反结果的原因是什么呢?

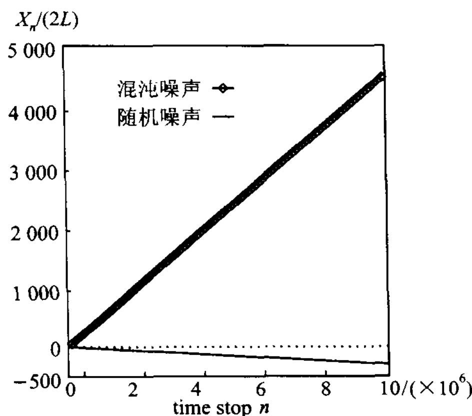



图 5－11　随机力和帐篷映射驱动下系统的运动演化

要搞清楚这种反常的结果, 就必须认真分析混沌作为噪声源的动力学特征, 因为只有潜藏于混沌中的相干性才可能推动粒子"逆流而上". 观察中我们可以发现粒子在混沌噪声的作用下主要处于势阱底部附近. 因此粒子需要受到噪声向一个方向持续的冲击才会跃过势垒. 这个条件在混沌噪声演化处于不稳定不动点附近时可以满足. 注入的混沌噪声离不稳定不动点 $\eta_0$ 越近, 则 $\eta$ 会在 $\eta_0$ 附近逗留越长时间, 形成对粒子的持续冲击. 通过计算混沌噪声处于 $\eta_0$ 附近足够长时间的概率, 我们可计算出粒子的跃迁概率, 它是势场斜率 $\Lambda=h/L$ 的函数:

$$P_{tr}(L)\sim\Lambda^{-L/|\eta_0|}. \tag{5.3.33}$$

对于帐篷映射和 Bernoulli 映射来说, $\Lambda=2$. 图 5－12 给出了粒子在不同噪声下的跃迁概率, 最上面的是帐篷映射的理论与数值结果, 中间是 Bernoulli 映射的结果, 最下面是随机噪声的结果. 可以看到完全随机噪声具有最小的跃迁概率, 而两种映射对应的跃迁概率都比完全随机噪声要大得多. 另外, $P_{tr}\sim L$ 的行为也与理论预测完全一致. 当混沌力具有非对称的不稳定不动点分布时, 粒子在其驱动下的运动对称性也会被打破.

上面的分析已经揭示了在混沌噪声下系统运动的对称破缺性质. 对帐篷映射来说, 在粒子正方向力对应的不动点为 $|\eta_0|=1/2$, 在负方向的力对应的不动

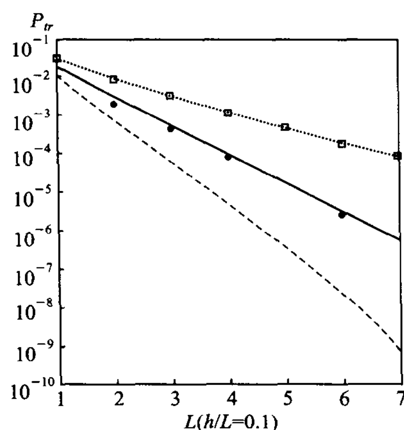



图 5-12 粒子在不同噪声下的跃迁概率 $P_{tr}\sim L$ 的行为

点为 $|\eta_0|=1/6$(注意:作用于粒子上的力 $\xi_n=-\eta_n$),如图 5-13 所示.由上面跃迁概率的表达式,$P_{tr}^{+}\gg P_{tr}^{-}$,即粒子向正方向跃迁的概率远远大于负方向的概率.因而尽管有一个负的小偏置,粒子仍可以向正方向运动.图 5-13(a)给出帐篷映射的一个典型序列和不稳定不动点,可以看到映射在 $\eta_0=-0.5$ 附近实际上存在长时间的阵发,它造成了混沌噪声的相干行为,从而导致反常的非对称输运.图 5-13(b)画出的 Bernoulli 映射不动点附近的阵发轨道.当然 Bernoulli 映射的行为与帐篷映射有所不同,它有自身的"重注入"机制,即由不稳定不动点 $\eta_0=-1/2$ 附近出发的混沌噪声会在阵发迭代后又重新回到 $\eta_0$ 附近,这使得 Bernoulli 映射具有更强的相干行为,因而其 $P_{tr}(L)$ 大于同样的帐篷映射的值(见图 5-12 的曲线).

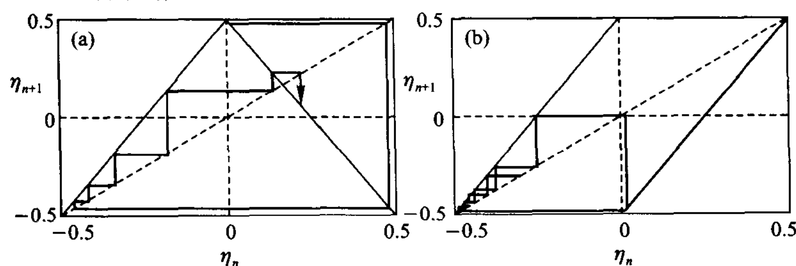



图 5-13 (a) 帐篷映射的一个典型序列和不稳定不动点;(b)Bernoulli 映射不动点附近的阵发轨道

混沌噪声相干行为导致的对称破缺运动反映出混沌信号与完全噪声内在的不同，尽管它们可能在分布、期望值和方差（二阶矩）上可能完全一致，但这并不说明二者会完全一样[537]．当混沌噪声的随机性增加（即系统的李指数或KS熵增加）时，其性质会与完全随机噪声逐渐接近．例如，当我们用

$$\eta_{n+1} = f^N(\eta_n), (N > 1) \tag{5.3.34}$$

作为噪声源时，其随机性就会大于 $N = 1$（即前面讨论的情况），其中 $f^N = \overbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}^{N}$．图5－14给出了不同 $N$ 时 $x_n$ 的演化，可以看到当 $N \geqslant 3$ 时，$x_n$ 随时间增加而单调减小；当 $N$ 继续增加时，系统的输运行为逐渐接近完全随机噪声的情况．这很容易理解．实际上，对于映射(5.3.34)，其最大李指数 $\lambda = N\ln 2 = N\lambda_0$，其中 $\lambda_0 = \ln 2$ 为单重迭代映射的李指数．$N \to \infty$ 时，$\lambda \to \infty$，相邻迭代的关联消失，混沌信号会逐渐完全随机化．

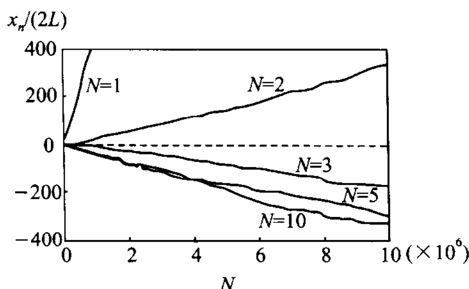



图5－14　混沌噪声驱动下不同 $N$ 时 $x_n$ 的演化

### 5.3.4　对称势中的确定性输运：一个可解模型

本节中我们通过一个简单的模型可以很好地说明在没有噪声的情况下通过周期力的时间对称破缺也可以导致定向运动[538,539]．为了方便，我们讨论耗散的情况：

$$\dot{x} + d\sin x = F(t) + \xi(t). \tag{5.3.35}$$

上式中 $V'(x) = \mathrm{d}V(x)/\mathrm{d}x = d\sin x$，$V(x)$ 为对称的周期势，$d$ 为势垒高度．$\xi(t)$ 为高斯白噪声：

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = D\delta(t - t'), \tag{5.3.36}$$

$D$ 为噪声强度．$F(t)$ 为非对称的确定性周期外力，它满足：

$$\begin{matrix} F(t+T) = F(t), \\ F(t) \neq F(-t), \end{matrix} \quad F(t \pm T/2) \neq -F(t), \tag{5.3.37}$$

并且 $F(t)$ 的时间平均为零：

$$\int_t^{t+T} F(t')\mathrm{d}t' = 0. \tag{5.3.38}$$

我们可以选择最简单的 $F(t)$的形式(分段的常外力):

$$F(t)=\begin{cases} F_+, & t\in[nT, nT+t_0), \\ -F_-, & t\in[nT+t_0,(n+1)T), n\in\mathbf{Z}, \end{cases} \tag{5.3.39}$$

这里 $F_- = \frac{1-\delta}{1+\delta}F_+$, $t_0 = \frac{1-\delta}{2}T$,以使得 $F(t)$的时间平均为零. $\delta\in(-1,1)$是一个测度 $F(t)$偏离对称力($\delta=0$)的因子. 我们计算系统的平均流:$J=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \dot{x}(t)\mathrm{d}t$. 当 $J>0(<0)$时,系统就存在正(负)的定向流. 由于 $J(-\delta)=-J(\delta)$,我们只需讨论 $\delta>0$(即 $F_+>F_-$)的情形. 我们先讨论 $D=0$(无噪声)的情况. 我们可以看到系统存在定向流. 当 $d=0$ 和 $d\gg1$ 时,系统的平均流都为零. 对于中等的 $d$ 和恰当的周期力频率,如在图 5-15(a)中,$F_+=1.5$, $T=120$, $\delta=1/5$($F_-=1.0$, $t_0=48$),可以看到 $x(t)$随时间变化而增加,说明系统可以有非零的定向流. 对于小的 $d$,如 $d=0.5$,虽然粒子在正方向和负方向上都可以跃过势垒,但一个正方向的总流仍可以看到. 随着 $d$ 的增加,当 $d=0.9<F_-$ 时,$J$ 也增加. 当 $d=1.0=F_-$ 时,粒子向负方向的运动被完全抑制,运动只发生于正方向;当 $d=1.25>F_-$ 时,运动在正方向的运动也受到抑制,因此 $J$ 随 $d$ 的增加而减小,当 $d>F_+=1.5$ 时,粒子被钉扎,$J=0$.

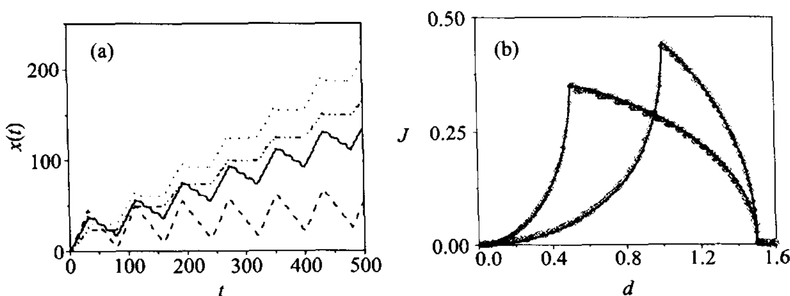



图 5-15 (a) 不同 $d$ 下 $x(t)$随时间的演化;(b) $\delta=1/5$ 和 1/2、$T=500$ 时的数值结果,实线为理论曲线

当外力的周期很长 $T\to\infty$时,我们可以给出粒子定向流的解析表达式. 在一个周期 $T$ 中,粒子经历了在正方向的运动 $x_+=J_+t_0$ 和负方向的运动 $x_-=J_-(T-t_0)$. 粒子的总流为

$$J=\frac{x_+-x_-}{T}. \tag{5.3.40}$$

当 $d<F_-$ 时，粒子在两个方向上的流均存在：

$$J_{\pm}=\sqrt{F_{\pm}^2-d^2}; \tag{5.3.41}$$

当 $F_-<d<F_+$ 时，粒子仅在正方向上有流存在，即：

$$J_+=\sqrt{F_+^2-d^2}, J_-=0. \tag{5.3.42}$$

当 $F>F_+$ 时，$J_{\pm}=0$. 注意到 $t_0$，$F_-$ 与 $F_+$ 的关系，将 $J_{\pm}$ 代入 $x_{\pm}(t)$ 的表达式并代入(5.3.40)中，可得到

$$J_{\infty}=\begin{cases}\frac{1}{2}\{(1-\delta)\sqrt{F_+^2-d^2}-\sqrt{[(1-\delta)F_+]^2-[(1+\delta)d]^2}\}, & d<\frac{1-\delta}{1+\delta}F_+,\\ \frac{1}{2}(1-\delta)\sqrt{F_+^2-d^2}, & d\in\left[\frac{1-\delta}{1+\delta}F_+,F_+\right),\\ 0, & d\geqslant F_+.\end{cases} \tag{5.3.43}$$

在图 5－15(b)中，我们给出 $\delta=1/5$ 和 $1/2$、$T=500$ 时的数值结果，可以看到它们与理论曲线符合得非常好.

在图 5－16(a)－(c)，我们给出了 $d=0.5, 1.0$ 和 $1.4$ 时的 $J-T$ 关系. 可以看到二者的关系是非单调，不连续的. 当 $d$ 较小时，$J-T$ 关系既依赖于 $F_+$ 又依赖于 $F_-$. 当 $d>F_-$ 时，曲线分成一些片段. 所有这些片段都可用

$$J=2\pi M/T \qquad (M\in N) \tag{5.3.44}$$

来拟合. 由 $M=0(J=0)$ 向 $M=1$ 的跃迁发生在 $T_c$，即存在临界的周期 $T_c$ 使系统出现定向流. 对 $d\in(F_-,F_+)$，这个临界 $T_c$ 很容易确定：

$$T_c=\frac{4\pi}{(1-\delta)\sqrt{F_+^2-d^2}}. \tag{5.3.45}$$

在图(5－16)(d)中，可以看到理论线与模拟结果符合得很好.

由 $M-1$ 线向 $M$ 线的跃迁发生在 $T=MT_c$. 对于大 $T$，$J-T$ 曲线的各个上界为

$$J_{up}{}^M=2\pi/T_c=J_{\infty}, \tag{5.3.46a}$$

下界为

$$J_{down}{}^M=\frac{2\pi M}{(M+1)T_c}=\frac{M}{M+1}J_{\infty}. \tag{5.4.46b}$$

显然当 $M\to\infty$，$J_{down}{}^M\to J_{up}{}^M=J_{\infty}$. 在图(5－16)(b)和(c)上界与下界线用虚线给出，可以看到在 $M$ 较大时与数值结果符合得很好.

上述关系实际反映出在 $T$ 有限时的共振行为. 显然 $d>F_-$ 时，$J_{\infty}$ 是 $J(d)$ 共振台阶的左边界. 在 $d<F_-$ 时 $J(d)$ 仍有一系列台阶. 这些台阶来自于两个方向跃迁的竞争：

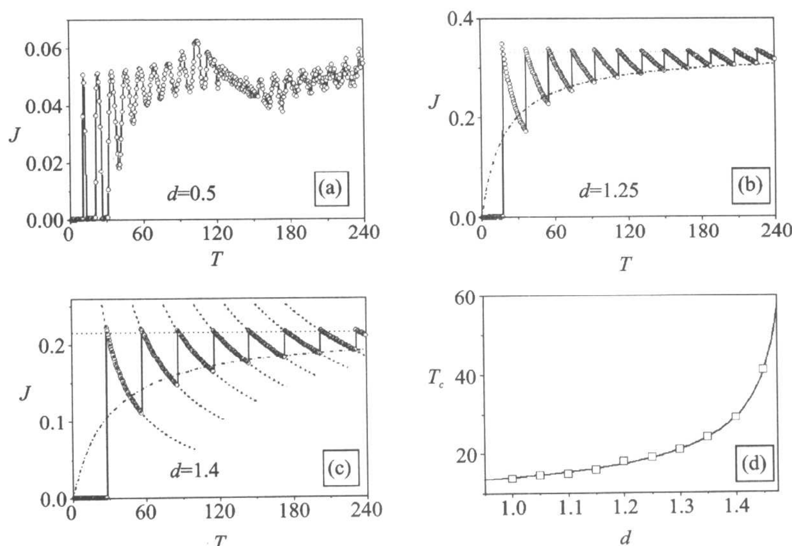



图 5－16 (a)－(c) $d=0.5,1.0$ 和 $1.4$ 时的 $J-T$ 关系；
(d) 理论线与模拟结果对照

$$J=\frac{2\pi M}{T}=\frac{2\pi(M_{+}-M_{-})}{T}, \tag{5.3.47}$$

其中 $M_{\pm}$ 为在一个周期内粒子在正(负)方向上跃过的势阱数目.因此可用 $(M_{+},M_{-})$ 这个整数对来描述第 $M$ 个共振台阶.这些台阶的宽度可以确定.当 $d>F_{-}$ 时,由于粒子只在正方向有跃迁,故 $M_{-}=0$,台阶为 $(M,0)$.其宽度为

$$\sqrt{F_{+}-\left[\frac{4\pi(M+1)}{(1-\delta)T}\right]^{2}}<d\leqslant\sqrt{F_{+}{}^{2}-\left[\frac{4\pi M}{(1-\delta)T}\right]^{2}}. \tag{5.3.48}$$

当 $d\leqslant F_{-}$ 时,粒子在正负两个方向的 $2\pi$ 跃迁都会发生.第 $M$ 个台阶由 $(M_{+},M_{-})$ 给定.类似上面讨论,$M$ 台阶由两个带

$$\sqrt{F_{\pm}{}^{2}-\left[\frac{4\pi(M_{\pm}-1)}{(1\mp\delta)T}\right]^{2}}<d\leqslant\sqrt{F_{+}{}^{2}-\left[\frac{4\pi M_{\pm}}{(1\mp\delta)T}\right]^{2}} \tag{5.3.49}$$

的交集给出.在图 5－17 中,我们给出了在 $T-d$ 平面上的台阶分布,其中实线代表由 $d_{+}(M_{-})=\sqrt{F_{+}{}^{2}-\left[\frac{4\pi M_{+}}{(1-\delta)T}\right]^{2}}$ 确定的边界,虚线代表 $d_{-}(M_{-})=\sqrt{F_{-}{}^{2}-\left[\frac{4\pi M_{-}}{(1+\delta)T}\right]^{2}}$ 确定的边界.由四条线 $d_{\pm}(M_{\pm})$,$d_{\pm}(M_{\pm}+1)$ 围起的区域为 $M=M_{+}-M_{-}$ 台阶,当 $d>F_{-}$ 时,M 台阶只由 $d_{+}(M_{+})$ 和 $d_{+}(M_{+}+1)$

围起的区域给出.同一个 $M$ 台阶含有多个区域.可以看到,理论线与数值结果符合得很好.

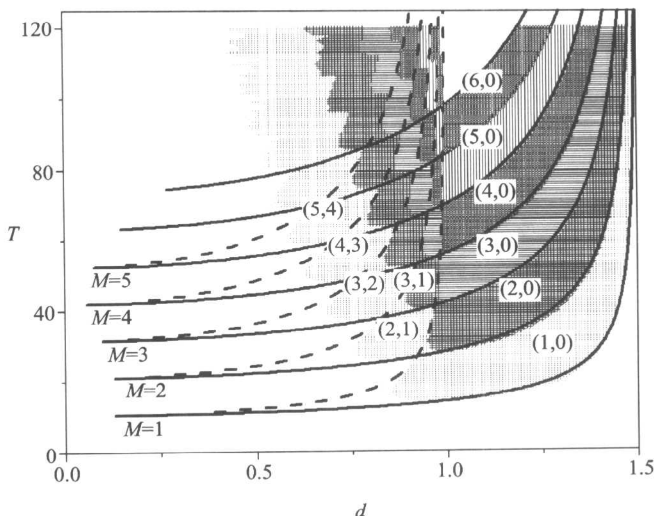



图 5－17　$T-d$ 平面上的台阶分布

上面考虑的是由于周期力对称破缺而产生的定向输运行为.当 $D\neq 0$ 时,如果粒子的弛豫时间 $\tau \ll T$,问题也可以解析处理[539].考虑方程(5.3.35)的Fokker-Planck方程:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\{[F(t)-d\sin x]P(x,t)\}+D\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}. \tag{5.3.50}$$

由于 $F(t)$是周期力,因此上述方程无定态解.设系统在交流力两个方向上的弛豫时间为 $\tau_{1,2}$,当 $\tau_{1,2}\ll T$ 时,在直流力片段的作用时间尺度内系统可以足够快地弛豫到平衡态附近.这样上面的 Fokker－Planck 方程就可以分解成为两部分:

$$\frac{\partial P_{\pm}(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}[(F_{\pm}-d\sin x)P_{\pm}(x,t)]+D\frac{\partial^2 P_{\pm}(x,t)}{\partial x^2}. \tag{5.3.51}$$

由于这两个方程的平衡态特点,我们可以求解其定态解 $P_{\pm}(x)$,然后计算在两个直流片段上的平均速度 $J_{\pm}=\langle\dot{x}\rangle_{\pm}$.系统总的流为

$$J=\frac{1}{2}[(1-\delta)J_{+}-(1+\delta)J_{-}]. \tag{5.3.52}$$

由于在倾斜周期场中的布朗运动已完全解决,我们这里不再详述其过程(参考第一章),我们有:

$$J_{\pm}=\frac{2\pi D[1-\exp(-2\pi F_{\pm}/D)]}{\Delta_{\pm}\Lambda_{\pm}-[1-\exp(-2\pi F_{\pm}/D)]\Pi_{\pm}},\tag{5.3.53}$$

其中

$$\Delta_{\pm}=\int_0^{2\pi}\exp[V_{\pm}(x)/D]\mathrm{d}x,\tag{5.3.54a}$$

$$\Lambda_{\pm}=\int_0^{2\pi}\exp[-V_{\pm}(x)/D]\mathrm{d}x,\tag{5.3.54b}$$

$$\Pi_{\pm}=\int_0^{2\pi}\exp[-V_{\pm}(x)/D]\int_0^{x}\exp[V_{\pm}(x')/D]\mathrm{d}x'\mathrm{d}x,\tag{5.3.54c}$$

这里 $V_{\pm}(x)$为系统的总势：

$$V_{\pm}(x)=d\cos x-F_{\pm}x.\tag{5.3.55}$$

图 5－18 给出了结果(5.3.53)在 $\delta=0.5,d=1.0,F=0.5,0.75$ 和 0.9 时的 $J(D)$曲线，可以看到 $J$ 与 $D$ 之间的类似随机共振的曲线，说明噪声可以导致定向输运，而且存在最佳的噪声强度 $D_0$ 使得粒子有最大的定向流．最佳噪声强度可由$\frac{\partial J}{\partial D}=0$ 定出．

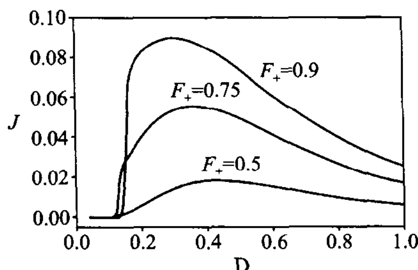



图 5－18　不同 $F$ 时的$J(D)$曲线

# 5.4　棘齿势中的合作定向输运

从本节开始我们讨论有相互作用情况下的合作定向输运问题．时空非线性系统的时空动力学和控制问题已成为最近二十几年的研究热点，而其输运行为的研究在最近十年内也成为人们关注的课题．对于布朗马达的合作输运问题，其实验背景来自于不同学科．首先，在生物分子马达研究方面，人们发现许多稍大的分子马达实际有其复杂的内部结构，它经常是由多个自由度构成的特殊结构(如双头和多头肌动蛋白马达)；另外，当多个分子马达在输运过程中的相互作用也反过来会影响定向输运[540～548]．其次，在物理方面，对耦合的约瑟夫森结阵列

和线型超导约瑟夫森结的实验研究也成功实现了棘齿输运[549~552]，这意味着它们在揭示耦合布朗马达运动及应用等方面可以发挥巨大作用；合作输运行为在纳米材料方面也得到了研究和应用，如量子点体系、细小颗粒体系等.

合作定向输运研究从耦合的作用来看可分为两类：一类是单个的马达系统耦合起来后的合作效应，另一类则纯粹是由于耦合与其他因素相结合而产生的定向输运.这前者可以以前面的单个马达动力学为基础，讨论的较多；后者则必须通过对系统整体的细致分析、综合考察才可以揭示其合作定向输运行为.这里我们以周期势是否为棘齿势为基础来讨论，因而本节的棘齿势输运和下节的对称势输运都是合作定向输运的具体反映.

### 5.4.1　一维硬球系统在棘齿势中的合作定向输运

这种情形是由 Derenyi 和 Vicsek 于 1995 年讨论的[553].他们讨论的实验依据一方面来自于生物学.实验证据表明：几个马达蛋白可以合作运载更大的分子；另外，很多的自由马达可以沿同一微管运动，它们的相互作用对其马达运动有明显的影响[554~556].另一方面，在细小颗粒分离过程中，大量粒子可以在同一媒质中运动，因而有必要考虑集体效应.

考虑下面的一维情况.设有许多相互作用的布朗马达，它们通过硬核作用构成一维硬球马达系统.单个粒子的运动可由下面的朗之万方程描述：

$$\dot{x}_j = f(x_j) + F_j(t) + \xi_j(t), \quad j = 1, 2, \cdots, N, \tag{5.4.1}$$

$x_j$ 表示第 $j$ 个粒子质心的位置. $f(x) = -V'(x)$, $V(x) = V(x+1)$ 为单位周期的棘齿周期势，设为如图(5－19)所示的非对称锯齿势. $F_j(t)$ 为作用于第 $j$ 个粒子上的确定性驱动力，$\langle F_j(t)\rangle = 0$. $\xi_j(t)$ 为高斯白噪声：$\langle \xi(t)\rangle = 0$，$\langle \xi_i(t)\xi_j(t')\rangle = 2k_B T\delta_{i,j}\delta(t-t')$.粒子之间的硬核相互作用在过阻尼情况下意味着在运动过程中粒子不允许重叠和换位.我们考虑粒子是有限大小的，尺寸为 $b$，设系统的尺寸(即周期数目)为 $L$.因此，整个系统存在两个空间尺度：粒子尺寸和周期势的周期 1.二者的竞争可以导致复杂的输运行为.

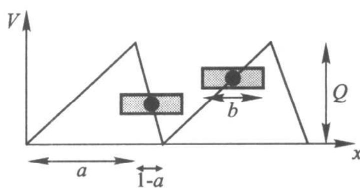


图 5－19　非对称锯齿势 $V(x)$

图 5－20(a)给出了当 $F_j(t) = A\cos(\omega_j t)$ 时不同粒子数密度 $\rho = Nb/L$（或称为覆盖率 $\rho \in [0,1]$）时系统的平均定向流 $v = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} v_j$ 随频率 $\omega$ 的变化关系.这里 $\omega_j = \omega + \delta\omega_j$，$|\delta\omega_j| \ll \omega$.系统的参数 $b = 0.5$，$T = 1$，$A = 32$，非对称周期势 $a = 0.8$（见图 5－19 的周期势），势垒高度 $Q = 4$.在小图中给出的是粒子流 $J = Nv/L$ 与平均覆盖率 $\rho$ 的关系（$\omega = 175$）.可以看到复杂的频率行为，而且

$v(\omega)$曲线随$\rho$的改变表现出明显不同的特点.在低频区系统有较大的定向流,在中等频率系统可以出现反向流,在高频区系统的定向运动则发生钉扎.小图的$J(\rho)$曲线反映出系统定向流随覆盖率改变的复杂依赖性.

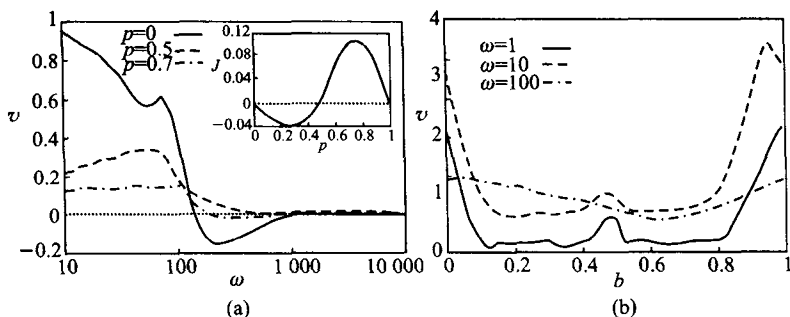



图 5-20 (a) 周期驱动时不同$\rho$下$v$与频率$\omega$的关系;
(b) $v$与粒子尺寸$b$的关系

图 5-20(b)给出了粒子定向流与粒子尺寸的关系.很容易验证$v(b+k)=v(k)$,$k\in \mathbf{Z}$,因此只需考虑$b\in[0,1]$的变化情况.$b$实际反映的是粒子尺度与周期势周期1的竞争.可以看到,在$b\approx 0,1$附近粒子的定向流最大,而在$b\leqslant 1/2$处$v$出现一个小的峰.对某些$\omega$值,还可以在$\omega=1/3,2/3$甚至其他有理数处出现局域小峰.上面$v$与$b$的复杂依赖性可通过讨论$F_j(t)=F$驱动下系统的动力学来理解,这里$F\leqslant Q$.我们可以先定性分析一下系统的定向输运特点及输运速度的粒子尺寸依赖性.当$b<1$(周期势周期),我们考虑两个处于相邻势阱内的粒子.由于粒子的硬核作用,第二个粒子只有在第一个粒子跳出其势阱后第二个粒子方可以进入这个势阱.这种阻碍效应使得系统的平均运动速度小于单个粒子的速度.图 5-21(a)中画出了$N=15$个粒子($b<1$)的运动情况.我们可以看到"空穴"类型的运动,它来自于阻碍效应导致的"交通拥堵".在一维格点系统中,这种"拥堵"现象是经常发生的.现在考虑$b$略大于1的情况,且两个粒子处于相邻的势阱内.但由于$b>1$,它们的质心不能同时处于阱底.这就造成了粒子1更容易定向运动,第二个粒子实际间接地助长了粒子1的运动.此时,尽管仍有阻碍效应,系统的平均速度仍会大于单个粒子的运动速度.图(b)画的是$N=12$个($b\geqslant 1$)的粒子的时空演化.系统很少发生阻塞,粒子的阻碍效应现在成为推动效应,使得系统整体运动有较高的效率.

下面我们定量分析一下定向输运的尺寸效应.相邻粒子的平均距离为

$$d=\frac{L}{N}-b. \tag{5.4.2}$$

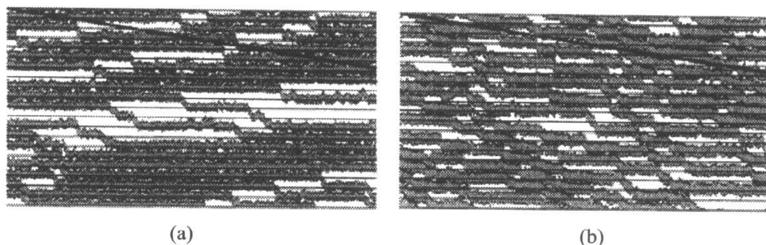



图 5-21　(a) $N=15$ 个粒子($b<1$)的运动情况；
(b) $N=12$ 个($b\geqslant1$)粒子的时空演化

图 5-22(a)显示了在 $F_j(t)=F=Q=4$ 时系统平均定向流与 $b$ 的关系，$a=0.2$，$T=1.0$. 当 $d\to\infty$ 时，粒子的尺寸效应可忽略，系统运动相当于单粒子情形，在图中是一条水平线. 当 $d$ 减小时，$v$ 开始依赖于粒子的尺寸，$v(b)$ 曲线出现多重的谷和峰值. 在 $b<1$ 的附近 $v$ 小于单粒子的速度，在 $b>0$ 附近由于 $v(b+1)=v(b)$(与 $b>1$ 附近相同)，$v$ 大于单粒子速度. 这与前面的定性分析一致. 当 $d$ 继续减小，$v(b)$ 曲线的峰和谷越来越多，特别可以看到在 $b=\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3}$ 等附近的谷. 这说明在小 $d$ 的极限下，系统运动存在公度性效应，这是系统空间尺度竞争的后果.

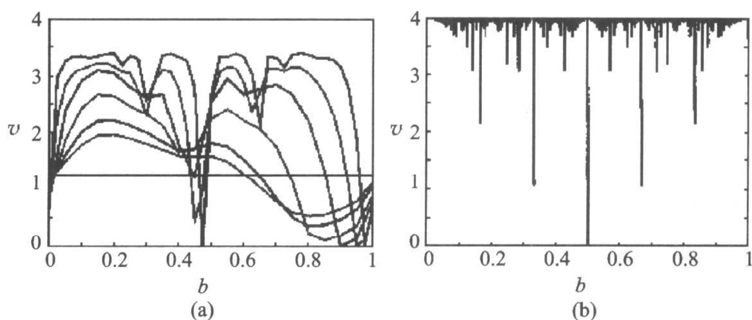



图 5-22　(a) 在 $F_j(t)=F=Q=4$ 时平均定向流与 $b$ 的关系；
(b) $d\to0$ 时的 $v(b)$ 曲线

对于现在的系统，如果 $b+d=\frac{L}{N}=\frac{n}{m}(n,m\in\mathbf{N})$，我们就说系统的结构是公度的. 这种结构等价于单个粒子在等效的锯齿势中的运动. 这个锯齿势的周期和斜坡长度为

$$\lambda' = \frac{1}{m}, \lambda'_1 = \frac{\{ma\}}{m}, \lambda'_2 = \frac{\{m(1-a)\}}{m}. \tag{5.4.3}$$

势垒的高度为 $Na'$,其中

$$Q' = Q\,\frac{\{ma\}\{m(1-a)\}}{mam(1-a)}. \tag{5.4.4}$$

这里的$\{\cdot\}$表示对括号中的值取小数部分,即$\{X\} = X - \mathrm{int}(X)\,(X>0)$. 其他量相应地为:

$$F' = F, T' = \frac{T}{N}. \tag{5.4.5}$$

单粒子在锯齿势中的布朗马达运动已由 Magnasco 研究过. 对于常外力 $F$,

$$v(f) = \frac{P_2^2 \sin(\lambda F/2k_B T)}{k_B T(\lambda/Q)^2\{\cosh[(Q-\Delta F/2)/k_B T] - \cosh(\lambda F/2k_B T)\} - \frac{\lambda}{Q}P_1 P_2 \sinh\left(\frac{\lambda F}{2k_B T}\right)}, \tag{5.4.6}$$

其中 cosh, sinh 为双曲余弦和正弦函数,$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ 是周期势的周期,$\Delta = \lambda_1 - \lambda_2$,$P_{1,2}$为

$$P_1 = \Delta + \frac{\lambda^2 - \Delta^2}{4}\frac{F}{Q}, P_2 = \left[1 - \frac{\Delta F}{2Q}\right]^2 - \left[\frac{\lambda F}{2Q}\right]^2. \tag{5.4.7}$$

在上面的量中,这里需要把前面带撇的量代入.

如果 $F_j(t) = A\sin\omega t$ 是一个缓变的周期力,则系统的定向流为

$$v = \frac{1}{T}\int_0^T v(F(t))\mathrm{d}t, \qquad T = 2\pi/\omega, \tag{5.4.8}$$

继续回到我们目前的讨论. 上面讨论的是公度结构的情形,若结构是公度的且 $d \ll 1$,则 $m, n \to \infty$, $Q', \lambda_{1,2}' \to 0$. 系统的相应修正势(即 $Q'$, $\lambda'_{1,2}$, $\lambda'$等)几乎是平的,即系统有连续平移的对称性(类似于前面讨论的 Frenkel - Kontorova 系统),因而系统可以以最大的运动速度 $v_{\max} = F$ 运动.

上面的公度性效应在 $d \to 0$(即 $b = L/N$,粒子间距为零)时表现的最为强烈. 在图(5 - 22)(b)中画出的是在 $d \to 0$ 时的 $v(b)$曲线. 可以看到曲线是不连续的,在所有的 $b = \frac{L}{N} = \frac{n}{m}$为有理数处 $v$ 都是最小,而是 $b$ 为无理数的地方 $v = v_{\max} = F = 4$, $v(b)$曲线表现出处处不连续的分形结构.

硬球系统的定向输运问题可推广到二维甚至三维空间. 在高维情况下,硬球的硬核作用仍保持,但是禁跃规则不再成立,粒子可以绕过相邻粒子运动,这种禁跃的破坏将会导致新的效应. 这方面的研究尚未见到有关报道,值得进一步探讨.

### 5.4.2　一维硬球系统在闪烁势中的合作定向输运

闪烁势棘齿是分子马达研究中常用的一种模式,而以往人们研究的均是单个粒子在其中的输运过程.1996年,Derenyi 与 Ajdari 合作,研究了一维硬球在闪烁周期势中的输运问题[557].第 $j$ 个粒子的 Langevin 方程为

$$\dot{x}_j = -\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + \xi_j(t), \qquad j = 1,2,\cdots,N, \tag{5.4.9}$$

其中 $x_j$ 代表第 $j$ 个粒子的质心位置,$x_j(t)$ 为高斯白噪声,强度为 $k_bT$.粒子的尺度为 $b$,周期势是随时间周期变化的开关势:

$$V(x,t) = \begin{cases} V_{on}(x), & t \in (t_0, t_0 + \tau_{on}), \\ V_{off}(x) = 0, & t \in (t_0 + \tau_{on}, t_0 + \tau_{on} + \tau_{off}), \end{cases} \tag{5.4.10}$$

其中 $\tau_{on}$,$\tau_{off}$ 分别为势的开关时间.$V_{on}(x)$ 为如图(5-19)所示的锯齿势,参量与上一节相同.势的空间周期 $\lambda = 1$,粒子间作用仍与上一节相同,相邻粒子不允许重叠:$x_j - x_{j-1} > b$.下面仍然只需考虑 $b \in [0,1)$ 的情况.

给定粒子尺寸 $b$、个数 $N$ 和周期势的尺寸 $L$,粒子密度为 $\rho = bN/L$.在低密度和高密度极限,我们可进行一些解析讨论.另外,我们考虑钉扎势足够大,$Q \gg k_BT$,这样系统弛豫时间尺度与势的开关尺度就分离开来.另外,$\tau_{off}$ 也认为足够长,这样在此阶段内系统可以有足够时间摆脱初始条件依赖性(遗忘机制).因此,在一个开关周期中系统的平均位移就是在“开”时初始随机分布粒子的位移.

当 $\rho \to 0$ 时,一个具有在 $[-\lambda_2, \lambda_1]$ 区间随机初始位置的粒子在“关”相之后停留在 $x = 0$ 的位置.初始的平均位置为 $x = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)$.因此在一个开关周期中系统的平均移动为

$$\langle d \rangle = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{1}{2} - a. \tag{5.4.11}$$

在 $\rho \approx 1$ 时,类似于上一节,粒子尺寸与周期势的公度效应起着重要作用.我们下面作一简要分析.这里我们用 $\langle d \rangle$ 而不用 $v$,实际二者是等价的,因为 $v = \langle d \rangle / (\tau_{on} + \tau_{off})$.

考虑 $\rho = 1(L/N = b)$ 的极限,系统等价于一个尺度为 $L$ 的大粒子.现在考虑 $N \to \infty$ 的极限.在 $b = L/N$ 为无理数(非公度)时,粒子均匀地分布于各个周期中,因而整个系统几乎感受不到势垒的存在.这样,势的“开”和“关”对系统的输运没有大的影响.所以对于非公度情形:

$$\langle d \rangle = 0. \tag{5.4.12}$$

对于公度情形 $b = n/m$,$m$,$n$ 为不可约的整数,此时 $N$ 个粒子的系统可约化为单个尺寸为 $L$ 的粒子在“开”的有效势中的运动(前面已说明“开”阶段是决定性

的).约化的锯齿势参数为

$$\lambda' = 1/m,\ \lambda'_1 = \{ma\}/m,\ \lambda'_2 = \{m(1-a)\}/m, \tag{5.4.13}$$

势垒高度为 $NQ'$,其中

$$Q' = Q\,\frac{\{ma\}\{m(1-a)\}}{mam(1-a)}, \tag{5.4.14}$$

相应的涨落温度

$$T' = T/N, \tag{5.4.15}$$

因此容易看到 $NQ' \gg k_B T'$.上面的有效参数与上一节的基本相同.这样,利用单粒子(即前面 $\rho \to 0$)的结果,我们有

$$\langle d \rangle = \frac{1}{2}(\lambda'_2 - \lambda'_1) = \frac{1}{2m}(1 - 2\{ma\}). \tag{5.4.16}$$

图 5-23(a)-(c)给出了在 $N \to \infty$,$\rho \to 1$ 极限情况下$\langle d \rangle$(即粒子定向流)在不同非对称势参数 $a$ 下与粒子尺寸 $b$ 的关系.可以看到定向流表现出与上一节类似的复杂行为.它是非连续的,在有理数 $b$ 处是峰,在无理数 $b$ 时为零.随着 $a$ 的变化,我们既可以看到正的峰值,也可以看到负的峰值.

图 5-24 画出了$\langle d \rangle$与$\langle d \rangle/\tau_{off}$与粒子密度 $\rho$ 的关系.这里 $b=1/5$,$a=0.45$,$k_B T = 1$,$Q \gg 1$,$\tau_{on} \ll \tau_{off}$.因此系统定向流 $v \approx \langle d \rangle/\tau_{off}$.可以看到定向流与 $\rho$ 和 $\tau_{off}$ 复杂的依赖关系,图(a)中的实线为理论线.对于 $b = 1/m$,$m \in \mathbf{Z}$,定向运动可解析求解,但表达式非常繁杂,这里不再列出.

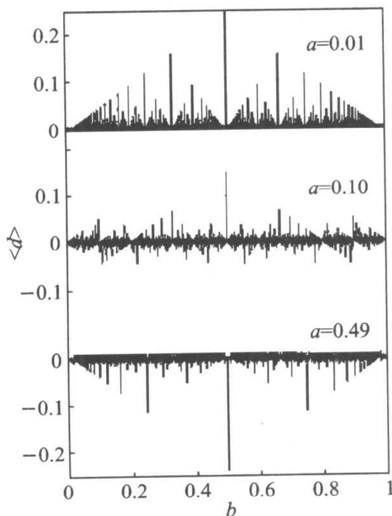



图 5-23 $N \to \infty$,$\rho \to 1$$\langle d \rangle$在不同 $a$ 下与 $b$ 的关系

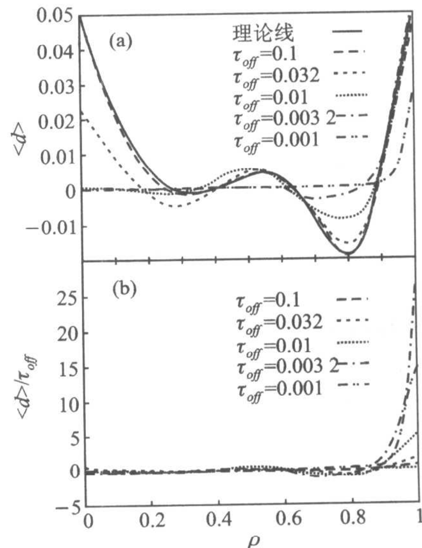



图 5-24 $\langle d \rangle$与$\langle d \rangle/\tau_{off}$与 $\rho$ 的关系

### 5.4.3 刚性耦合粒子系统的合作定向输运

在生物的若干实验中，研究者都观察到许多马达蛋白可以结合在一起来输运较大的物质.Julicher 和 Prost 引入了一个模型来描述这种系统的马达输运性质[558].他们的模型如图 5-25 所示，许多粒子处于周期的非对称棘齿势中，对每个粒子而言，这个锯齿势是独立闪烁(开关)的.这些粒子都附着在一个刚性棒上，它们的间距是固定的.这些粒子在棒上附着点的间距可以是随机的，也可以是等间距的.首先我们作一般性的讨论.我们下面来讨论这两种情形，其中对第二种情形，间距与外势的周期是非公度的.

首先我们作一般性的讨论.设粒子的间距为 $s$，则第 $i$ 个粒子的位置为 $\hat{x}_i = is + X$，其中 $X$ 为刚性棒的位置.每一个粒子可以处于一个强束缚态 $\sigma=1$ 或弱束缚态 $\sigma=2$.处于态 $\sigma$ 粒子的能量为周期势的势能 $W_\sigma(\hat{x}) = W_\sigma(\hat{x}+l)$，其中 $l$ 为周期.下面的讨论用循环坐标 $x=\hat{x}(\mathrm{mod}\,l)$来代替，因而 $x\in(0,l)$.我们用分布函数 $P(x,t)=\sum_{\sigma=1,2} P_\sigma(x,t)$来描述，其中 $P_\sigma(x,t)$为在时刻 $t$ 在位置 $x$ 处发现粒子处于态 $\sigma$ 的概率密度.在大 $N$ 极限下，如果马达的结构与外势是非公度的即 $l/s$ 为无理数，则 $P$ 趋于 $P(x,t)=1/l$.当粒子随机(均匀分布)附着于刚性棒上时，其分布也满足同样特点.

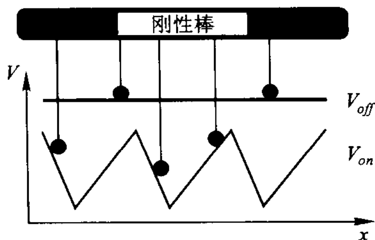



图 5-25 刚性耦合马达输运模型

我们可以写出系统的主方程：

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} + v\frac{\partial P_1}{\partial x} = -\omega_1(x)P_1 + \omega_2(x)P_2, \tag{5.4.17a}$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} + v\frac{\partial P_2}{\partial x} = \omega_1(x)P_1 - \omega_2(x)P_2, \tag{5.4.17b}$$

这里 $\omega_{1,2}(x)$代表 $\sigma=1,2$ 两态间的跃迁率.刚性棒的运动速度

$$v=\frac{\partial X}{\partial t} \tag{5.4.18}$$

是由关系

$$f_{ext} = \lambda_0 v - f \tag{5.4.19}$$

决定的，$f_{ext}$ 为作用于每一个粒子上的外加力，$\lambda_0 v$ 为阻尼系数是 $\lambda_0$ 的摩擦力，$f$ 为由外势提供的力：

$$f = -\int_0^l \left( P_1 \frac{\partial W_1}{\partial x} + P_2 \frac{\partial W_2}{\partial x} \right) \mathrm{d}x, \tag{5.4.20}$$

两个态 $\sigma = 1,2$ 间的跃迁率与热涨落和外界驱动有关：

$$\omega_1(x) = \omega_2(x) \mathrm{e}^{[W_1(x) - W_2(x)]/T} + \Omega\Theta(x), \tag{5.4.21}$$

$T$ 为温度. 热涨落使系统维持细致平衡，而后者作为外界驱动则破坏这种平衡. 当参量 $\Omega = 0$ 时，系统能维持细致平衡.

由于对非公度或无序情形 $P_1 + P_2 = P(x, t) = 1/l$，将其代入主方程有

$$v \frac{\partial P_1}{\partial x} = -[\omega_1(x) + \omega_2(x)] P_1 + \omega_2(x)/l. \tag{5.4.22}$$

要解此方程，可将其以 $v$ 作展开. 我们主要关心在相变点 $v = 0 \to v \neq 0$ 附近的情形，此时 $v$ 可视为小量：

$$P_1 = \sum_{n=0}^{\infty} v^n P_1^{(n)}, \tag{5.4.23}$$

这里

$$P_1^{(n)} = -\frac{1}{\omega_1 + \omega_2} \frac{\partial P_1^{(n-1)}}{\partial x}, \tag{5.4.24a}$$

且

$$P_1^{(0)} = \frac{\omega_2 l}{\omega_1 + \omega_2}, \tag{5.4.24b}$$

由此可以得到 $v$ 的方程：

$$f_{ext} - f_\Omega^{(0)} = (\lambda_0 + f_\Omega^{(1)}) v + \sum_{n=2}^{\infty} f_\Omega^{(n)} v^n, \tag{5.4.25a}$$

其中

$$f_\Omega^{(n)} = \int_0^l P_1^{(n)} \frac{\partial (W_1 - W_2)}{\partial x} \mathrm{d}x. \tag{5.4.25b}$$

在没有外来驱动($\Omega = 0$)时，系统保持细致平衡，$f_\Omega^{(0)} = 0$. $f_\Omega^{(1)} > 0$. 系统不会有自发的运动. 当细致平衡被破坏时($\Omega \neq 0$)，$f_\Omega^{(0)} \neq 0$，$f_\Omega^{(1)}$ 可以变负. 在一定程度($\Omega = \Omega_c$)，系统会出现自发对称破缺，因而会出现自发的定向运动. 为更好地理解，我们先考虑对称的周期势. 在 $f_{ext} = 0$ 时，对 $v$ 展开到 $v^3$，我们有

$$-(\lambda_0 + f_\Omega^{(1)})v = v^3 f_\Omega^{(3)} + O(v^5). \qquad (5.4.26)$$

如果 $\lambda_0 + f_\Omega^{(1)} > 0$，上面惟一的解(实解)为 $v=0$. 当 $\lambda_0 + f_\Omega^{(1)} < 0$ 时，系统会分岔出一对运动解：

$$v = \pm\sqrt{\frac{1}{f_\Omega^{(3)}}\frac{\partial f_{\Omega=\Omega_c}^{(1)}}{\partial \Omega}(\Omega - \Omega_c)}, \qquad (5.4.27)$$

这里 $\Omega_c$ 为临界外来驱动，使得 $\lambda_0 + f_{\Omega_c}^{(1)} = 0$. 当 $\Omega < \Omega_c$ 时，解 $v=0$ 是稳定的；当 $\Omega \geqslant \Omega_c$ 时，$v=0$ 的解失稳，$v \neq 0$ 的解以 $(\Omega-\Omega_c)^{1/2}$ 的方式分岔出来. 显然这种转变是一种非平衡相变，它意味着系统出现有序的合作定向输运. 图 5-26(a)给出了 $v$ 的转变. 这种相变行为可从图(b)的 $f_{ext}-v$ 关系看出来. 当 $\Omega > \Omega_c$ 时，曲线出现两个对称的局域极值. 这个图像类似于在顺磁-铁磁相变中加入磁场时的自发磁化行为.

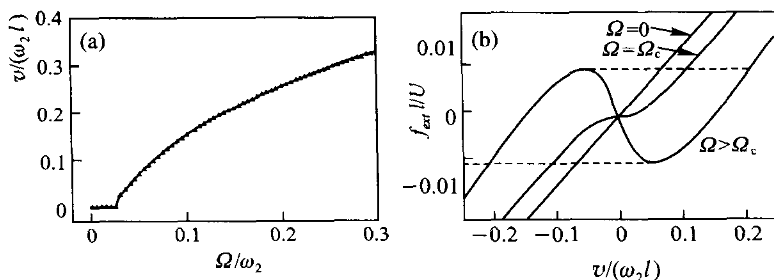



图 5-26　(a) $v$ 的转变；(b) $f_{ext}-v$ 关系曲线

上面的讨论是基于 $W_0(x)$ 为对称周期势的情况. 对非对称势而言，上面的相变仍会发生，一般情况下更接近气-液相变的行为. 在相变点 $v_c$，有下面的标度关系：

当 $\Omega = \Omega_c$ 时，

$$|v - v_c| \propto (f_{ext} - f_c)^{1/3}; \qquad (5.4.28a)$$

当 $f_{ext} = f_c$ 时，

$$|v - v_c| \propto (\Omega - \Omega_c)^{1/2}. \qquad (5.4.28b)$$

以图 5-25 的开关锯齿势为例. 假设 $\omega_2$ 为一常数，$T \ll U$，因而有 $\omega_2(x) = \Omega\Theta(x)$，热涨落可忽略. 图 5-27(a)中给出了 $\Omega=0, \Omega_c$ 及 $\Omega > \Omega_c$ 时的 $f_{ext}-v$ 相图. 当 $\Omega < \Omega_c$ 时，$v(f_{ext})$ 是一个单调增加的函数，有效阻尼系数 $\lambda \equiv \frac{\partial f_{ext}}{\partial v} > 0$. $\Omega = \Omega_c$ 时，在某一 $v \neq 0$ 处曲线出现拐点：$\frac{\partial f_{ext}}{\partial v} = \frac{\partial^2 f_{ext}}{\partial v^2} = 0$. 当 $\Omega > \Omega_c$ 时，

$v(f_{ext})$成为多值函数. 这个行为类似于范德瓦耳斯系统临界温度下等温线. 图(b)给出了 $f_{ext}=0$ 和 $f_{ext}<0$ 时的 $v(\Omega)$曲线. 当系统有负载时($f_{ext}<0$), 我们可以看到多稳性, 系统还会出现反向输运. 当考虑热涨落时, 系统仍存在相变的临界点, 但它随温度的变化而改变.

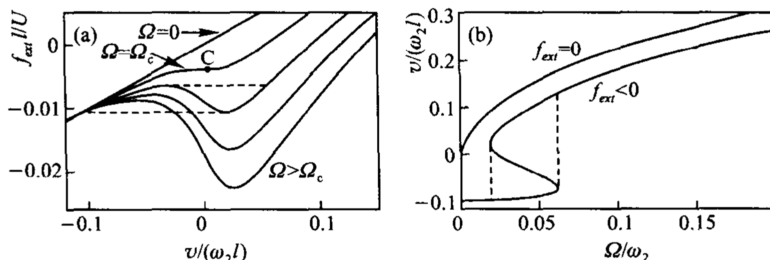



图 5-27 (a) $\Omega=0, \Omega_c$ 及 $\Omega>\Omega_c$ 的 $f_{ext}-v$ 相图;
(b) $f_{ext}=0$ 和 $f_{ext}<0$ 的 $v(\Omega)$曲线

上面的这种讨论是对马达刚性耦合进行的. 从相变理论看, 这实际上是一种平均场理论, 它忽略了粒子位置的涨落效应. 如果考虑弹性耦合, 则这个涨落效应可导致许多新的行为, 上面的理论不再适用. 我们将在后面讨论简谐耦合时系统的合作定向输运问题.

### 5.4.4 细小颗粒体系定向输运的实验研究

最近人们对细小颗粒体系的动力学行为进行了广泛的研究[559~562]. 细小颗粒体系是由大量较小尺寸(如沙粒等)的颗粒组成的物理系统. 它在动力学上既不同于分子、原子体系的运动, 又有别于宏观的流体、固体、气体等的统计性质. 特别是当这些体系在非平衡条件下会表现出相干的或复杂的合作行为, 我们可以用外来驱动来使得系统偏离平衡态. 近年来, 人们对其非平衡动力学做了大量的实验观察, 尤其是振荡驱动的颗粒流的对流斑图动力学的研究. 总的来说, 这方面的大量研究基本处于实验观察阶段, 数值模拟上由于大量的自由度而难以进行(尽管有少量的计算模拟), 纯理论分析也较少.

1998 年, Derenyi 等人进行了细小颗粒体系在振荡作用下的定向输运问题[563]. 这项研究把当前两个热点问题——细小颗粒体系和马达输运有机地结合起来. 他们的实验设置可见图 5-28 给出的示意图. 实验装置由两个同心的玻璃圆筒构成. 圆筒的平均直径为 10 cm, 两个圆筒间的空隙为 3 mm 或 5 mm. 两个圆筒下部是封闭的, 并且在圆筒间隙安装了锯齿形的表面, 如图所示. 锯齿形的环由聚氯烯(软表面)或其他材料(硬表面)制成, 在实验中使用了不同锯齿形

状.整个装置固定于一个振荡装置上,振荡的方向是竖直的.大量细小颗粒处于圆筒的间隙.在实验中,Derenyi 等人使用了单分散性的玻璃球和准椭圆形的塑胶珠两种细小颗粒材料.玻璃球是圆的,直径为 3.3 mm ± 2%.塑胶球的尺寸上有较大差别,其长轴约为 2.4～3.0 mm,短轴为 1.2～1.7 mm.当开动振荡装置时,颗粒体系受到周期振荡的驱动,利用锯齿形的棘齿表面而产生水平方向的定向输运.这种输运是大量颗粒在有相互作用时产生的,其合作行为与颗粒数和驱动频率等一系列因素都有密切的关系.

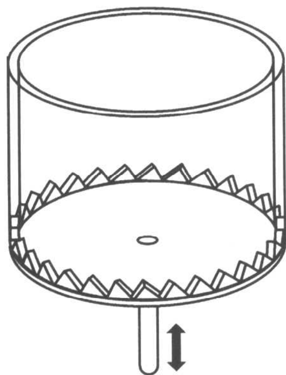


图 5－28　振荡的细小颗粒体系定向输运装置示意图

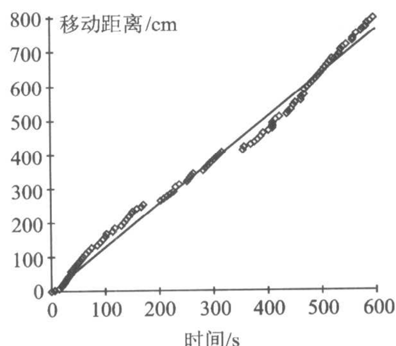



图 5－29　强非对称棘齿表面上周期驱动力下一个跟踪颗粒的典型时间演化

为了便于观察,我们可将若干颗粒作为跟踪对象.它们在颜色上与其他颗粒上区分开来.在图 5－29 中给出的是在强非对称棘齿表面时(见图 5－30(b)中的小图 1 和 2)在竖直周期驱动力下一个跟踪颗粒的典型时间演化.周期驱动的振幅 $A = 2$ mm,频率 $f = 25$ Hz.我们可以看到颗粒的运动基本是均匀的,几个断裂处对应于粒子向反方向的偶然大跳跃.当减少颗粒数目时,这种向后的跳跃发生得更为频繁.图 5－30(a)给出了颗粒体系定向流 $v$ 与无量纲$\Gamma = \dfrac{A\omega^2}{g}$的关系,其中 $A$ 为振荡幅度,$\omega = 2\pi f$ 为振荡频率,$g$ 为重力常数.实验仍在一个强非对称聚氯乙烯表面进行,实验中用了 $N = 200$ 个玻璃球.从图中可以发现,当 $\Gamma$ 较小(即振荡幅度或频率较低)时,$v \approx 0$.只有当 $\Gamma \geqslant \Gamma_c \approx 1.75$时,我们可以看到 $v \neq 0$,颗粒体系发生定向输运.在临界点 $\Gamma_c$ 附近,速度与 $\Gamma$ 有以下的关系:

$$v(\Gamma) \propto (\Gamma - \Gamma_c)^{1.8}, \tag{5.4.29}$$

这说明系统在 $\Gamma_c$ 附近发生了某种类似于热对流的流体不稳定性转变.

图(5－30)(b)给出了定向流 $v$ 与颗粒数目 $N$ 的关系.曲线 1 代表的是塑胶珠在软的强非对称锯齿表面上的水平定向运动速度,曲线 2 是玻璃球体系在软

的强非对称表面上的水平定向运动速度,曲线 3 和 4 则是塑胶分别在软的和硬的弱非对称表面上的结果. 振荡器的振幅及频率分别为 $A=2$ mm, $f=25$ Hz,相应的无量纲参量 $\Gamma=5$,这些曲线各不相同. 对曲线 1 和 2 来说,$v$ 总是大于零. 系统存在一个最佳颗粒数目 $N$,使得它有最佳的输运流. 当颗粒数非常多时,体系的定向运动则较为缓慢. 曲线 3 和 4 与 1 和 2 有较大的差别. 一个明显的不同就是在颗粒数 $N$ 较小时系统出现反向定向流,$v<0$. 只有在 $N$ 增大时系统才会有正向流. 另一个不同点就是曲线没有峰值,系统不存在最佳 $N$,使系统出现最佳定向输运. 我们可以改变颗粒的形状和大小,也可用不同的弹性基底,但上面的结果在定性上没有变化.

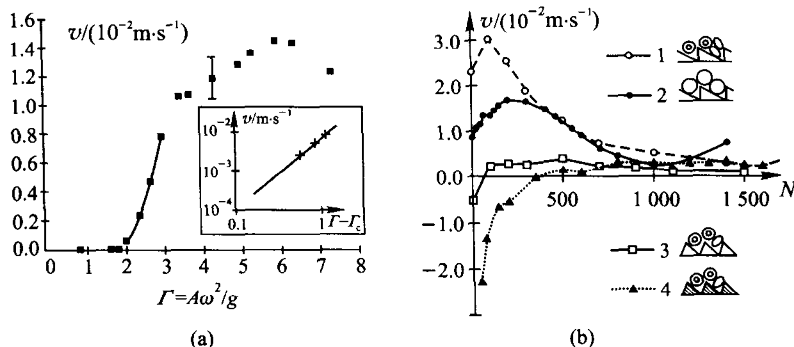



图 5-30 (a) 颗粒体系定向流 $v$ 与 $\Gamma$ 的关系;
(b) 定向流 $v$ 与颗粒数目 $N$ 的关系

### 5.4.5 简谐耦合振子系统的定向输运

一、耦合粒子在外力作用下的合作定向输运

现在让我们考虑前面的 Frenkel - Kontorova 系统. 以往 FK 系统的研究都是在对称周期势中进行的. 现在我们考虑周期为 $l$ 的棘齿势 $V(x)$. 在外力 $y_i(t)$和热噪声的驱动下,忽略惯性效应[564]. 系统的运动方程为

$$\gamma\dot{x}_i=k(x_{i+1}-2x_i+x_{i-1})-\frac{\partial V(x_i)}{\partial x_i}+y_i(t)+\sqrt{2D}\xi_i(t),\ i=1,2,3,\cdots,N. \tag{5.4.30}$$

这里 $k$ 为耦合强度,$D$ 为温度(噪声强度). 设弹簧的自由长度为 $a$,它不显含于上面方程中. 粒子密度 $\rho=\frac{a}{l}$,它表示一个势周期中粒子的平均数目. $\gamma$ 为阻尼系数,为方便设 $\gamma=1$,并设 $V_{\max}-V_{\min}$为 $O(1)$的量级. 耦合系统的平均运动速

度为 $v = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_0^T \dot{x}_i(t)\mathrm{d}t$. 在下面的讨论中，我们设周期势的形式为

$$V(x) = -\frac{1}{2}\left[\sin(2\pi x) + \frac{1}{4}\sin(4\pi x)\right]. \qquad (5.4.31)$$

热噪声 $\xi_i(t)$ 设为时空均无关联的白噪声：

$$\langle \xi_i(t)\rangle = 0, \quad \langle \xi_i(t)\xi_j(t')\rangle = \delta_{ij}\delta(t-t'). \qquad (5.4.32)$$

对外力 $y_i(t)$，我们考虑两种情况，它们均满足 $\langle y_i(t)\rangle = 0$，即外力无偏置. 第一种是同相的对称周期力：

$$y(t) = A\sin\,\omega t. \qquad (5.4.33)$$

另一种是非同步的色噪声，它满足 Ornstein－Uhlenbeck 过程：

$$\dot{y}_i = \frac{1}{\tau}(\sqrt{2Q}\eta_i(t) - y_i), \qquad (5.4.34)$$

其中 $\tau$ 为关联时间，$Q$ 为色噪声强度. $\eta_i(t)$ 为高斯白噪声：

$$\langle \eta_i(t)\rangle = 0, \langle \eta_i(t)\eta_j(t')\rangle = \delta_{ij}\delta(t-t'). \qquad (5.4.35)$$

色噪声 $y_i(t)$ 本身很容易验证其关联为

$$\langle y_i(t)y_j(t')\rangle = \frac{Q}{\tau}\delta_{ij}\mathrm{e}^{-|t-t'|/\tau}. \qquad (5.4.36)$$

当粒子间没有相互作用时，$k=0$，系统化为外力作用下的单粒子在棘齿势中的运动，我们前面已做过若干讨论. 当 $k\to\infty$ 时，所有粒子都被刚性束缚在一起，系统的动力学相当于单个粒子在有效噪声强度下在有效势

$$V_{eff}(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} V(x+ia) \qquad (5.4.37)$$

中的运动. 有效势与 $\rho = a/l$ 有关. 若 $\rho$ 是有理数，则系统是公度的，否则系统是非公度的. 系统的公度性以及外力的同步性对系统的集体输运有很大影响. 在公度情况下，$V_{eff}(x)$ 仍是棘齿势，但幅度较小，$\Delta = |V_{eff}^{\max}(x) - V_{eff}^{\min}| \sim N^{-1}$. 当 $N$ 有限时，我们可以得到有限的定向流；但当 $N\to\infty$，$N/L$ = 有限值时(热力学极限)，$v=0$. 在非公度情况下，$V_{eff}$ = 常数，$\Delta=0$，因而 $v=0$. 对于有限大小的 $k$，粒子间的相互作用可引起复杂的集体定向运动. 下面我们来考虑这种情况.

图 5－31(a)给出了在 $y_i(t) = A\cos\,\omega t$ 作用下非公度系统的定向流 $v$ 与 $A$ 的关系，这里 $\omega=1, D=0.1, k=0,1,3,10$. 可以看到，在没有相互作用($k=0$)时，曲线出现一系列局域的峰，系统需要一个临界的周期力幅度才可以产生定向运动. 当 $k\neq0$ 时，小耦合使得 $k=0$ 的 $v(A)$ 振荡行为被“抹平”，耦合增大使得在较大 $A$ 时 $v$ 减小. 但在小的驱动力下，在一定范围内 $k$ 增大可以使系统有更大的定向流(看 $A\approx2$ 附近的情况). 为更清楚地观察，在图(b)中我们画出 $A=1.9, \omega=1, D=0.1$ 时 $v$ 与 $k$ 的关系. 我们可以明显看到的“共振”曲线，即在某

一优化耦合强度下系统的定向流最大.在较大的耦合时,系统的定向运动反而会受到抑制.

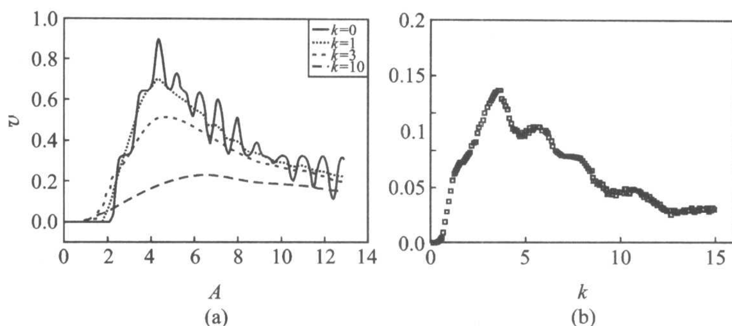



图 5-31 (a) 周期力作用下非公度系统的定向流 $v$ 与 $A$ 的关系;
(b) $v$ 与 $k$ 的关系

下面讨论色噪声驱动的情况.设 $\tau=1$,图 5-32(a)给出了在非公度情况下系统定向流 $v$ 与耦合强度 $k$ 的关系,图中不同曲线代表不同的色噪声强度.当 $k=0$ 时,大的噪声强度 $Q$ 可引起大的定向流.在 $k$ 较小时这个关系仍然保持,并且随着 $k$ 的增加 $v$ 减小.在 $k\approx2-5$ 时,我们可以看到 $v$ 与 $k$ 的共振峰.它是粒

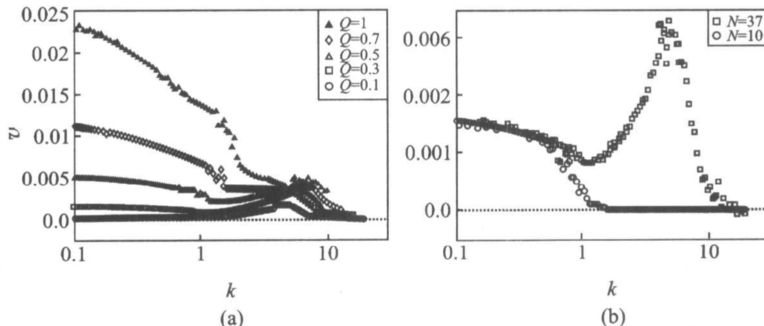



图 5-32 (a) 色噪声驱动下 $v$ 与 $k$ 的关系;
(b) $v(k)$在共振区的放大图,另一条线是公度情况的 $v(k)$关系

子存在耦合作用的结果.图(b)画出了 $Q=0.3$ 时 $v(k)$在共振区的放大图.可以看到明显的共振峰,而且对于这个 $Q$ 值,共振峰对应的 $v_{max}$是 $k=0$(无耦合)时粒子定向流的两倍,这说明在弱驱动下(小 $Q$)耦合对定向输运的加强.太强或太弱的耦合都不利于定向运动,在弱驱动下系统可在优化的耦合强度下达到最佳定向流.图(b)中的另一条线是 $\rho=1$(公度)情况的 $v(k)$关系,可以看到公度

系统没有非公度情况的共振现象.为了更清楚地观察系统的公度效应对共振的影响,我们固定系统尺寸为 $L=10$,改变粒子个数 $N$.图 5-33 给出的是 $v$ 与 $N$ 的关系.可以看到在 $N$ 为 2 或 5 的倍数时 $v\approx 0$.这种在非公度系统中的共振是一种时空随机共振现象,它反映了噪声与耦合的竞争与合作关系[565~566].

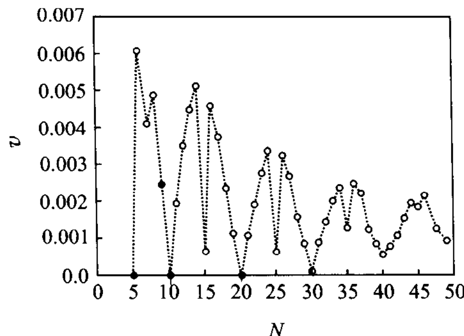



图 5-33 $v$ 与粒子数目 $N$ 的关系曲线

二、耦合系统在开关势场中的定向输运

最近,Igarashi 等人研究了简谐耦合的粒子在开关棘齿场中的布朗马达输运[567],所有粒子均处于白噪声的热库中.外势 $W_j(x)(j=1,2)$是一个随机开关的周期势,$W_1(x)=0$,$W_2(x)$为下面的棘齿势:

$$W_2=\frac{1}{2}U\left[\sin(2\pi x/L)+\frac{1}{4}\sin(4\pi x/L)\right], \tag{5.4.38}$$

其中 $U$ 度量势垒高度,$L$ 为势的周期.为方便,我们考虑过阻尼的动力学:

$$\gamma\dot{x}_i=k(x_{i+1}-2x_i+x_{i-1})-h_i(t)\frac{\partial W_j(x_i)}{\partial x_i}+\sqrt{2D}\xi_i(t),i\in[2,N-1], \tag{5.4.39a}$$

其中 $x_i(t)$描述第 $i$ 个粒子的坐标,$\gamma$ 为阴尼系数,$\xi_i(t)$为高斯白噪声:$\langle\xi_i(t)\rangle=0,\langle\xi_i(t)\xi_j(s)\rangle=\delta(t-s)\delta_{ij}$,$k$ 为耦合强度.下面的讨论采用自由边界条件:

$$\gamma\dot{x}_1=k(x_2-x_1-a)-h_1(t)\frac{\partial W_j(x_1)}{\partial x_1}+\sqrt{2D}\xi_1(t), \tag{5.4.39b}$$

$$\gamma\dot{x}_N=-k(x_N-x_{N-1}-a)-h_N(t)\frac{\partial W_j(x_N)}{\partial x_N}+\sqrt{2D}\xi_N(t), \tag{5.4.39c}$$

这里 $a$ 为弹簧的自由长度.系统的开关势由 $h_i(t)$控制,它是一个双歧随机调制:

$$h_i(t)=\begin{cases}0, & \text{当 } Z_i(t)<0 \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } Z_i(t)>0 \text{ 时},\end{cases} \tag{5.4.40}$$

$Z_i(t)$为 Ornstein-Uhlenbeck 过程 $Z_i(t)$(色噪声):

$$\langle Z_i(t)\rangle=0,\quad \langle Z_i(t)Z_j(s)\rangle=\frac{D'}{\tau}\delta_{ij}\mathrm{e}^{-|t-s|/\tau}, \tag{5.4.41}$$

其中 $\tau$ 为关联时间,$D'$为色噪声强度.在以下的结果中,除非特别指出,参数固定为 $\gamma=1,U=1,L=1,a=1.35,D'=0.4,\tau=1,k=4,D=0.2,N=20$.粒子的初始位置为 $x_i(0)=ia,i=1,2,\cdots,N$.

我们先看没有噪声($D=0$)的情况.图 5－34(a)给出了定向流 $v$ 与耦合强度的关系.曲线表现出与前面系统类似的共振行为,即存在最佳耦合强度,使系统有最佳的定向流.图 5－34(b)画出了 $v$ 与双歧噪声关联时间 $\tau$ 的关系,同样可以发现有趣的共振,适当的关联对系统的定向输运有促进作用.

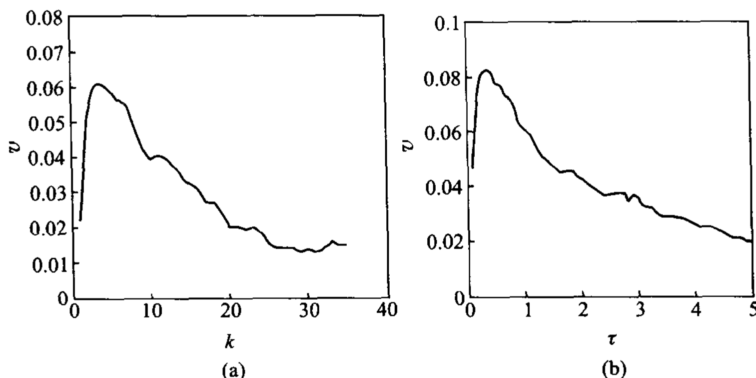



图 5－34 (a) 定向流 $v$ 与耦合强度的关系曲线;
(b) $v$ 与双歧噪声关联时间 $\tau$ 的关系

当考虑外加噪声时,系统的定向输运通常会受到抑制.图 5－35(a)给出了 $v$ 与 $k$ 在$D=0,0.1,0.2,0.3$ 时的关系.可以看到随着 $D$ 的增加,曲线整体下降,说明噪声的破坏作用.如果系统在 $D=0$ 时已有定向输运($v\neq0$),$D>0$ 时系统的有序输运会被这种无序破坏;相反,如果 $D=0$ 时系统被钉扎($v=0$),$D>0$ 时噪声会激发粒子的运动,通过耦合产生合作的定向流.图 5－35(b)的 $v$ 与 $a$ 的关系可以清楚表明这一点.从图中 $D=0$ 的曲线我们可以看到定向流在一些 $a$ 值区域为零.当 $D\neq0$ 时,原来被钉扎的区域 $v\neq0$,而原本 $v\neq0$ 的区域由于 $D\neq0$ 而出现 $v$ 减小的现象.

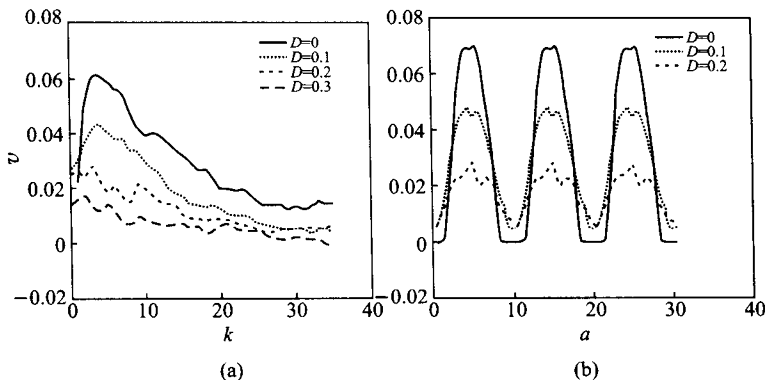



图 5-35 (a) $v$ 与 $k$ 在不同 $D$ 时的关系;(b) $v$ 与 $a$ 的关系曲线

## 5.5 对称周期势中的合作定向输运

棘齿势中的定向输运由于周期势本身已发生对称性破缺而产生,其机制一般较容易理解.这对于耦合时空系统也是如此.当周期势场仍保持反演对称时,对于单粒子系统我们可选择外力的时间对称破缺或周期势的摇摆发生时间对称破缺.这些选择都会使系统产生定向输运.耦合系统同样也可以由这些对称破缺产生合作定向输运.在这一点上,时空系统与单粒子系统是一致的.另一方面,我们还应考虑到时空系统有其自身的特点.由于粒子间的相互耦合及其系统的大自由度,系统存在大量的对称性.对其中一些对称性的破坏都可能会产生合作定向输运.因此,时空非线性系统存在更多对称性破缺机制.本节中主要讨论基于这一点的合作定向输运行为,如耦合对称性破缺及时空对称破缺产生的定向运动.与上一节显著不同的是,这些行为都是单个粒子系统不可能发生的.

### 5.5.1 耦合对称破缺的合作定向输运

一、非对称耦合的 Frenkel - Kontorova 系统

我们讨论下面的 $N$ 个最近邻耦合振子组成的格点系统:

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + \frac{1}{2}(\varepsilon + r)g(x_{i+1} - x_i) - \frac{1}{2}(\varepsilon - r)g(x_i - x_{i-1}), i = 1,2,\cdots,N, \tag{5.5.1}$$

其中 $\varepsilon$,$r$ 分别代表扩散耦合和梯度耦合强度.$\dot{x}_i = f_i(x_i)$描述了单个振子的非线性动力学行为,$x_i = [x_i(1), x_i(2), x_i(3), \cdots, x_i(n)]$描述单个振子的相空

间,$g(x)$为耦合函数.上面的方程我们在前面已经讨论过,主要用来讨论耦合混沌振子的同步问题.现在我们用它来讨论定向输运问题.为抓住问题的实质,我们需要尽量简化的系统.我们选 $n=1$,并选 $f(x)=-\dfrac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}=-d\sin x$.耦合为线性(简谐)的:$g(x)=x-a$.这样上面的方程就简化为:

$$\dot{x}_i=-d\sin x_i+\frac{1}{2}(\varepsilon+r)(x_{i+1}-x_i-a)-\frac{1}{2}(\varepsilon-r)(x_i-x_{i-1}-a). \tag{5.5.2}$$

上面的方程可描述非对称简谐耦合链在周期势中的过阻尼动力学,其中 $d$ 为势垒高度,$a=2\pi\delta$ 为在 $d=0$ 时粒子间平均距离.$\delta\in[0,1]$称为阻挫,它描写外势的周期 $2\pi$ 与弹簧自由长度 $a$ 之间的失配.很显然,当 $r=0$ 时,上面系统即为我们在第四章中详细讨论的 FK 模型的耗散运动方程,因此它是 FK 系统的推广.注意在这里我们没有外力驱动非对称 FK 系统.我们下面会看到,当$r\neq0$时,系统在没有外力驱动下就可以发生定向输运.这种定向输运纯粹是由于扩散耦合的对称性破缺而引起的,是一种合作的输运行为[568].

二、单向耦合系统的定向输运

我们首先讨论极端的情况:$r=\varepsilon=1$,此时耦合成为单向耦合,它在神经网络的信号传输、交通流等许多现象中都存在,并在物理的电路实验、耦合约瑟夫森结等许多物理实验中都可以很容易实现.我们采用周期边界条件:

$$\dot{x}_i=-d\sin x_i+(x_{i+1}-x_i-a), \tag{5.5.3}$$

$$x_{i+N}=x_i+Na.$$

我们可以定义下面的集体定向流:

$$J(t)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\dot{x}_i(t). \tag{5.5.4}$$

应当指出的是,方程(5.5.3)中的 $a$ 是弹簧自由长度而不是直流力,它也不决定系统运动方向.在没有周期势($d=0$)时,粒子间平均间距 $|x_{i+1}|=\alpha+ia$($\alpha$ 为与初始条件有关的常数),因而耦合项$(x_{i+1}-x_i-a)=0$,由此我们也可看到 $d=0$时系统不存在定向流,$J(t)=0$.另一方面,如果 $d\gg1$,系统由于过高的势垒而无法实现粒子的阱间跃迁,则 $J(t)=0$.我们非常关心的就是在 $d$ 有限的情况下是否可观察到定向输运.

1.一般现象

图 5-36(a)-(f)给出了在 $a=\pi/5$($\delta=a/2\pi=0.1$)时改变势垒高度 $d$ 时部分粒子的位置$x_i(t)$及速度 $J_i(t)=\dot{x}_i(t)$的演化情况.当 $d=0.05\ll1$ 时,我们可以看到系统均匀而缓慢地运动,粒子运动几乎是匀速的(图(a),(b)).当 $d$ 增大时,我们可观察到粒子在阱间的跳跃,如图(c)、(d)所示($d=1.2$),粒子在势阱内逗留很长时间后以很快的速度跃入另一阱内,并带动相邻粒子发生跃迁,

形成相干的定向运动.当 $d$ 继续增大时,粒子在阱间的逗留时间也越来越长.当 $d$ 很大时,逗留时间 $\tau\to\infty$,定向运动消失.

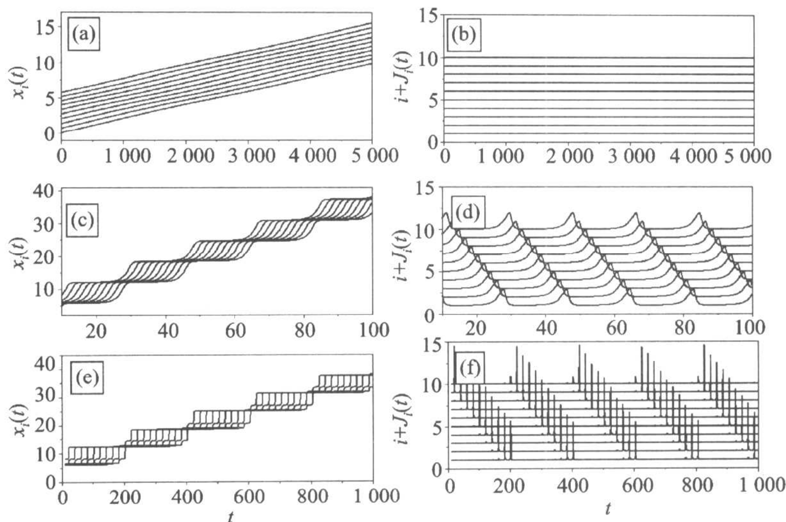



图 5-36 改变势垒高度 $d$ 时部分粒子的位置 $x_i(t)$ 及速度 $J_i(t)=\dot{x}_i(t)$ 的演化情况

在图 5-37(a) 中,我们给出了不同 $\delta$ 时系统平均定向流 $J=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T J(t)\mathrm{d}t$ 与 $d$ 的关系.可以观察到以下现象:

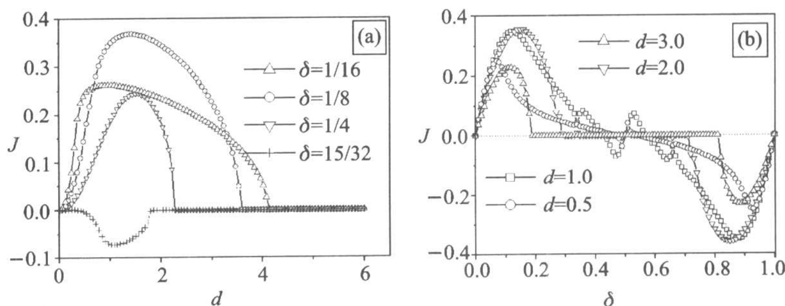



图 5-37 (a) 不同 $\delta$ 时平均定向流 $J$ 与 $d$ 的关系;(b) 不同 $d$ 时的 $J(\delta)$ 曲线

(1) 我们可以看到很有意思的"共振"曲线,即对所有的 $\delta(\delta\neq0,1$,下面会

说明),系统都存在一个最优的势垒高度使得定向流最大;

(2) 系统存在临界的势垒高度 $d_c$,当 $d>d_c$时,$J=0$,系统发生脱钉-钉扎转变.在 $d_c$附近($d<d_c$),我们有下面的关系:

$$J\propto(d_c-d)^{1/2}; \tag{5.5.5}$$

(3) 当 $d\ll 1$ 时,$J\propto d^2$;

(4) 阻挫效应.参量 $\delta$(或 $a$)在系统定向运动中起着重要的作用.从图中可以看到,当 $\delta$ 改变时,$J(d)$曲线也随之发生大的改变,包括形状、峰值和 $d_c$的位置等.另外,对某些 $\delta$,我们还可看到反向的定向流,即系统运动方向与单向耦合的方向相反.为了更清楚地反映阻挫效应,图 5-37(b)给出了不同 $d$ 时的$J(\delta)$曲线.由于 $J(1+\delta)=J(\delta)$,因此我们只需要画出 $\delta\in[0,1]$的情况.我们可以看到复杂的定向输运行为.所有的曲线都有共同的特点,即它们是关于$\delta=1/2$反对称的:$J(\delta)=-J(1-\delta)$.我们通常在 $\delta\in[0,1/2]$看到正向的定向流,而在 $\delta\in[1/2,1]$看到反向定向流;但在中等大小的 $d$ 下,在 $\delta=1/2$ 附近区域,会出现一个小的相反区域.这是一种非线性效应.当 $d$ 较小时曲线是较为平滑的,而在大 $d$ 时在$\delta$ 的部分区域中会发生钉扎现象.与 $J(d)$关系类似,$\delta$ 也可作为一个优化参量使得$J$ 最大.对所有曲线,$\delta=0,1/2,1$ 时均有 $J=0$.

2. 小 $d$ 时的绝热近似

当 $d=0$ 时,$J=0$,粒子的空间位形为 $x_{i+1}^0=x_i^0+a,x_i^0-x_j^0=(i-j)a$.当 $d\ll 1$ 时,耦合链以非常缓慢的速度均匀运动.因此对 $d\ll 1$ 的情况,我们可利用绝热近似进行理论讨论.在绝热近似下,我们可认为 $J_i(t)=\dot{x}_i(t)\approx 0$,这样我们可得到小 $d$ 时粒子间的关系为

$$x_{i+1}\approx x_i+a+d\sin x_i, \tag{5.5.6}$$

它意味着当 $d\ll 1$ 时只要 $d\neq 0$,系统的空间结构是在 $d=0$ 位形关系上的一个小的调制,其幅度为 $d$.对方程(5.5.3)两边求和,我们可得到系统的定向流:

$$J=-\beta d,\quad \beta=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sin x_i. \tag{5.5.7}$$

由此可见,要求出 $J$,只需要把 $\beta$ 的求和解出即可.利用上面的递推关系,按 $d$ 展开至一阶,我们有

$$\begin{aligned}\beta&=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sin(x_{i-1}+a+d\sin x_{i-1})\\&\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\{\sin(x_{i-1}+a)+d\cos(x_{i-1}+a)\sin x_{i-1}\}\\&\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sin x_i^0+\frac{d}{N}\sum_{i=1}^{N}\cos x_i^0\sin x_{i-1},\end{aligned} \tag{5.5.8}$$

在第一项和第二项的前半部分,我们近似用了 $d=0$ 的递推关系和位形分布来

代替.第二项后半部分不能轻易地换成 $\sin x_{i-1}^0$,我们需要不断地利用 $d \ll 1$ 的递推式.这样我们可以得到:

$$\beta = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sin x_i^0 + \frac{d}{N}\sum_{i=1}^{N}\cos x_i^0\left(\sum_{j=1}^{N-1}\sin x_j^0\right). \tag{5.5.9}$$

很显然,上面的第一项由于 $x_i^0 = ia + \alpha$ 而为零(写出其对应的复变量 $z = \cos x + \mathrm{i}\sin x$ 很容易得出):

$$\beta_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sin x_i^0 = 0. \tag{5.5.10}$$

第二项是二重求和,利用积化和差公式 $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$,并用 $x_i^0$ 代替 $x_i$ 可得到:

$$\beta = \frac{d}{2N}\left\{\sum_{i,j}\sin(x_i^0 + x_j^0) - \sum_{i,j}\sin(i-j)a\right\}, \tag{5.5.11}$$

求和对 $j < i$ 进行.很容易验证,第一项求和为零($x_i^0 + x_j^0 = (i+j)a + 2\alpha$),因此

$$\beta = -\frac{d}{2N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{i-1}\sin(i-j)a. \tag{5.5.12}$$

当 $a = 0, \pi$ 和 $2\pi$(即 $\delta = 0, 1/2, 1$)时,显然我们有 $\beta = 0$.当 $a$ 为其他值时,上面求和可很容易求出:

$$\beta \approx -\frac{d}{4}[\tan(a/2)]^{-1}. \tag{5.5.13}$$

因此在 $d \ll 1$ 时系统的定向流为

$$J(d,\delta) = C(d,\delta)d^2, \tag{5.5.14a}$$

其中系数 $C(d,\delta)$ 在 $d \to 0$ 时为

$$C(\delta) = \lim_{d\to 0}C(d,\delta) = [4\tan(\pi\delta)]^{-1}, \quad \delta \neq 0, 1. \tag{5.5.14b}$$

这个结果在 $d \to 0$ 时是精确的.在实验观察中,当 $d \sim 10^{-1}$ 时上面结果与实验符合得都非常好.由于绝热近似,上面自然地解释了 $J \propto d^2$ 的规律.图 5-38 画出了 $d = 0.01 \ll 1$ 时的 $C(\delta)$,图中的点是数值模拟结果,虚线为式子(5.5.14).可以看到二者符合得非常好.另外,上面解析结果直接得出 $J(d,\delta)$ 是关于 $\delta = 1/2$ 反对称的,这也解释了上面的对称性特征.实际上,这种反对称流是系统对称性的结果.对更一般的 $d$,可以看到,方程(5.5.3)在变换

$$S: (\{x_i\}, t, a) \to (\{-x_i\}, t, -a) \tag{5.5.15}$$

下是形式不变的.这意味着

$$J(1-\delta) = -J(\delta). \tag{5.5.16}$$

### 3. 耦合对称破缺与非对称周期力

上面只是在 $d \ll 1$ 时对定向流进行了近似求解,并没有说明定向流产生的

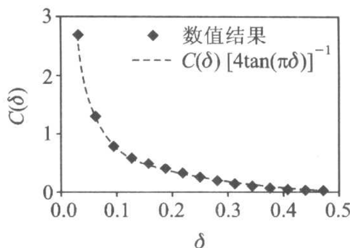



图 5-38 $d=0.01\ll1$ 时的 $C(\delta)$,其中点是数值模拟结果,虚线为理论线

根源.从上面的讨论可以看到,当 $d\neq0$ 时,耦合粒子系统的空间位形被周期势场所调制,不再是均匀分布.从微观上说,这种调制导致振子间相互作用的不均匀性.我们可以把耦合项定义为作用于第 $i$ 个振子上的有效力:

$$F_{eff}^{i}(t)=x_{i+1}-x_{i}-a. \tag{5.5.17}$$

在图 5-39(a)中,我们画出了 $d=1,\delta=1/32$ 时有效力的时间演化.这个力是周期的,$F_{eff}^{i}(t+T)=F_{eff}^{i}(t)$, $T=2\pi/J$.另外,作用于所有振子上的有效力形式上是完全相同的,但它们具有不同的相位.从图中可以看出,有效力 $F_{eff}^{i}(t)$ 既不是对称的也不是反对称的,即 $F_{eff}^{i}(-t)\neq F_{eff}^{i}(t)$, $F_{eff}^{i}(t\pm2/T)\neq-F_{eff}^{i}(t)$. $t$ 时刻作用于系统上的总力 $F_{eff}(t)=\sum_{i=1}^{N}F_{eff}^{i}(t)=0$,且这些力在时间平均上为零.正是由于非对称耦合产生了时间上非对称的周期力,这个非对称力在正方向上是短时的脉冲式的,而在负方向上是长时但很平缓的,且 $F_{eff}^{\max}\gg-F_{eff}^{\min}$.它导致了粒子的定向运动.我们可以用这个 $F_{eff}^{i}(t)$ 去驱动一个粒子:

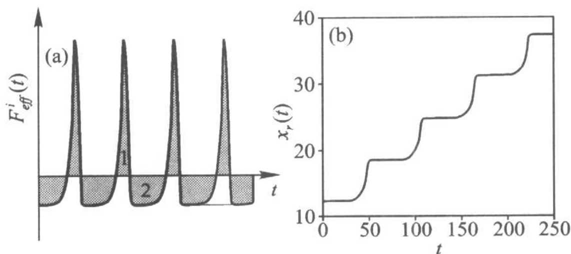



图 5-39 (a) 有效力的时间演化;(b) 响应振子 $x_r(t)$ 的演化

$$\dot{x}_{r}+d_{r}\sin x_{r}=F_{eff}^{i}(t). \tag{5.5.18}$$

图 5－39(b)画出了 $x_r(t)$的演化，我们可以看到 $x_r$呈现出 $2\pi$ 的周期跳跃．这个力的效应与我们在 5.3.4 的情况非常类似，只不过这里是非线性的力，而那里是分段的直流力．另外，在这里耦合系统的力是由耦合产生的，系统本身并不受外力的作用，因此非对称定向输运的有效力来自于粒子间的耦合对称破缺．

4．钉扎－脱钉相变与圆映射动力学

我们现在考虑钉扎点 $d = d_c$附近的行为．当 $d > d_c$时，$\dot{x}_i = 0$．由方程(5.5.3)，我们可以得到与(5.5.6)完全相同的粒子位形分布：

$$x_{i+1} = x_i + 2\pi\delta + d\sin x_i, \tag{5.5.19}$$

这里的关系是精确的．它正是我们在前面所讨论过的正弦圆映射．圆映射是研究低维非线性系统锁相、准周期和混沌动力学的经典模型[30]．$d > d_c$时上述系统的位形分布$\{x_i\}$即为圆映射的一条轨道．我们关心的是在系统发生钉扎－脱钉转变的临界点 $d_c$附近圆映射的轨道动力学有什么变化．在图 5－40 中，我们画出了圆映射系统在 $\delta = 1/32$ 时的分岔图．系统在 $d$ 较小时是准周期运动(还有周期窗口)，然后分支出周期 1 轨道．随着 $d$ 的增加，圆映射经历了倍周期分岔到混沌的道路．在 $d_{cr} = 4.37$ 处，混沌吸引子的尺寸发生激变(crisis)，混沌成为$[0, 2\pi]$的全局混沌．为方便对比，我们也画出了相应的非对称 FK 系统同样参数下定向流 $J$ 与 $d$ 的关系，如图中的棱形点线所示．可以发现，系统发生钉扎－脱钉转变点的位置 $d_c$与圆映射发生吸引子激变的位置几乎一致：$d_{cr} \approx d_c$．我们改变 $\delta$，在 $\delta$ 的很大范围内这个一致性是保持的．图 5－41 给出了 $d_{cr}$、$d_c$与 $\delta$ 的变化关系，可以看到二者基本相符．因此，耦合系统的钉扎－脱钉相变对应于圆映射中的激变现象．这个对应非常有意义，它使我们想起标准 FK 模型的 Aubry 公度－非公度相变，在那里钉扎－脱钉相变对应于标准映射(保守映射)最后的 KAM 环面的破裂[377,408]，这里的圆映射恰好为标准映射的耗散极限．

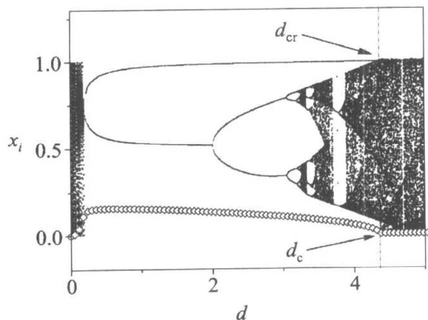



图 5－40　圆映射系统在 $\delta = 1/32$ 时的分岔图

下面我们继续探讨这种对应的动力学根源所在.混沌吸引子的激变行为发生于系统的一条不稳定周期轨道与混沌吸引子边界的碰撞.对圆映射而言,它有一条不稳定周期1轨道(UPO-1):

$$x^{u}=2\pi-\arcsin(2\pi\delta/d). \tag{5.5.20}$$

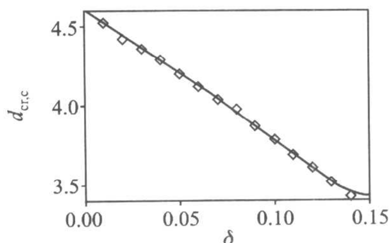



图5-41 $d_{cr}$,$d_{c}$与$\delta$的变化关系

我们在图5-40中用虚线画出了这条不稳定轨道.可以很清楚看到,正是在UPO-1与混沌区边界相交的地方发生了激变行为.因此UPO-1在这个对应中起着至关重要的作用.它与耦合系统钉扎的位形分布有何关系呢?在图5-42(a)中,我们画出了$d=4.4>d_{c}(d_{cr})$时的粒子位形分布.为方便对应,我们对$x_{i}$取了$2\pi$的模.这个位形分布是圆映射的一个不稳定周期$N$态,它镶嵌于激变发生后的混沌吸引子中,图中的实线是UPO-1.可以发现,这个钉扎态位形分布正是UPO-1,二者完全相符,只是在个别空间点上有缺陷.而这些缺陷实际上是位形分布的扭结部分,如图5-42(b)的上面小图(图(a)中由于取了$2\pi$模而没有显示出来).这些扭结的存在是非常必要的,它使得在圆映射中的UPO-

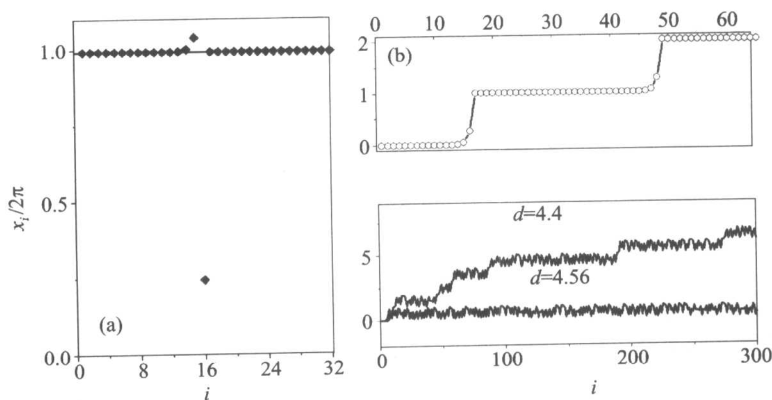



图5-42 (a) $d>d_{c}$的粒子位形分布;(b) 上:位形分布的扭结,下:圆映射中的对应

1 在实际位形分布中可以稳定存在.

位形分布中的扭结在圆映射中是否有对应呢？我们可以计算圆映射的一条轨道，且不取 $2\pi$ 模. 可以发现当 $d < d_{cr}$时，即使不取 $2\pi$ 模，$x_i$ 仍是局域化的(Localized)，没有 $2\pi$ 的变化；当 $d > d_{cr}$，$x_i$ 发生非局域化(delocalization)，非局域化导致了 $x_i$ 出现 $2\pi$ 相移. 因此，位形分布中的扭结对应于 $x_i$ 的非局域化现象. 换言之，非局域化使得位形分布的扭结("缺陷")存在，因而使位形分布稳定存在；相反，当 $d < d_{cr}$时，$x_i$ 的局域化使得位形分布中的扭结结构无法实现，因而也就不能稳定存在. 扭结的不稳定性使得它必须沿着耦合链发生滑动，因而耦合系统发生脱钉转变. 从这个意义上说，**圆映射轨道的局域化－非局域化转变对应于耦合振子系统的脱钉－钉扎转变**. 这一结论比前面激变的结论更为一般，可以解释更大 $\delta$ 区域的对应，这里不再讨论.

三、耦合部分偏置情况的定向输运

下面我们讨论耦合发生部分偏置即 $0 < r < \varepsilon = 1$ 时系统的定向运动[569]. 前面讨论的是单向耦合的极限情况. 实际上，只要 $r \neq 0$，系统就可能发生定向运动. 在图 5－43 中，我们画出了 $\delta = 3/32$ 时在不同 $r$ 下的 $J(d)$ 曲线. 可以看到即使对于小的 $r$，$J$ 都不为零. $r$ 越小，定向流被钉扎的 $d_c$ 越小，这些曲线形状都是类似的. 在 $d \ll 1$ 时，$J \propto d^2$ 的规律仍然成立；在 $d = d_c$ 附近，$J \propto (d_c - d)^{1/2}$. 另外，对于不同的 $r$，$J$ 与 $\delta$ 的关系也与 $r = \varepsilon$ 的情况类似.

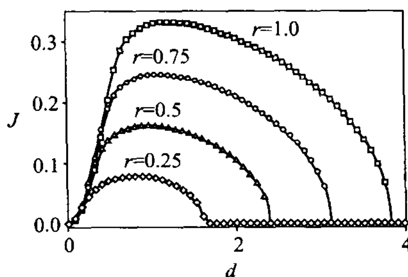



图 5－43　不同 $r$ 下的 $J(d)$ 曲线

$J$ 与 $r$ 的关系并不是单调增加的关系. 我们一般会认为 $r$ 越大 $J$ 就越大. 在图 5－44(a)与(b)中，我们分别给出了在 $d$ 较小和较大时的 $J(r)$ 曲线，$\delta = 3/32$. 对于小 $d$，我们看到典型的"共振"关系，即 $J$ 先随 $r$ 的增加而增大，并在某一 $r_0$ 达到最大值，然后下降. 这种非单调关系揭示出在小 $d$ 时系统有趣的定向输运行为. 在 $d$ 较大时，我们可以看到 $J$ 与 $r$ 的正常关系. 另外，系统存在一个临界的梯度耦合 $r_c$，当 $r < r_c$时，$J = 0$；$r > r_c$时，$J > 0$，在 $r_c$附近，定向流与 $r$ 有以下

关系：

$$J \propto (r - r_c)^{1/2}. \tag{5.5.21}$$

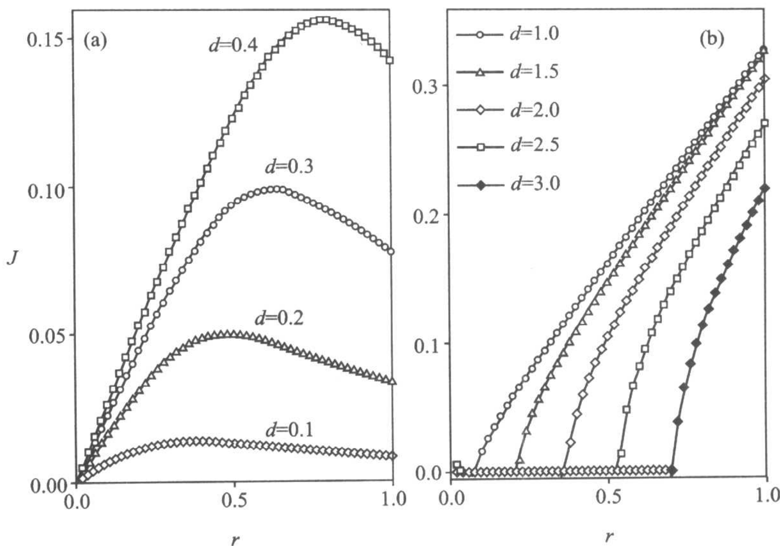



图 5-44 (a)、(b)：$d$ 较小和较大时的$J(r)$曲线

如果我们考虑有外力的情况，系统的定向输运行为更为复杂. 例如，当我们用同步的周期力 $F(t) = A\cos \omega t$ 来驱动耦合系统时，定向输运行为会受到很大影响. 在图 5-45 中，我们画出了 $\delta = 3/16$，$r = 0.5$，$\omega/2\pi = 0.05$ 时定向流 $J$ 与 $A$ 和 $d$ 的关系. 我们可以看到 $J$ 与$(A, d)$的整个曲线表现为共振峰，即系统可以通过优化 $A$ 与 $d$ 得到最佳的输运效率，太大或太小的 $A$ 或 $d$ 都会使定向运动受到抑制. 我们还可以看到的另外一个典型现象是共振台阶，这些台阶来自于耦合系统与周期力的共振. 在有周期力 $F = A\cos \omega t$ 作用时，方程(5.5.2)的一个重要对称特征是：给定一个定态解$\{x_i(t)\}$，变换：

$$T_{l,m,n}\{x_i(t)\} = \{x_{i+l}(t - 2\pi m/\omega) + 2\pi n\}, l, m, n \in \mathbf{Z} \tag{5.5.22}$$

可以产生方程(5.5.2)的另一组定态解$\{x'_i(t)\}$. 如果耦合系统与周期力发生锁相，则上面变换的解在某一$(l, m, n)$时具有不变性，即

$$T_{l,m,n}\{x_i(t)\} = \{x_i(t)\}. \tag{5.5.23}$$

这要求周期力的相位变化 $2\pi m$ 的时间与格点平移 $X = la + 2\pi n$ 的时间相等，即 $\tau = 2\pi m/\omega = X/J$，因此系统的定向流共振台阶为

$$J = \frac{la + 2\pi n}{2\pi m}\omega. \tag{5.5.24}$$

当 $l=0$ 时，$J=n\omega/m$，它在直流与交流驱动的约瑟夫森结实验中称为 Shapiro 台阶. 但上面的台阶公式表明，共振台阶的产生是非对称耦合与周期力竞争的结果. 它使得共振台阶既依赖于时间尺度 $\omega^{-1}$，又依赖于空间尺度 $a$ 和 $2\pi$(外势的周期). 上面的理论结果与图 5-45 的台阶符合得很好.

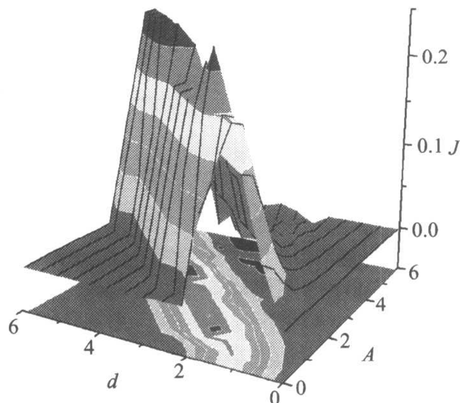



图 5-45　定向流 $J$ 与 $A$ 和 $d$ 的关系

当我们用噪声 $F_i(t)=\xi_i(t)$ 来驱动系统时，在钉扎点 $(d_c, r_c)$ 附近噪声会对定向输运产生促进作用. 我们采取时空无关联的白噪声($\langle F_i(t)\rangle=0$，$\langle F_i(t)F_j(s)\rangle=2A\delta_{ij}\delta(t-s)$). 图 5-46 计算了 $r=0.5$，$\delta=3/16$ 及其 $d=1.0$(菱形)、2.0(圆形)、3.0(方块)时定向流随噪声强度 $A$ 的变化. 我们可以看到明显的共振曲线，这实际是系统定向输运的时空随机共振行为，它反映出时空有序与无序的竞争与合作. 前面我们对有关时空随机共振现象进行了详细讨论，这里不再展开讨论.

### 5.5.2　含时耦合导致的合作定向输运

耦合系统的合作定向输运可以由耦合的对称性破缺引起. 除上面的加入梯度耦合的方式外，最近 Porto 等人还提出了对耦合进行时间调制来产生定向输运的方式[570]，这一构想来源于试图在介观尺度对原子进行操控的启发. 他们使介观尺度的原子成为小型马达的方法是基于空间尺度的动力学竞争. 我们知道，描述时间尺度竞争的最简单的系统之一就是 Frenkel-Kntorova 类型的系统. 我们下面就从 FK 系统开始.

在小阻尼情况，如果没有外力的驱动，FK 系统的动力学方程为：

$$m\ddot{x}_i+\eta\dot{x}_i+\frac{\partial V(x_i)}{\partial x_i}+\sum_{j=\pm1}\frac{\partial U(x_i-x_{i+j})}{\partial x_{i+j}}=0, \qquad (5.5.25)$$

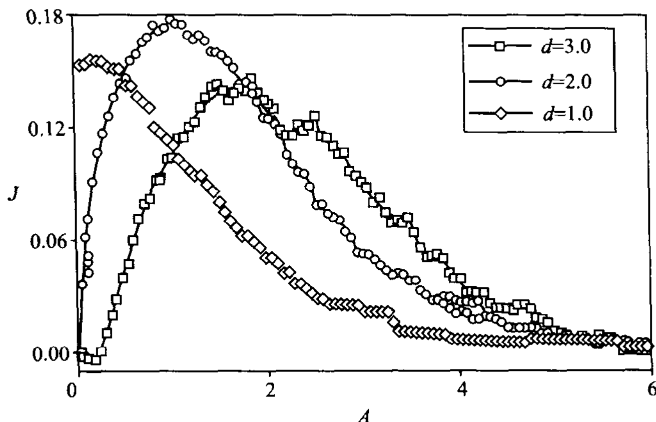



图 5－46 不同 $d$ 时定向流随噪声强度 $A$ 的变化

其中 $V(x)$为周期势,它是粒子与表面的静态相互作用.为简便起见,我们仍采用余弦势:

$$V(x_i) = -d\cos\frac{2\pi x_i}{b}, \tag{5.5.26}$$

其中 $b$ 为势的周期,$d$ 为势垒高度,$M$ 为粒子质量,$\eta$ 为摩擦阻尼系数,$-\eta\dot{x}_i$ 描述了粒子在表面上发生相对运动时的耗散相互作用,它正比于相对速度,$U(x)$为粒子间相互作用.为方便讨论,考虑最近邻简谐作用:

$$U(x_i - x_{i\pm1}) = \frac{k}{2}\{|x_i - x_{i\pm1}| - a_{i,i\pm1}(t)\}^2, \tag{5.5.27}$$

其中 $k$ 为相互作用强度,$a_{i,i\pm1}(t)$为粒子与 $i\pm1$ 的自由平衡距离.注意,这里我们没有用完全一样的 $a$,这里的距离与格点有关,且与时间有关.在操纵系统时,我们着眼于操纵其粒子相互作用,其中用含时的调制自由长度代替静态的 $a$ 就是一种选择方式(当然还可以有其他操纵方式).如果考虑的粒子是分子或原子,则 $a$ 就代表键长,还可以通过用光、电、磁等作用来对 $a$ 进行调制,因此自由长度的调制在实验上是可以实现的.当然在实际情况时,系统不可能简单的用 FK 模型来描述,但其原理与基本机制应该有相似之处.

下面我们考虑对 $a$ 进行如下调制:

$$a_{i,i\pm1}(t) = a[1 + \alpha(qx_{i,i\pm1} + \omega t)], \tag{5.5.28}$$

其中 $a$ 为无调制时的自由长度,$\alpha(s)$为调制函数(注意上式 $\alpha$ 后面的括号内为 $\alpha$ 函数自变量).$x_{i,i+1} = ib$,$x_{i,i-1} = x_{i-1,i}$是粒子 $i$ 与 $i\pm1$ 作用键的相对位置.$q$ 为波矢量,$\omega$ 为驱动频率.$\alpha(s)$函数是周期为 1 的函数:$\alpha(s+1) = \alpha(s)$.为方便

我们选取下面的形式：

$$\alpha(s)=\begin{cases}c\sin(\pi s/s_0), & \text{当 } 0\leqslant s\leqslant s_0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } s_0\leqslant s\leqslant 1 \text{ 时}.\end{cases} \tag{5.5.29}$$

有了上面的形式，我们有许多参数如 $q,\omega,s_0,c$ 等可以作为操纵变量使得系统产生定向运动.在适当的选择下，系统可以少到 $N=3$ 个粒子就可以出现马达运动.图 5－47 给出了 $N=3$ 个粒子时在不同时刻的闪频图，参数选择如下：$a/b=11/10$，$\eta=\frac{16\pi}{10b}\sqrt{md}$，$k=\left(\frac{2\pi}{b}\right)^2d$，$\omega=\frac{\pi}{25b}\sqrt{\frac{d}{m}}$，$q=\frac{1}{5b}$，$c=\frac{7}{10}$，$s_0=\frac{4}{10}$，闪频时间间隔为$\frac{5b}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{d}}$，$a$ 的调制时间周期为$\frac{25b}{\pi}\sqrt{\frac{d}{m}}$.我们可以清楚看到 3 个粒子由一个势阱向另一个势阱内的跃迁.这个定向运动还可以很容易地控制，使其发生运动或停止，并可以控制其运动方向.研究表明，对于上面调控方式，只要调制力的频率 $\omega\leqslant\omega_{\max}\approx\frac{\pi}{25b}\sqrt{\frac{d}{m}}$，马达运动的速度为 $v=b\omega$.因此马达的最大运动速度为：

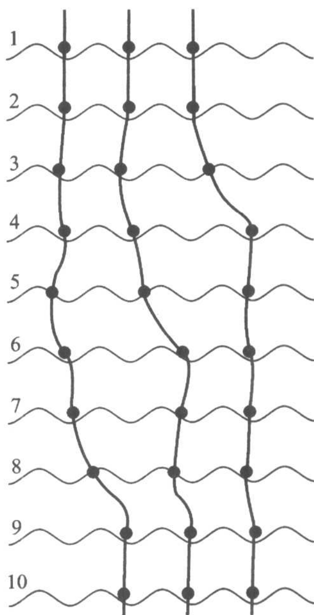


图 5－47　$N=3$ 个粒子时在不同时刻的闪频图

$$v_{\max}=\frac{\pi}{25}\sqrt{\frac{d}{m}}, \tag{5.5.30}$$

当 $\omega$ 过高时，运动变成无规则的，最后成为扩散运动，方向性无法控制.

上面的方法对高维情况也适用.例如，对二维情况，方程中的求导换成相应的梯度算子，并考虑周期势为

$$V(\boldsymbol{x})=-d\cos[\pi(\boldsymbol{x}^{(1)}-\boldsymbol{x}^{(2)})/b]\cos[\pi(\boldsymbol{x}^{(1)}+\boldsymbol{x}^{(2)})/b], \tag{5.5.31}$$

其中 $\boldsymbol{x}^{(i)}(i=1,2)$为 $\boldsymbol{x}$ 的二维分量.相互作用势为：

$$U(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_{i\pm1})=\frac{k}{2}[\,|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_{i\pm1}|-a_{i,i\pm1}(t)\,]^2. \tag{5.5.32}$$

利用与一维情况相同的调制方式，我们可以使系统在二维表面上实现马达运动.图 5－48 给出了 3×3 个粒子的运动情况.10 个闪频图为不同时刻(按时间增加顺序为(1)，(2)，(3)，…，(10))粒子的位形图.我们可以看到系统向 $\boldsymbol{x}^{(1)}$ 方向的定向马达运动.

胡斑比与朱建阳研究了光敏 FK 模型的定向输运行为[571].他们的模型与

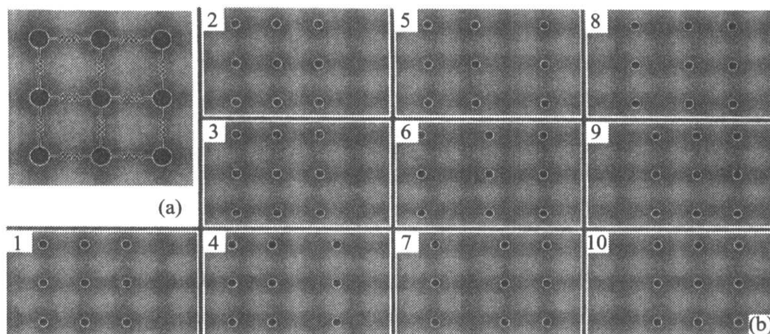



图 5-48 二维表面的马达运动:3×3 个粒子的运动情况

Porto 等提出的同属一类,不同的是他们选用了下面形式的自由长度调制方式:

$$a_{i,i\pm1}(t)=a\left[1+\delta\cos(qx_{i\pm1}-\omega t)\right]$$
$$=a\left[1+\delta\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_2}\frac{x_i+x_{i\pm1}}{2}-\omega t\right)\right],\qquad(5.5.33)$$

这里 $\delta(\delta<1)$是吸收系数,代表对自由长度的调制幅度. $\lambda_2$ 和 $\omega$ 分别是外部辐射光的波长和频率,它们是系统的可调参量. 对系统方程作无量纲变换,可以得到:

$$\ddot{x}_i+\gamma\dot{x}_i+\sin x_i=k(x_{i+1}-2x_i+x_{i-1})+F_i,\qquad(5.5.34\text{a})$$

这里 $F_i$ 是由于光照而产生的对耦合项的调制:

$$F_i=k\left\{2a\delta\sin\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{x_{i+1}-x_{i-1}}{4}\right)\sin\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{x_{i+1}-2x_i+x_{i-1}}{4}-\omega t\right)-\right.$$
$$\frac{a\delta}{2}\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left[(x_i-x_{i-1}-a)\sin\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{x_i+x_{i-1}}{2}-\omega t\right)-\frac{a\delta}{2}\sin\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(x_i+x_{i-1})-2\omega t\right)\right]-$$
$$\left.\frac{a\delta}{2}\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left[(x_{i+1}-x_i-a)\sin\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{x_{i+1}+x_i}{2}-\omega t\right)\right]-\frac{a\delta}{2}\sin\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(x_{i+1}+x_i)-2\omega t\right)\right\},$$
$$(5.5.34\text{b})$$

这里 $\lambda_1=b$ 为外周期势. 图 5-49(a)给出了 $\gamma=0.1, k=1.0, \lambda_1=a=2\pi$ 时在不同粒子数 $N$, $\lambda_2/\lambda_1$ 和 $\omega$ 下系统定向流 $J$ 与 $\delta$ 的关系. 可以看到存在一个临界的 $\delta_c$,当 $\delta>\delta_c$ 时, $J>0$, $\delta_c$ 与系统的参量有关. 这说明当系统超过临界的光吸收系数,系统就会发生定向输运. 我们还可以看到,定向流对于不同的光频率有很大的差异. 图 5-49(b)画出了 $J$ 的频率关系. 存在临界频率,当用一定频率范围内的光去照射系统,我们可以看到较强的定向输运. 存在一个临界光的频率 $\omega_0$,使得定向流最大. $\lambda_2/\lambda_1$ 越大,可产生定向流的光照频率可选范围越窄,这说明系

统的内部方向尺度与光的波长竞争可导致复杂的定向运动.这一结果在图5-49(c)可以更清楚地看到.在一定范围内 $J$ 随 $\lambda_2/\lambda_1$ 的增加而增加,但在 $\lambda_2/\lambda_1$ 较大时,$J$ 反而一下子降到很低的水平.

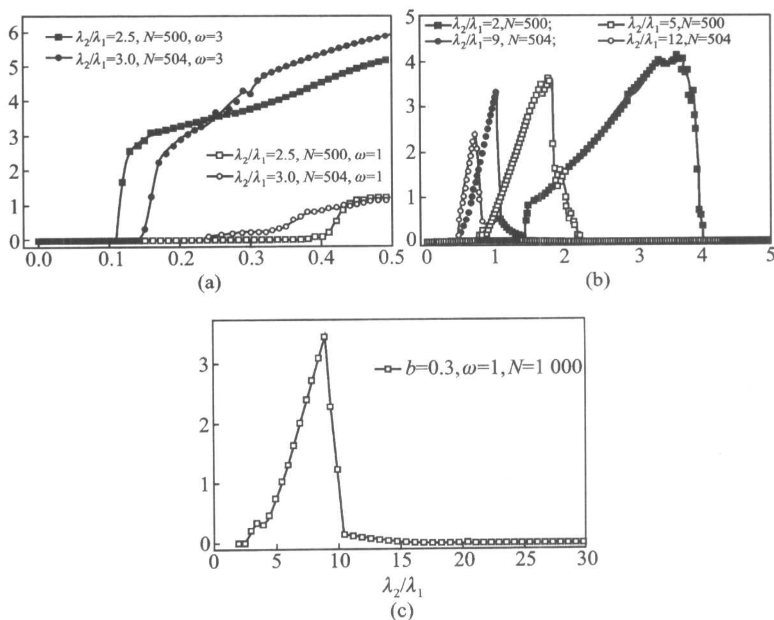



图5-49　(a) 不同 $N,\lambda_2/\lambda_1$ 和 $\omega$ 下 $J$ 与 $\delta$ 的关系;(b) $J$ 的频率关系;(c) $J$ 随 $\lambda_2/\lambda_1$ 的变化

耦合的时间调制可以导致时空系统的定向输运与实际物理系统背景有密切关系,调制方式可随不同的物理、生物系统而不同.这些调制往往比较复杂,导致的系统时空动力学也十分复杂.

### 5.5.3　时空对称破缺的合作定向输运

对耦合系统来说,由单粒子系统产生定向输运机制的讨论并不是这里的主题.我们所关心的是在单粒子所不可能产生的定向输运的那些机制.前面对耦合对称性的破缺和耦合的时间调制都是耦合系统马达运动所独有的产生机制.本节中我们讨论一种新的机制,它是系统多种因素配合的结果,每一种因素本身都满足其对称性,不足以产生定向输运,只有多种因素同时存在并适当匹配时,才会发生时空对称破缺而产生合作定向输运[572].

一、模型

我们仍以一维最近邻耦合振子系统作为我们的模型.这种格点系统的哈密

顿可写为：

$$H = \sum_{j=1}^{N} [ V(\theta_j) + U(\theta_j - \theta_{j-1}) ], \tag{5.5.35}$$

这里 $V(\theta)$是对称的周期势：

$$V(\theta + b) = V(\theta) = V(-\theta), \tag{5.5.36}$$

$b$ 为外势周期，$U(\theta)$描述振子间的相互作用.我们用一个平面波作用于系统上：

$$W = A e^{i(\omega t + j\phi)} \tag{5.5.37}$$

这里 $A,\omega,\phi$ 分别是平面波的振幅、频率和空间波矢(相移).我们考虑耗散的极限，并考虑系统受到外噪声的作用，运动方程可写为：

$$\dot{\theta}_j = -V'(\theta_j) + \left[\frac{\partial U(\theta_{j+1} - \theta_j)}{\partial \theta_j} - \frac{\partial U(\theta_j - \theta_{j-1})}{\partial \theta_j}\right] + A\cos(\omega t + j\phi) + \xi_j(t), \tag{5.5.38}$$

噪声设为时间、空间无关联的高斯型：

$$\langle \xi_j(t) \rangle = 0, \langle \xi_j(t)\xi_{j'}(t') \rangle = 2D\delta_{j,j'}\delta(t - t'), \tag{5.5.39}$$

$D$ 为噪声强度.下面我们仍用 Frenkel - Kontorova 模型进行具体计算.对 FK 模型，系统动力学方程为：

$$\dot{\theta}_j = -d\sin\theta_j + K(\theta_{j+1} - 2\theta_j + \theta_{j-1}) + A\cos(\omega t + j\phi) + \xi_j(t), \tag{5.5.40}$$

这个系统在约瑟夫森结阵列、电荷密度波、微电子力学系统(MEMS)谐振腔阵列以及耦合锁相回路等许多实验中都可以实现.为考察系统的定向运动，我们仍用时间、格点平均的定向流：

$$J = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{NT} \sum_{j=1}^{N} \int_0^T \dot{\theta}_j(t)\mathrm{d}t \tag{5.5.41}$$

下面的讨论中，我们固定 $N = 100, \omega/2\pi, K = 1.0$(除非特殊说明).系统的初始位形分布为 FK 的基态附近.在实际模拟中，我们看到初始条件没有太大影响.系统在固定参数下的平均定向流 $J$ 是惟一的，它可由前面 FK 模型讨论的 Middleton 禁跃规则保证.

在动力学方程中，我们看到系统的定向运动与周期势、耦合、周期力三因素有关系.这三个因素都是对称的，其中周期势是空间反演对称的，耦合是格点对称的，周期力是时间反演对称的.当 $d = 0$(无外势)时，系统所代表的仅是耦合周期振子.它不存在定向运动；当 $K = 0$(单元之间无耦合)时，系统也不可能产生定性运动.同样在没有外力时($A = 0$)，FK 系统则始终处于钉扎状态.也就是说，上面任何一种因素自身不可能导致定性运动，两种的结合也不会产生.但我们下

面的讨论表明，当三者都存在且满足一定条件时，系统就会发生定向输运.

二、合作定向输运

我们首先讨论无噪声的情况($D=0$).显然当$\phi$为$2\pi$的整数倍时系统不会产生定向运动，因为$\phi=2\pi n(n\in\mathbf{Z})$时，作用于不同单元上的力都是同步的.适当选择$\phi$和足够大的$A$，我们就可能观察到集体马达运动.在图5-50中，我们给出了链上第二单元在$d=3.0, A=3.5, \phi/2\pi=0.09, a/2\pi=0.09$时相位$\theta_2(t)$的演化.我们可以看到在$A$足够大时FK系统的基态失稳，产生了马达运动.其他单元的演化情况完全相同，只不过与第二个单元有一个相位差，这种在对称周期力驱动的对称耦合系统在对称周期势中的单向性运动是前面所没有观察到的，它的产生来自于周期力的相移$\phi$(平面波波矢)，而且还要其他因素(如弹簧自由长度$a$，外势周期$2\pi$等)相匹配，正是$\phi$的存在使系统的时空对称性产生自发破缺.这个破缺对每一单元而言产生了一个非对称的周期驱动.我们可以定义作用于第$j$个单元上的有效力$f_j(t)$:

$$\dot{\theta}_j + d\sin\theta_j = f_j(t). \tag{5.5.42}$$

在图5-50中，我们用实线画出了$f_2(t)$.很显然$f_2(t)$的时间平均为零，但它是时间非对称的.在$f_2(t)$的一个周期内，它先经历了一个短时的大幅脉冲，这后是一个反方向上时间较长但幅度较小的作用.$f_j(t)$的这种特点与我们前面观察到耦合对称破缺时的有效势基本相同.正是时空对称的破缺产生了这种定向运动，它把由平面波注入到系统的能量转化为定向运动的功.

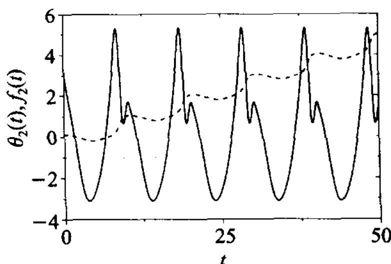


图5-50 相位$\theta_2(t)$的演化，实线为有效力$f_2(t)$

三、参数依赖关系与共振台阶

在图5-51(a)中，我们给出了系统定向流$J$与振幅(周期力振幅)$A$的关系，这里$a/2\pi=0.09, \phi/2\pi=0.09$.这些曲线有几个特点：①对不同的外势垒高度$d$，我们都发现$J$与$A$复杂的振荡型依赖关系；②$d$较小时，$J$也较小，即增加外势的势垒高度反而会增加系统的马达输运；③当$A$很小时，$J$也很小甚至为零($d$钉扎)，当$A$很大时，$J$也趋于零；对中等的$A$，系统可有最佳的输运效率，但由于振荡行为，在一些$A$值附近系统的定向输运反而受到抑制；④当$d$较大时，$J(A)$曲线会出现一系列的共振平台$J=\omega$，说明定向流的大小要受到周期力频率的限制.

我们对$J$与$d$的关系也很感兴趣.在图5-51(b)中，我们计算了$a/2\pi=\phi/2\pi=0.09$时不同$A$下的$J(d)$曲线.对小的$A$，我们可以看到典型的“共振”曲

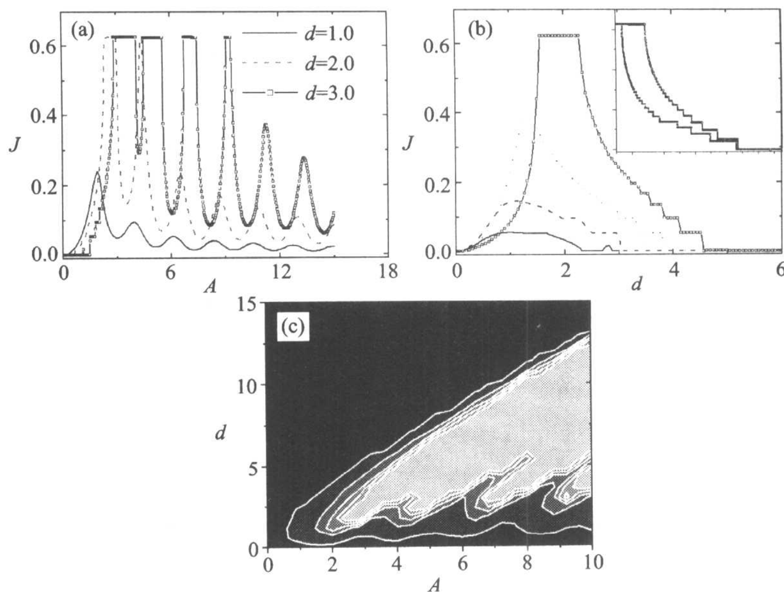



图 5-51 (a) $J$ 与振幅 $A$ 的关系;(b) 不同 $A$ 下的 $J(d)$ 曲线,小图为 $k=0.5$ 时的 $J(d)$ 曲线;(c) 定向流 $J$ 与 $A$ 和 $d$ 的三维分布

线,这种关系在单粒子被时间非对称周期力驱动时的定向输运中我们也见过,但这里更有意义的是这里的马达运动是振子耦合与周期力协调的结果. 当 $d \ll 1$ 时,我们有 $J \propto d^2$,这与前面的非对称耦合系统的结果一致. 另外,我们也观察到一系列共振台阶,包括当 $A$ 较大时出现的 $J=\omega$ 的台阶. 这些台阶是周期力与耦合链发生锁相造成的. 我们可通过对称性分析对这些共振平台进行讨论. 与前面 FK 系统类似,给定系统的一个定态解 $\{\theta_j(t)\}$,我们通过下面的时空变换

$$T_{l,m,n}\{\theta_j(t)\} = \{\theta_{j+l}(t-2\pi m/\omega)+2\pi n\} \tag{5.5.43}$$

可以产生系统的新定态解 $\{\theta'_j(t)\}$,这里 $l, m, n \in \mathbf{Z}$. 如果耦合链与平面波发生锁定,则上述变换的解对于一定的 $l, m, n$ 具有不变性:

$$T_{l,m,n}\{\theta_j(t)\} = \{\theta_j(t)\}. \tag{5.5.44}$$

设在 $\tau$ 时间内耦合链在空间平移的距离为

$$\Theta_1 = la + 2\pi n, \tag{5.5.45a}$$

则在同样时间内周期力的相位变化应为

$$\Theta_2 = l\phi + 2\pi m, \tag{5.5.45b}$$

共振条件要求 $\tau=\Theta_1/J=\Theta_2/\omega$，因而系统可能产生的共振为

$$J=\frac{la+2\pi n}{l\phi+2\pi m}\omega,\quad l,m,n\in\mathbf{Z} \tag{5.5.46}$$

这些台阶是完整的，在实际系统和参数下由于动力学的原因往往只能观察到一部分. 系统的空间分立性越强（$K$ 越小），则出现的共振越多. 在图 5－51(b)的小图中，我们画出了 $\phi/2\pi=0.09$，$a/2\pi=0.09$（圆点线）和 0.07（方形点线），$A=4.0$和 $K=0.5$ 时的 $J(d)$曲线，当 $d<d_c$时，随着 $d$ 的减小我们可以观察到一系列台阶. 对于圆点线，可以看到 $J/\omega=1/12,2/13,3/14,\cdots\cdots,\rightarrow 1$，而对于方形点线，$J/\omega$ 是以 1/15,2/16,3/17,……的序列逼近 1 的，其中 $J/\omega=1$ 代表最大共振. 这两个序列可以写成

$$J=l\omega/(\mathrm{int}[2\pi/a]+l),\qquad l=0,1,2,\cdots, \tag{5.5.47}$$

其中 int[ ]代表取整运算，对 $a/2\pi=0.09$，$\mathrm{int}[2\pi/a]=11$；对 $a/2\pi=0.07$，$\mathrm{int}[2\pi/a]=14$. 这与上面的数值结果一致. 事实上，这个共振序列是来自于公式(5.5.46)，其中 $n=0$.

图 5－51(c)给出了 $\phi/2\pi=0.09$，$a/2\pi=0.09$ 时定向流 $J$ 与 $A$ 和 $d$ 的三维分布. 图中的白色区域为共振 $J=\omega$ 区域. 我们可以看到一系列随 $A$ 变化的共振舌头. 这些舌头对应于图(a)中的一系列平台.

定向流 $J$ 与周期力频率 $\omega$ 有密切的关系. 在图 5－52 中，我们画出了 $\phi/2\pi=0.09$，$a/2\pi=0.09$，$A=3.0$，$K=1.0$ 及 $d=1.0,2.0,3.0$ 时的 $J(\omega)$曲线. 这些曲线的共同特点是在 $\omega$ 较小的区域内 $J$ 与 $\omega$ 成正比. 当 $\omega$ 较大时，这种线性关系中止，$J$ 随 $\omega$ 的增加衰减：$J\propto\omega^{-\alpha}$，$\alpha$ 大约在 2－3 之间. 在这个衰减区域中，我们还可以看到许多不连续的小片段，这些小片段中 $J$ 随 $\omega$ 增加是上升的. 为了进一步辨认，我们画出了 $J=\omega/12,2\omega/13,3\omega/14,4\omega/15$ 和 $\omega$（均为线性关系），可以发现很多 $J(\omega)$的线性片段落在这些直线上，说明这些片段对应于前面分析的共振台阶. 最显著的台阶就是 $J=\omega$，如图中小 $\omega$ 时的线性片段.

在这个模型中很重要的参量是 $a$ 和 $\phi$，它们分别描述了耦合链的空间尺度和周期力相位的尺度. 由于我们这里采用的是相模型，因此 $a$ 和 $\phi$ 之间必然存在尺度竞争. 在图 5－53(a)和(b)中，我们画出了系统定向流 $J$ 与 $a$ 和 $\phi$ 的关系（等高图）. 这里($A,d$)分别为(1,1.25)和(4.0,3). 在图(a)中，可以发现系统存在最佳的($a_0,\phi_0$)，使得系统具有最佳的定向流. 在$(0,0)\leqslant(a,\phi)\leqslant(\pi,\pi)$的区域，$(a_0,\phi_0)\approx(0.816,0.754)$. 在图(b)中，我们用了更大的($A,d$). 可以发现系统在更大的($a,\phi$)范围内定向运输大大加强. 另外，图(a)和(b)都具有反对称的特点. 我们可以通过系统的对称性讨论证实这种反对称性. 首先，系统在 $\phi\rightarrow\phi+2\pi$，$a\rightarrow a+2\pi$ 变化下是不变的，因而有 $J(a+2\pi,\phi)=J(a,\phi+2\pi)=J(a,\phi)$.

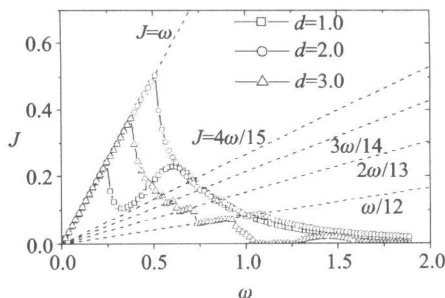



图 5-52 $J(\omega)$曲线

另外,方程在空间反演时间平移及参数变换下具有不变性,即在

$$T_s:(\{\theta_j\},t,a)\to(\{-\theta'_j\},t+T/2,2\pi-a) \quad (5.5.48)$$

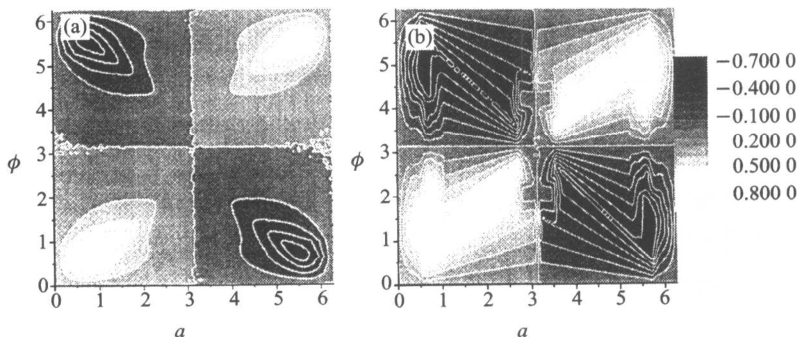



图 5-53 不同 $A$ 和 $d$ 下系统定向流 $J$ 与 $a$ 和 $\phi$ 的关系

下方程形式不变,这里 $T=2\pi/\omega$. 注意这里的变换涉及参数的变换. 因而有

$$J(a,\phi)=-J(2\pi-a,\phi). \quad (5.5.49)$$

在另一个时间反演变换

$$T_t:(\{\theta_j\},t,\phi)\to(\{\theta'_j\},-t,2\pi-\phi) \quad (5.5.50)$$

下,方程(5.5.40)变为

$$-\dot{\theta}'_j=-d\sin\theta'_j+K(\theta'_{j+1}-2\theta'_j+\theta'_{j-1})+A\cos(\omega t+j\phi), \quad (5.5.51)$$

即用 $T_t$ 变换可以得到完全相反的定向流,因而我们有

$$J(a,\phi)=-J(a,2\pi-\phi). \quad (5.5.52)$$

这解释了图中 $J(a,\phi)$的反对称关系. 由于这种反对称性,在 $a$ 或 $\phi$ 等于 $\pi$ 时,我们有 $J(\pi,\phi)=-J(\pi,\phi)$或 $J(a,\pi)=-J(a,\pi)$,因而 $J(a,\pi)=J(\pi,\phi)=0$.

当有外噪声时，在钉扎点附近噪声会促进系统的定向输运．图5－54给出了当$a/2\pi=\phi/2\pi=0.09$，$A=2.0$以及$d=3.5,4.0,4.5$（$d_c\approx3.8$）时定向流与噪声强度的关系．我们可以观察到明显的定向运输的时空随机共振现象．由此可见，时空随机共振是时空系统在阈值附近所普遍存在的现象，只是它们在不同的系统中表现形式不同．

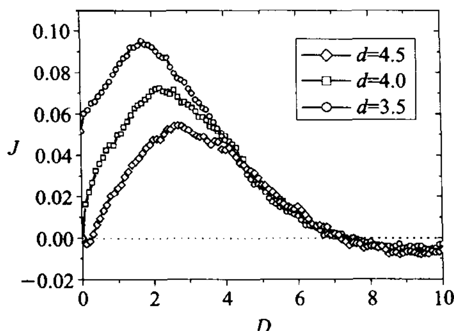



图5－54　定向流与噪声强度的关系

四、惯性效应

前面考虑的都是耗散的极限情况．现在我们考虑有惯性项的情况．我们在方程(5.5.40)左边加上惯性项$M\ddot{\theta}_j$．下面讨论仍集中于$D=0$的情况．

图5－55(a)给出了$K=1.0$，$A=1.5$，$\omega/2\pi=0.1$，$a/2\pi=0.34$，$\phi/2\pi=0.15$时在不同质量（$M=2.0,10.0$）时的$J(d)$曲线．当$M$较小时，系统的输运行为与完全耗散的情况基本一致，我们可看到$J(d)$的峰．当$M$增加时，$J(d)$曲线变化非常复杂．最明显的变化是反向流的出现．$J$随$d$的增加首先出现一个小的反向流峰，然后在$d\approx3$时又出现第二个反向流峰．只有在$d\approx5-9$时我们才观察到正向的马达运动．

图5－55(b)和(c)分别给出了$J$与$\phi$和$a$的关系曲线．我们可以看到，尽管上面关于$\pi$的反对称仍然保持，但惯性项的效应非常明显．大$M$时的定向流大小和方向与耗散的情况完全不同．例如，对于$J(\phi)$曲线，我们可以看到在小$M$时$J\approx0$的地方，在大$M$时都可以有非常大的定向流，而在小$M$时$J$很大的地方，在大$M$时$J$都几乎为零，这种效应在$J(a)$曲线中也有反映．总的说来，惯性效应给系统的定向输运带来了新的影响因素．这方面的讨论很复杂，特别是我们这里的耦合系统．系统的时空行为（时间周期、时间混沌、时空混沌等）到底对输运起着什么样的作用还有待于进一步研究[573~577]．

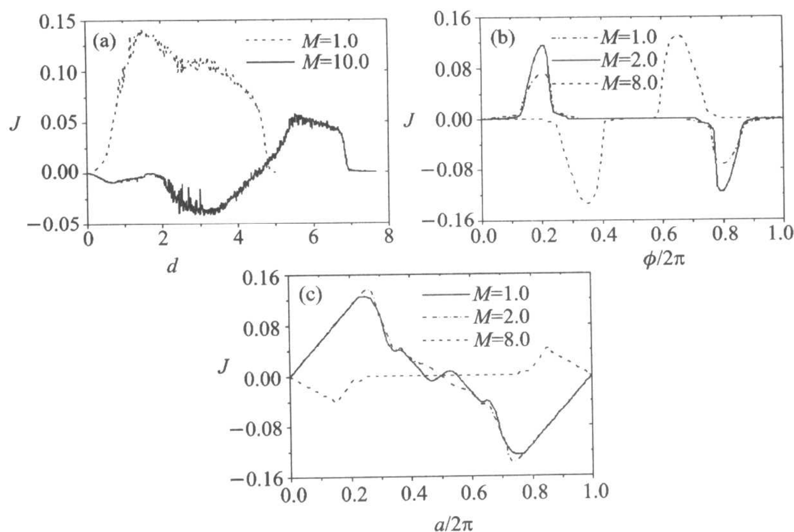



图 5－55 (a) 不同质量 $M$ 时的 $J(d)$ 曲线；(b) $J$ 与 $\phi$ 的关系曲线；(c) $J$ 与 $a$ 的关系曲线

# 参考文献

[1] Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcation of vector fields. New York: Springer-Verlag, 1983

[2] Ott E. Chaos in dynamical systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1993

[3] Hao Bailin, eds. Directions in chaos. Vol. 1,2. Singapore: World Scientific, 1987, 1988

[4] Sinai Ya G. Dynamical systems Ⅱ, ergodic theory with applications to dynamical systems and statistical mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 1989

[5] Gutzwiller M C. Chaos in classical and quantum mechanics New York: Springer-Verlag, 1990

[6] Reichl L E. The transition to chaos, in conservative classical systems: quantum manifestations. Berlin: Springer-Verlag, 1992

[7] Sagdeev R Z, Usikov D A, Zaslavsky G M. Nonlinear physics, from the pendulum to turbulence and chaos. Switzerland: Harwood Academic, Chur, 1988

[8] Zaslavsky G M. Chaos in dynamic systems London: Harwood Academic Publishers, 1987

[9] Eckmann J P, Ruelle D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. Rev. Mod. Phys., 1985, 57(3): 617

[10] Cross M, Hohenberg P. Pattern formation outside of equilibrium. Rev. Mod. Phys., 1993, 65(3): 851

[11] Lorenz E N. Deterministic nonperiodic flow. J. Atmos. Sci., 1963, 20: 130; The mechanics of vacillation. J. Atmos. Sci., 1963, 20: 448

[12] Benettin G, Froeshle C, Scheidecker J P. Kolmogorov entropy of a dynamical system with an increasing number of degrees of freedom. Phys. Rev. A, 1979, 19(6): 2454

[13] Benettin G, Strelcyn J M. Numerical experiments on the free motion of a point mass moving in a plane convex region: Stochastic transition and entropy. Phys. Rev. A, 1978, 17(2):773

[14] Eckmann J P. Road to turbulence in dissipative dynamical systems. Rev. Mod. Phys., 1981, 53(4):643

[15] Grossman S, Thomae S. Invariant distributions and stationary correlation functions of the One - Dimensional Discrete Processes. Z. Naturforsch, 1977, 32A:1353.

[16] Feigenbaum M J. Universal behavior in nonlinear systems. Los Alamos Science, 1980,1:4

[17] Feigenbaum M J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. J. Stat. Phys., 1979, 21:669

[18] Coullet P, Tresser C. Iterations D' endomorphismes et groupe de renormalisation. C. R. Acad. Sci. Paris, 1978,287:577

[19] Coullet P,Eckmann J P, Koch H. Period doubling bifurcations for families of maps on R n. J. Stat. Phys., 1981, 25:1

[20] 郝柏林.从抛物线谈起.上海:上海科技教育出版社,1993

[21] Pomeau Y,Manneville P. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. Commun. Math. Phys., 1980, 74:189

[22] Hirsch J E,Nauenberg M,Scalapino D J. Intermittency in the presence of noise:a renormalization group formation. Phys. lett., 1982,87A:391

[23] Hu B, Rudnick J. Exact solutions to the Feigenbaum renormalization - group equations for intermittency. Phys. Rev. Lett., 1982, 87A:391.

[24] Berge P, Pomeau Y, Vidal C. Order within chaos. New York: Wiley, 1984

[25] Landau L D. On the problem of a turbulence. Akad. Nauk. Dok., 1944, 44:339

[26] Ruelle D, Takens F. On the nature of turbulence. Commun. Math. Phys., 1971,20:167

[27] Newhouse S E, Ruelle D, Takens F. Experimental study of the velocity field in Rayleigh - Benard convection. Commun. Math. Phys., 1978,64:35

[28] Dubois M, Berge P. J. Fluid Mech., 1978,85:641

[29] Gollub J P, Swinney H L. Onset of turbulence in a rotating fluid. Phys. Rev. Lett., 1975, 35:927

[30] 陈式刚.圆映射:非线性科学丛书.上海:上海科技教育出版社,1998

[31] Grebogi C,Ott E,Yorke J A. Crises, sudden changes in chaotic attractors transient chaos. Physica D, 1983, 15:354

[32] Libchaber A, Laroche C, Fauve S. Two－Parameter study of routes to chaos. J. Phys. Lett.,1982,43:L211

[33] Kolmogorov A N. Preservation of conditionally periodic movements with small change in hamiltonian function. Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 1954, 98:527

[34] Arnold V I. Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanic. Russ. Math. Surv., 1963,18:9;18:85

[35] Moser J. On invariant curves of area－preserving mappings of an annulus. Nachr. Akad. Wiss. Gottingen II. Math. Phys. Kd, 1968, 1:1

[36] Henon M, Heiles C. The applicability of the third integral of motion: Some Numerical Experiments. Astron. J., 1964,69:73

[37] Krylov N S. Works on the foundations of statistical physics Princeton NJ:Princeton University Press 1979

[38] Reichl L E. A modern course in statistical physics. Austin:Univ. Texas Press,1980

[39] Zheng Z. From few－body to many－body systems: dynamics and statistical mechanics: Ph. D thesis. Beijing Normal University, 1997

[40] Palmer P G. Broken ergodicity. Adv. Phys., 1982, 31:669

[41] Gallavotti G. Ergodicity ensembles irreversibility in Boltzmann and beyond. J. Stat. Phys., 1995, 78:1571

[42] Zheng Z, Hu G, Zhang J. Ergodicity in the hard－ball systems and Boltzmann's entropy. Phys. Rev. E,1996,53:3246; Ergodic property of a Henon－Heiles model with reflecting walls. Phys,Rev.E, 1995, 52:3440

[43] Sinai Ya G. Dynamical systems with elastic reflections. Usp. Mat. Nauk, 1970, 25: 141; Ergodic properties of dispersing billiards. Russ. Math. Surv., 1970, 25:137

[44] Bunimovich L A. On the ergodic properties of certain billiards. Funct. Anal. Appl., 1975, 19:254

[45] Berdichevsky V L, Alberti M V. Statistical mechanics of Henon－Heiles oscillators. Phys. Rev. A, 1991, 44:858

[46] Hu G, Zheng Z, Yang L. Thermodynamic second－law in irreversible processes of chaotic few－body systems. Phys. Rev. E, 2000, 64:045102R

[47] Jarzynski C. Energy diffusion in a chaotic adiabatic billiard gas. Phys. Rev. E, 1993, 48(6): 4340;Thermalization of a Brownian particle via coupling to

low - dimensional chaos. Phys. Rev. Lett., 1995, 74(15): 2937

[48] 胡岗,肖井华,郑志刚. 混沌控制.上海:上海科技教育出版社,2000

[49] Hubler A. Adaptive control of chaotic systems. Helv. Phys. Acta 1989, 62:343

[50] Ott E, Grebogi C, Yorke J A. Controlling chaos. Phys. Rev. Lett., 1990, 64(11):1196

[51] Ditto W L, Rausco S N, Spano M L. Experimental control of chaos. Phys. Rev. Lett., 1990, 65(26):3211

[52] Roy R, Murphy T W, Maier T. Dynamical control of a chaotic laser: experimental stabilization of a globally coupled system. Phys. Rev. Lett., 1992, 68(9):1259

[53] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic system. Phys. Rev. Lett., 1990, 64(8):821

[54] Hunt E R. Stabilizing high - period orbits in a chaotic system: the Diode resonator. Phys. Rev. Lett., 1991, 67(15):1953

[55] Shinbrot T, Ott E, Grebogi C. Using chaos to direct trajectories to targets. Phys. Rev. Lett., 1990, 65(26):3215

[56] Shinbrot T, Grebogi C, Ott E. Using small perturbations to control chaos. Nature, 1993, 363:411

[57] Braiman Y, Goldhirsch I. Taming chaotic dynamics with weak periodic perturbations. Phys. Rev. Lett., 1991, 66(20):2545

[58] Qu Z L, Hu G, Yang G J. Phase effect in taming nonautonomous chaos by weak harmonic perturbations. Phys. Rev. Lett., 1994, 74(10):1736

[59] Ding W X, She H Q, Huang W. Controlling chaos in a discharge plasma. Phys. Rev. Lett., 1994, 72(1):96

[60] Wang P Y, Xie P, Dai J H. Stabilization, selection and tracking of unstable patterns by weak spatial perturbation. Phys. Rev. Lett., 1998, 80(21): 4669

[61] Cuomo K M, Oppenheim A V. Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications. Phys. Rev. Lett., 1993, 71(1):65

[62] Roy R, Thornburg K S. Experimental synchronization of chaotic lasers. Phys. Rev. Lett., 1994, 72(13):2009

[63] Konnur R. Equivalence of synchronization and control of chaotic systems. Phys. Rev. Lett., 1996, 77(14):2937

[64] Risken H. The Fokker - Planck equation. Berlin: Springer - Verlag,

1984

[65] 胡岗.随机力与非线性系统.上海:上海科技教育出版社,1994

[66] Hanggi P, Talkner P, Borkovec M. Reaction - rate theory: fifty years after Kramers. Rev. Mod. Phys., 1990, 62(2):251

[67] Zheng Z, Hu G. Systematic perturbation solution for Brownian motion in a biased periodic potential field. Phys. Rev. E, 1995, 52:109

[68] Gammaitoni L, Hanggi P, Jung P. Stochastic resonance. Rev. Mod. Phys., 1998, 70(1):223

[69] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance. J. Phys. A, 1981, 14:L453

[70] Nicolis C, Nicolis G. Stochastic aspects of climatic transitions - additive fluctuations. Tellus, 1981, 33:225

[71] Fauve S, Heslot F. Stochastic resonance in a bistable system Phys. Lett. A, 1983, 97:5

[72] McNamara B, Wiesenfeld K. Theory of stochastic resonance. Phys. Rev. A, 1989, 39(9):4854

[73] Gammaitoni L, Marchesoni F, Menichella - Saetta E. Stochastic resonance in bistable system. Phys. Rev. Lett., 1989, 62(4):349

[74] Gammaitoni L, Marchesoni F, Santucci S. Stochastic resonance as a Bona Fide resonance. Phys. Rev. Lett., 1995, 74(7):1052

[75] Debnath G, Zhou T, Moss F. Remark on stochastic resonance. Phys. Rev. A, 1989, 39(8):4323

[76] Dykman M I, Mannella R, McClintock P V E. Comment on "stochastic resonance in bistable system". Phys. Rev. Lett., 1990, 65(20):2606; Phase shift in stochastic resonance. Phys. Rev. Lett., 1992, 68(20):2985

[77] Hu G, Qing G R, Gong D C. Comparison of analogous simulation of stochastic resonance with adiabatic theory. Phys. Rev. A, 1991, 44(10):6424

[78] Gong D, Hu G, Wen X. Experimental study of the signal - to - noise ratio of stochastic resonance system. Phys. Rev. A, 1992, 46(6):3243

[79] Simon A, Libchaber A. Escape and synchronization of a Brownian particle. Phys. Rev. Lett., 1992, 68(23):3375

[80] Iannelli J M, Yariv A, Chen T R. Stochastic resonance in a semiconductor distributed feedback laser. Appl. Phys. Lett., 1994, 65(16):1983

[81] Jost B, Sahleh B E A. Signal - to - noise ratio improvement by stochastic resonance in a unidirectional photorefractive ring resonator. Opt. Lett., 1996,

21(4):287

[82] Gammaitoni L, Martinelli M, Pardi L. Observation of stochastic resonance in bistable electron - paramagnetic - resonance system. Phys. Rev. Lett., 1991, 67(13):1799

[83] Lin I, Liu J M. Experimental observation of stochastic resonancelike behavior of autonomous motion in weakly ionized rf magnetoplasmas. Phys. Rev. Lett., 1995, 74(16):3161

[84] Reibold E, Just W, Becker J. Stochastic resonance in chaotic spin - wave dynamics. Phys. Rev. Lett., 1997, 78(16):3101

[85] Kittel A, Richter R, Hirsch M. Stochastic resonance in experiment. Z. Naturforsch. Tell A, 1993, 48:633

[86] Mantegna R N, Spagnolo B. Stochastic resonance in a tunnel diode. Phys. Rev. E, 1994, 49(3):R1792; Noise enhanced stability in an unstable system. Phys. Rev. Lett., 1996, 76(4):563

[87] Hibbs A D, Singsaas A L, Jacobs E W. Stochastic resonance in a superconducting loop with a Josephson junction. J. Appl. Phys., 1995, 77(6):2582

[88] Rouse R, Han R, Luckens J E. Flux amplification using stochastic superconducting quantum interference devies. Appl. Phys. Lett., 1995, 66(1):108

[89] Longtin A, Bulsara A, Moss F. Time - interval sequences in bistable system and the noise - induced transmission of information by sensory neurons. Phys. Rev. Lett., 1991, 67(5):656

[90] Douglass J K, Wilkens L, Pantazelou E. Noise enhancement of information transfer in crayfish mechanoreceptors by stochastic resonance. Nature, 1993, 365:337

[91] Bezrukov S M, Vodyanoy I. Noise - induced enhancement of signal transduction across voltage - dependent ion channels. Nature, 1995, 378:362

[92] Levin J E, Miller J P. Broadband neural encoding in the cricket sensory system enhanced by stochastic resonance. Nature, 1996, 380:165

[93] Riani M, Simonotto E. Stochastic resonance in the perceptual interpretation of ambiguous figures: a neural network model. Phys. Rev. Lett., 1994, 72(19):3120

[94] Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J. Synchronization, a universal concept in nonlinear sciences New York: Cambridge University Press, 2001

[95] Huygenii G. Horoloquim oscilatorium. France: Parisiis, 1673

[96] Rayleigh J. The theory of sound. New York: Dover Publishers, 1945

[97] Winfree A T. Geometry of biological time. New York: Springer - Verlag, 1990

[98] Glass L, Mackay M C. From clocks to chaos: the rhythms of life. Princeton NJ: Princeton University Press, 1988

[99] Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves and turbulence. Blin: Springer - Verlag, 1984

[100] Bocaletti S, Kurths J, Osipov G. The synchronization of chaotic systems. Phys. Rep., 2002, 336(1):1

[101] Strogatz S H, Mirollo R E, Matthews P C. Coupled nonlinear oscillators below the synchronization threshold: relaxation be generalized Laudau damping. Phys. Rev. Lett., 1992, 68(18):2730

[102] Winfree A T. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. J. Theor. Biol., 1967, 16:15

[103] Pavlidis T. Populations of interacting oscillators and circadian rhythm. J. Theor. Biol, 1969, 22:418

[104] van Hemmen J L, Wreszinski W F. Lyapunov function for the Kuramoto model of nonlinearly coupled oscillators. J. Stat. Phys., 1993, 72:145

[105] Watanabe S, Strogatz S H. Integrability of globally coupled oscillator array. Phys. Rev. Lett., 1993, 70(16):2391; Constants of motion for superconducting josephson Arrays. Physica D, 1994, 74:197

[106] Daido H. A solvable model of coupled limited - cycle oscillators exhibiting partial perfect sychrony and moved frequency spectra. Physica D, 1993, 69:394

[107] Crawford J D. Scaling and singularities in the entrainment of globally coupled oscillators. Phys. Rev. Lett., 1995, 74(21):4341

[108] Crawford J D, Davies K T R. Synchronization of globally coupled phase oscillators: singularities and scaling for general couplings. Physica D, 1999, 125:1

[109] Strogatz S H. From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. Physica D, 2000, 143:1

[110] Balmforth N J, Sassi R. A shocking display of synchrony. Physica D, 2000, 143:21

[111] Strogatz S H, Mirollo R E. Stability of incoherence of a population of coupled oscillators. J. Stat. Phys., 1991, 63:613

[112] Bonilla L L, Vicente C J P, Ritort F. Exactly solvable phase oscillator

models with synchronization dynamics. Phys. Rev. Lett., 1998, 81(17):3643

[113] Hansel D, Mato G., Meunier C. Clustering and slow switching in globally coupled phase oscillators. Phys. Rev. E, 1993, 48(5):3470

[114] Crawford J D. Amplitude expansions for instabilities in populations of globally－coupled oscillators. J. Stat. Phys., 1994, 74:1047

[115] Hong H, Choi M Y, Park K. Synchronization and resonance in a driven system of coupled oscillators. Phys. Rev. E, 1999, 60(4):4014

[116] Reimann P, Van der Broeck C, Kawai P. Nonequilibrium noise in coupled phase oscillators. Phys. Rev. E, 1999, 60(6):6402

[117] Tanaka H, Lichtenberg A J, Oishi S. First order phase transition resulting from finite inertia in coupled oscillator systems. Phys. Rev. Lett., 1997, 78(11):2104;Self－synchronization of coupled oscillators with hysteretic responses. Physica D, 1997, 100:279

[118] Hong H, Choi M Y, Yi J. Inertia effects on periodic synchronization in a system of coupled oscillators. Phys. Rev. E, 1999, 59(1):353

[119] Acebron J A, Spigler R. Adaptive frequency model for phase－frequency synchronization in large populations of globally coupled nonlinear oscillators. Phys. Rev. Lett., 1998, 81(11):2229

[120] Daido H. Order function and macroscopic mutual entrainment in uniformly coupled limit－cycle oscillators. Prog. Theor. Phys., 1992, 88(6):1213; Critical conditions of macroscopic mutual entrainment in uniformly coupled limit－cycle oscillators. Prog. Theor. Phys., 1993, 89:929

[121] Daido H. Multi－branch entrainment and multi－peaked order－functions in a phase model of limit－cycle oscillators with uniform all－to－all coupling. J. Phys., 1995, 28:L151;Onset of cooperative enchainment in limit－cycle oscillators with uniform all－to－all interactions: bifurcation of the order function. Physica D, 1996, 91:24

[122] Okuda K. Variety and generality of clustering in globally coupled oscillators. Physica D, 1993, 63:424

[123] Acebron J A, Bonilla L L, De Leo S. Breaking the symmetry in bimodal frequency distributions of globally coupled oscillators. Phys. Rev. E, 1998, 57(5):5287

[124] Niebur E, Schuster H G, Kammen D M. Collective frequencies and metastability in networks of limit－cycle oscillators with time delay. Phys. Rev. Lett., 1991, 67(20):2753

[125] Schuster H G, Wagner P. Mutual entrainment of two limit cycle oscillators with time delayed coupling. Prog. Theor. Phys., 1989, 81(5):939

[126] Dorizzi B, Grammaticos B. Delay - induced desynchronization in neuronal oscillations. Phys. Rev. A, 1991, 44(10):6958

[127] Gerstner W, van Hemmen J L. Coherence and incoherence in a globally coupled ensemble of pulse - emitting units. Phys. Rev. Lett., 1993, 71(3):312

[128] Bressloff P C, Coombes S, de Souza B. Dynamics of a ring of pulse - coupled oscillators: group theoretic approach. Phys. Rev. Lett., 1997, 79(15):2791

[129] Bressloff P C, Coombes S. Traveling waves in a chain of pulse - coupled Oscillators. Phys. Rev. Lett. 1998,80(21):4815

[130] Kim S, Park S H, Ryu C S. Multistability in coupled oscillator systems with time delay. Phys. Rev. Lett., 1997, 79(15):2911

[131] Nischwitz. A, Glünder H. Local lateral inhibition: a key to spike synchronization?. Biol. Cybernet, 1995, 73:389

[132] Yeung M K S, Strogatz S H. Time delay in the Kuramoto model of coupled oscillators. Phys. Rev. Lett., 1999, 82(3):648

[133] Ermentrout G B, Kopell N. Frequency plateaus in a chain of weakly coupled oscillators. I. SIAM J. Math. Anal, 1984, 15:215

[134] Kopell N, Ermentrout G. B. Comm. Symmetry and phaselocking in chains of weakly coupled oscillators. Pure Appl. Math., 1986, 39:623

[135] Ren L, Ermentrout G B. Phase locking in chains of multiple - coupled oscillators. Physica D, 2000, 143:56

[136] Strogatz S H, Mirollo R E. Collective synchronization in lattices of non - linear oscillators with randomness. J. Phys. A, 1998, 21:L699; Phase - locking and critical phenomena of coupled nonlinear oscillators with random intrinsic frequencies. Physica D, 1988, 31:143

[137] Rogers J L, Wille L T. Phase transition in nonlinear oscillator chains. Phys. Rev. E, 1996, 54(3):R2193

[138] Zheng Z,Hu G, Hu B. Phase slips and phase synchronization of coupled oscillators. Phys. Rev. Lett., 1998, 81:5318

[139] Zheng Z, Hu B Hu G. Collective phase slips and phase synchronizations in coupled oscillator systems. Phys. Rev. E, 2000, 62:402

[140] Hu B, Zheng Z. Phase synchronizations: transitions from high - to low

– dimensional tori through chaos. Int. J. Bif. & Chaos, 2000, 10:2399

[141] Zheng Z, Hu G. Hu B. Phase synchronization in coupled oscillators: dynamical manifestations. Chin. Phys. Lett., 2001, 18(7):874

[142] Sakaguchi H, Shinomoto S, Kuramoto Y. Local and global self – entrainments in oscillator lattices. Prog. Theor. Phys., 1987, 77(5):1005;Mutual entrainment in oscillator lattices with non – variational type interaction. Prog. Theor. Phys., 1988, 79: 1069

[143] Daido H. Quasientrainment and slow relaxation in a population of oscillators with random and frustrated interactions. Phys. Rev. Lett., 1992, 68(7): 1073

[144] Bonilla L L, Perez Vicente C J, Rubi J M. Glassy synchronization in a population of coupled oscillators. J. Stat. Phys., 1993, 70:921

[145] Park K, Rhee S W, Choi M Y. Glass synchronization in the network of oscillators with random phase shifts. Phys. Rev. E, 1998, 57(5):5030

[146] Hoppensteadt F C, Izhikevich E M. Oscillatory neurocomputers with dynamic connectivity. Phys. Rev. Lett., 1999, 82(14):2983

[147] Zheng Z. Frustration effect on phase synchronization and chaos in coupled limit cycles. Chin. Phys., 2001, 10:703

[148] Kaneko K. Collapse of tori and genesis of chaos in dissipative systems. Singapore: World Scientific,1986

[149] Lai Y C. Transition from strange nonchaotic to strange chaotic attractors. Phys. Rev. E, 1996, 53(1):57

[150] Aizawa Y. Synergetic approach to the phenomena of mode – locking in nonlinear systems. Prog. Theor. Phys., 1976, 56:703

[151] Yamaguchi Y, Shimizu H. Theory of self – synchronization in the presence of native frequency distribution and external noises. Physica D, 1984, 11: 212

[152] Shiino M, Frankowicz M. Infinitely many coupled limit – cycle type oscillators. Phys. Lett. A, 1989, 136:103

[153] Ermentrout G B. Oscillator death in populations of "all to all" coupled nonlinear oscillators. Physica D, 1990, 41:219

[154] Mirollo R E, Strogatz S H. Amplitude death in an array of limit – cycle oscillators. J. Stat. Phys., 1990, 60:245

[155] Matthews P C, Strogatz S H. Phase diagram for the collective behavior of limit – cycle oscillators. Phys. Rev. Lett., 1990, 65(14):1701

[156] Nekorkin V I, Makarov V A, Valarde M G. Clustering and phase resetting in a chain of bistable nonisochronous oscillators. Phys. Rev. E, 1998, 58 (5):5742

[157] Reddy D V R, Sen A, Johnston G L. Time delay induced death in coupled limit cycle oscillators. Phys. Rev Lett., 1998, 80(23):5109

[158] Chen G, Dong X. From chaos to order, methodologies, perspectives and applications. Singapore: World Scientific, 1998

[159] Heagy F J, Pecora L M, Carroll T L. Experimental and numerical evidence for riddled basins in coupled chaotic systems. Phys. Rev. Lett., 1994, 73 (26):3528

[160] Heagy J F, Pecora J F, Carroll T L. Short wavelength bifurcations and size instabilities in coupled oscillator systems. Phys. Rev. Lett., 1995, 74(21): 4185

[161] Pecora L M, Carroll T L. Master stability functions for synchronized coupled systems. Phys. Rev. Lett., 1998, 80(10):2109

[162] Matias M A, Perez-Munuzuri V, Lorenzo M N. Observation of a fast rotating wave in rings of coupled chaotic oscillators. Phys. Rev. Lett., 1997, 78 (2):219

[163] Lorenzo M N, Marino I P, Perez-Munuzuri V. Synchronization waves in arrays of driven chaotic systems. Phys. Rev. E, 1996, 54(4):R3094

[164] Sanchez E, Matias M A. Experimental observation of a periodic rotating wave in rings of unidirectionally coupled analog Lorenz oscillators. Phys. Rev. E, 1998, 57(5):6184

[165] Yang J, Hu G, Xiao J. Chaos synchronization in coupled chaotic oscillators with multiple positive Lyapunov exponents. Phys. Rev. Lett., 1998, 80 (3):496

[166] Hu G, Yang J, Liu W. Instability and controllability of linearly coupled oscillators: eigenvalue analysis. Phys. Rev. E, 1998, 58(4):4440

[167] Pecora L M. Synchronization conditions and desynchronizing patterns in coupled limit-cycle and chaotic systems. Phys. Rev. E, 1998, 58(1):347

[168] Zhan M, Hu G, Yang J. Synchronization of chaos in coupled systems. Phys. Rev. E, 2000, 62(2):2963

[169] Fink K S, Johnson G, Carroll T. Three coupled oscillators as a universal probe of synchronization stability in coupled oscillator arrays. Phys. Rev. E, 2000, 61(5):5080

[170] Afraimovich V S, Verichev N N, Rabinovich M I. Stochastic synchronization of oscillations in dissipative systems. Radiophys. Quantum Electron, 1986, 29:795

[171] Rulkov N F, Sushchik K M, Tsimring L S. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. Phys. Rev. E, 1995, 51(2):980

[172] Kocarev L, Parlitz U. Generalized synchronization, predictability and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems. Phys. Rev. Lett., 1996, 76(11):1816

[173] Abarbanel H D I, Rulkov N F, Sushchik M M. Generalized synchronization of chaos: the auxiliary system approach. Phys. Rev. E, 1996, 53(5):4528

[174] Hunt B R, Ott E, Yorke J. Differentiable generalized synchronization of chaos. Phys. Rev. E, 1997, 55(4):4029

[175] Pyragas K. Weak and strong synchronization of chaos. Phys. Rev. E, 1996, 54(5):R4508

[176] Liu Z, Chen S. Symbolic analysis of generalized synchronization of chaos. Phys. Rev. E, 1997, 56(6):7297

[177] Parmananda P. Generalized synchronization of spatiotemporal chemical chaos. Phys. Rev. E, 1997, 56(2):1595

[178] de Sousa Vieira M, Lichtenberg A J. Nonuniversality of weak synchronization in chaotic systems. Phys. Rev. E, 1997, 56(4):R3741

[179] Tang D, Dykstra R, Hamilton M W. Observation of generalized synchronization of chaos in a driven chaotic system. Phys. Rev. E, 1998, 57(5):5247

[180] Brown R. Approximating the mapping between systems exhibiting generalized synchronization. Phys. Rev. Lett., 1998, 81(22):4835

[181] Afraimovich V, Cordonet A, Rulkov N F. Generalized synchronization of chaos in noninvertible maps. Phys. Rev. E, 2002, 66:016208

[182] Parlitz U, Junge L, Kocarev L. Subharmonic entrainment of unstable period orbits and generalized synchronization. Phys. Rev. Lett., 1997, 79(17):3158

[183] Rulkov N F, Lewis C T. Subharmonic destruction of generalized chaos synchronization. Phys. Rev. E, 2001, 63:065204

[184] Rulkov N F, Afraimovich V S, Lewis C T. Multivalued mappings in generalized chaos synchronization. Phys. Rev. E, 2001, 64:016217

[185] Gonzólez – Miranda J M. Generalized synchronization in directionally coupled systems with identical individual dynamics. Phys. Rev. E, 2002, 65: 047202

[186] Zheng Z, Wang X, Cross M C. Transitions from partial to Complete generalized synchronizations in bidirectionally coupled chaotic oscillators. Phys. Rev. E, 2002, 65:056211

[187] He D, Stone L, Zheng Z. Analysis of generalized synchronization in directionally coupled chaotic phase oscillators by local minimal fluctuations. Phys. Rev. E, 2002, 66:036208

[188] He D, Zheng Z, Stone L. Detecting generalized synchrony: An improved approach. Phys. Rev. E, 2003, 67:026223

[189] Yalcinkaya T, Lai Y C. Phase characterization of chaos. Phys. Rev. Lett., 1996, 79(20):3885

[190] Hu G, Yang J, Ma W. Hopf bifurcation from chaos and generalized winding numbers of critical modes. Phys. Rev. Lett., 1998, 81(24):5314

[191] Gabor D. Theory of communication. J. IEE London, 1946, 93:429

[192] Panter P. Modulation, noise and spectral analysis. New York: McGraw – Hill,1965

[193] Smith M J. Introduction to digital signal processing. New York: Wiley, 1992

[194] Huang N E, Shen Z, Long S R. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non – stationary time series analysis. Proc. R. Soc. Lond. A, 1998, 454:903

[195] Mandelbrot B B. Fractal geometry of nature. New York: Freeman, 1983

[196] Pikovsky A S. Phase synchronization of chaotic oscillations by a periodic external field. Sov. J. Commun. Technol. Electron, 1985,30:85

[197] Stone E F. Frequency entrainment of a phase coherent attractor. Phys. Lett. A, 1992, 163:367

[198] Pikovsky A S, Rosenblum M G, Osipov G. Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving. Physica D, 1997, 104:219

[199] Rosa E, Hayes S, Grebogi C. Noise filtering in communication with chaos. Phys. Rev. Lett., 1997, 78(7):1247

[200] Vadivasova T E, Balanov Aa G,Sosnovtseva O V. Synchronization in driven chaotic systems: diagnostics and bifurcation. Phys. Lett. A, 1999, 253:66

[201] Schäfer C, Rosenblum M G, Kurths J. Heartbeat synchronized with ventilation. Nature, 1998, 392:239

[202] Zaks M A, Park E, Rosenblum M G. Alternating locking ratios in imperfect phase synchronization. Phys. Rev. Lett., 1999, 82(21):4228

[203] Park E, Zaks M A, Kurths J. Phase synchronization in the forced Lorenz system. Phys. Rev. E, 1999, 60(6):6627

[204] Pikovsky A, Osipov G, Rosenblum M. Attractor – repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization. Phys. Rev. Lett., 1997, 79(1):47

[205] Rosenblum M G, Pikovsky A S, Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators. Phys. Rev. Lett., 1996, 76(11):1804

[206] Fujigaki H, Shimada T. Phase synchronization and nonlinearity decision in the network of chaotic flows. Phys. Rev. E, 1997, 55(3):2426

[207] Funk G D, Valenzuela I J, Milsom W K. Energetic consequences of coordinating wingbeat and respiratory rhythms in birds. J. Exp. Biol., 1997, 200:915

[208] Tass P, Rosenblum M G, Weule J. Detection of n:m phase locking from noisy data: application to magnetoencephalography. Phys. Rev. Lett., 1998, 81(15):3291

[209] Lee K J, Kwak Y, Lim T K. Phase jumps near a phase synchronization transition in systems of two coupled chaotic oscillators. Phys. Rev. Lett., 1998, 81(2):321

[210] Tang D Y, Heckenberg N R. Synchronization of mutually coupled chaotic system. Phys. Rev. E, 1997, 55(6):6618

[211] DeShazer D J, Breban R, Ott E. Detecting phase synchronization in a chaotic laser array. Phys. Rev. Lett., 2001, 87(4):044101

[212] de Sousa Vieira M, Lichtenberg A J, Lieberman M A. Synchronization of regular and chaotic systems. Phys. Rev. A, 1992, 46(12):R7359

[213] Zheng Z. Phase – locking dynamics in coupled circle – map lattices. Comm. Theor. Phys., 2002, 37:557

[214] Osipov G, Pikovsky A, Kurths J. Phase synchronization of chaotic rotators. Phys. Rev. Lett., 2002, 88(5):054102

[215] Osipov G V, Kurths J. Regular and chaotic phase synchronization of coupled circle maps. Phys. Rev. E, 2002, 65:016216

[216] 郑志刚,胡岗,周昌松.耦合混沌系统的相同步:从部分同步到完全同

步.物理学报,2000, 49:2320

[217] Zheng Z, Zhou C. Alternate phase synchronization in coupled chaotic oscillators. Comm. Theor. Phys., 2002, 37:419

[218] Zheng Z, Hu G, Hu B. Phase desynchronization as a mechanism for transitions to high-dimensional chaos. Comm. Theor. Phys., 2001, 35:682

[219] Osipov G. V, Pikovsky A S, Rosenblum M G. Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators. Phys. Rev. E, 1997, 55(3): 2353

[220] Zhan M, Zheng Z, Hu G. Nonlocal chaotic phase synchronization. Phys. Rev. E, 2000, 62:3552

[221] Zheng Z, Hu G, Hu B. Enhancement of phase synchronization through asymmetric couplings. Phys. Rev. E, 2000, 62:7501

[222] Brunnet L, Chate H, Manneville P. Long-range order with local chaos in lattices of diffusively coupled SPES. Physica D, 1994, 78:141

[223] Goryachev A, Kapral R. Spiral waves in chaotic system. Phys. Rev. Lett., 1996, 76(10):1619

[224] Pikovsky A S, Rosenblum M G, Kurths J. Synchronization in a population of globally coupled chaotic oscillators. Europhys. Lett., 1996, 34(3):165

[225] Brunnet L, Chate H. Phase coherence in chaotic oscillatory media. Physica a, 1998, 257:347

[226] Blasius B, Huppert A, Stone L. Complex dynamics and phase synchronization in spatially extended ecological systems. Nature, 1999, 399:354

[227] Sakaguchi H. Phase transition in globally coupled Rössler oscillators. Phys. Rev. E, 2000, 61(6):7212

[228] Zhan M, Hu G, Zhang Y. Generalized splay state in coupled chaotic oscillators induced by weak mutual resonant interactions. Phys. Rev. Lett., 2001, 86(8):1510

[229] Hu G, Zhang Y, Cerdeira H A. From low-dimensional synchronous chaos to high-dimensional desynchronous spatiotemporal chaos in coupled systems. Phys. Rev. Lett., 2000, 85(16):3377

[230] Zhang Y, Hu G, Cerdeira H A. Partial synchronization and spontaneous spatial ordering in coupled chaotic systems. Phys. Rev. E, 2001, 63(2): 026211

[231] Zhang Y, Hu G, Cerdeira H A. How does a periodic rotating wav emerge from high-dimension chaos in a ring of coupled chaotic oscillators?. Phys.

Rev. E, 2001, 64(3):037203

[232] Parlitz U, Junge L, Lauterborn W. Experimental observation of phase synchronization. Phys. Rev. E, 1996, 54(2):2115

[233] Zheng Z, Hu G. Generalized synchronization versus phase synchronization. Phys. Rev. E, 2000, 62:7882

[234] Gao J, Zheng Z, He D. Transition to phase synchronization through generalized synchronization. Chin. Phys. Lett., 2003,20(7):999

[235] Rosenblum M G, Pikovsky A S, Kurths J. From phase to lag synchronization in coupled oscillators. Phys. Rev. Lett., 1997, 78(22):4193

[236] Yin H, Dai J, Zhang H. Phase effect of two coupled periodically driver Duffing oscillators. Phys. Rev. E, 1998, 58(5):5683

[237] Taherion S, Lai Y. Observability of lag synchronization of coupled chaotic oscillators. Phys. Rev. E, 1999, 59(6):R6247

[238] Sosnovtseva O V, Balanov A G, Vadivasova T E. Loss of lag synchronization in coupled chaotic system. Phys. Rev. E, 1999, 60(6):6560

[239] Boccaletti S, Valladares D L. Characterization of intermittent lag synchronization. Phys. Rev. E, 2000, 62(5): 7497~7500

[240] Zhu L, Lai Y. Experimental observation of generalized time-lagged chaotic synchronization. Phys. Rev. E, 20001, 64(4):045205

[241] Zhan M, Wei G W, Lai C. Transition from intermittency to periodicity in lag synchronization in coupled Rössler oscillators. Phys. Rev. E, 2002, 65 (3):036202

[242] Hampton A, Zanette D H. Measure synchronization in coupled Hamiltonian systems. Phys. Rev. Lett., 1999, 83(11):2179~2182

[243] Wang X, Li H, Hu K. Partial measure synchronization in Hamiltonian systems. Int. J. Bif. & Chaos, 2002, 12:1141

[244] Kaneko K. Chaotic but regular Posi-Nega switch among coded attractors by Cluster-size Variation. Phys. Rev. Lett., 1989, 63(3):219~223

[245] Konishi T, Kaneko K. Diffusion in Hamiltonian chaos and its size dependence. J. Phys. A, 1990, 23: L715~L720; Clustered motion in symplectic coupled map systems. J. Phys. A, 1992, 25:6283~6297

[246] Crisanti A, Falcioni M, Vulpiani A. Broken ergodicity and glassy behavior in a deterministic chaotic Map. Phys. Rev. Lett., 1996, 76(4):612~615

[247] Zheng Z, Li X. Clustering behavior in globally coupled rotator systems. Comm. Theor. Phys., 1999, 32:367

[248] Ginzburg V L, Landau L D. On the theory of superconductivity. Zh. Eksp. Teor. Fiz., 1950, 20:1064

[249] Aranson I S, Kramer L. The world of the complex Ginzburg – Landau equation. Rev. Mod. Phys., 2002, 74:99～143

[250] Chate H, Hohenberg P. Phase diagram of the two – dimensional complex Ginzburg – Landau equation. Physica A, 1996, 224:348

[251] Van Saarloos W, Hohenberg P. Fronts, pulses, sources and sinks in generalized complex Ginzburg – Landau equation. Physica D, 1992, 56:303

[252] Montagne R, Hernández – García E, Amengual A. Wound – up phase turbulence in the complex Ginzburg – Landau equation. Phys. Rev. E, 1997, 56(1):151～167

[253] Amengual A, Hernández – García E, Montagne R. Synchronization of spatiotemporal chaos: the regime of coupled spatiotemporal intermittency. Phys. Rev. Lett., 1997, 78(23):4379～4382

[254] Boccaletti S, Bragard J, Arecchi F T. Synchronization in nonidentical extended systems. Phys. Rev. Lett., 1999, 83(3):536～539

[255] Chaté H, Pikovsky A, Parlitz U. Forcing oscillatory media: phase kinks VS synchronization. Physica D, 1999, 131:17

[256] Junge L, Parlitz U. Phase synchronization of coupled Ginzburg – Landau equations. Phys. Rev. E, 2000, 62(1):438～441

[257] Kocarev L, Parlitz U. Synchronizing spatiotemporal chaos in coupled nonlinear oscillators. Phys. Rev. Lett., 1996, 77(11):2206～2209

[258] Kocarev L, Tasev Z, Parlitz U. Synchronizing spatiotemporal chaos of partial differential equation. Phys. Rev. Lett., 1997, 79(1):51～54

[259] Kiss L, Gingl Z, Marton Z. 1/f noise in systems showing stochastic resonance. J. Stat. Phys., 1993, 70:451

[260] Pantazelou E, Moss F, Chialvo D. In noise in physical systems and 1/f fluctuations. edited by Handel P, Chung A. New York: AIP Press, 1993

[261] Bulsara A R, Schmera G. Stochastic resonance in globally coupled nonlinear oscillators. Phys. Rev. E, 1993, 47(5):3734～3737

[262] Bulsara A, Maren A, Schmera G. Single effective neuron: dendritic coupling effects and stochastic resonance. Biol. Cyb., 1993, 70:145

[263] Inchiosa M E, Bulsara A R. Nonlinear dynamic elements with noisy sinusoidal forcing: enhancing response via nonlinear coupling. Phys. Rev. E, 1984, 52(1):327～339

[264] Lindner J, Meadows B, Ditto W. Array enhanced stochastic resonance and spatiotemporal synchronization. Phys. Rev. Lett., 1995, 75:3

[265] Wio H S. Stochastic resonance in a spatially extended system. Phys. Rev. E, 1996, 54(4):R3075～R3078

[266] Rappel W J, Karma A. Noise－induced coherence in neural networks. Phys. Rev. Lett., 1996, 77(15):3256～3259

[267] Gluckman B J, Netoff T I, Neel E J. Stochastic resonance in a neuronal network from mammalian brain. Phys. Rev. Lett., 1996, 77(19):4098～4101

[268] Neiman A, Schimansky－Geier L, Moss F. Linear response theory applied to stochastic resonance in models of ensembles of oscillators. Phys. Rev. E, 1997, 56(1):R9～R12

[269] Gade P M, Rai R, Singh H. Stochastic resonance in maps and coupled map lattices. Phys. Rev. E, 1997, 56(3):2518～2526

[270] Castelpoggi F, Wio H S. Stochastic Resonant media: effect of local and nonlocal coupling in reaction－diffusion models. Phys. Rev. E, 1998, 57(5):5112～5121

[271] Kuperman M N, Wio H S, Izús G. Stochastic resonant media: signal－to－noise ratio for the activator－inhibitor system through a quasivariational approach. Phys. Rev. E, 1998, 57(5):5122～5125

[272] Haeften B V, Deza R, Wio H S. Enhancement of stochastic resonance in distributed systems due to a selective coupling. Phys. Rev. Lett., 2000, 84(3):404～407

[273] Lindner J F, Meadows B K, Ditto W L. Scaling laws for spatiotemporal synchronization and array enhanced stochastic resonance. Phys. Rev. E, 1996, 53(3):2081～2086

[274] Lindner J F, Breen B J, Wills M E. Monostable array－enhanced stochastic resonance. Phys. Rev. E, 2001, 63:051107－1～951107－6

[275] Marchesoni F, Gammaitoni L, Bulsara A. Spatiotemporal stochastic resonance in a model of kink－antikink nucleation. Phys. Rev. Lett., 1996, 76(15):2609～2612

[276] Currie J F, Krumhansl J A, Bishop A R. Statistical mechanics of one－dimensional solitary－wave－bearing scalar fields: exact results and ideal－gas phenomenology. Phys. Rev. B, 1980, 22(2):477～496

[277] Rajaraman R. Soliton and instantons. Amsterdam: North－Holland,

1982

[278] Marchesoni F. Harmonic mixing signal: doubly dithered ring laser gyroscope. Phys. Lett. A, 1986, 115:29

[279] McLaughlin D W, Scott A C. Perturbation analysis dynamics. Phys. Rev. A, 1978,18(4):1652~1680

[280] Marchesoni F. Internal friction by pinned dislocations: theory of the bordoni peak. Phys. Rev. Lett., 1995, 74(15):2973~2976

[281] Langer J S. Statistical theory of the decay of metastable states. Ann. Phys., 1969, 54:258~275

[282] Löcher M, Johnson G A, Hunt E R. Spatiotemporal stochastic resonance of coupled diode resonators. Phys. Rev. Lett., 1996, 77(23):4698~4701

[283] Löcher her M, Cigna D, Hunt E R. Stochastic resonance in coupled nonlinear dynamic elements. Chaos, 1998, 8(3):604~615

[284] Rollins R W, Hunt E R. Exactly solvable model of physical system exhibiting universal chaotic behavior. Phys. Rev. Lett., 1982, 49(18):1295~1298

[285] Johnson G A, Löcher M, Hunt E R. Stabilized spatiotemporal waves in a convectively unstable open flow system: coupled diode resonators. Phys. Rev. E, 1996, 51(3):R1625~R1628

[286] Vilar J M G, Rubi J M. Spatiotemporal stochastic resonance in the Swift-Hohenberg equation. Phys. Rev. Lett., 1976, 78(15):2886~2889

[287] Swift J B, Hohenberg P C. Hydrodynamic fluctuations at the convective instability. Phys. Rev. A, 1977, 15(1):319~328

[288] Hohenberg P C, Swift J B. Effects of additive noise at the onset of Rayleigh-Benard convection. Phys. Rev. A, 1992, 46(8):4773~4785

[289] Bruce A D. Structural phase transitions. Adv. Phys., 1980, 29:111

[290] Dewel G, Borckmanns P, Walgraef D. Turbulent mixing and bistability in chemical systems. Phys. Rev. A, 1985, 31(3):1983~1985

[291] Shiino M. Ddynamical behavior of stochastic of infinitely many coupled nonlinear oscillators exhibiting phase transitions of mean-field type: H theorem on asymptotic approach to equilibrium and critical slowing down of order-parameter fluctuations. Phys. Rev. A, 1987, 36(5):2393~2412

[292] Wiesenfeld K. Amplification by globally coupled arrays: coherence and symmetry. Phys. Rev. A, 1991, 44(6):3543~3551

[293] Jung P, Behn U, Pantazelou E. Collective response in globally coupled bistable systems. Phys. Rev. A, 1991, 46(4):R1809~R1712

[294] Wiesenfeld K, Bracikowski C, James G. Observation of antiphase states in a multimode laser. Phys. Rev. Lett., 1990, 65(14):1749~1752

[295] Morillo M, Gomez-Ordonez J, Casado J M. Stochastic resonance in a mean-field model of cooperative behavior. Phys. Rev. E, 1995, 52(1):316~320

[296] Gang W, Haken H, Fagen X. Stochastic resonance with sensitive frequency dependence in globally coupled continuous systems. Phys. Rev. Lett., 1996, 77(10):1925~1928

[297] Zhang Y, Hu G, Liu H. Collective behavior in globally coupled systems consisting of two kinds of competing cells. Phys. Rev. E, 1998, 57(3):2543~2548

[298] Zaikin A A, Kurths J, Schimansky-Geier L. Doubly stochastic resonance. Phys. Rev. Lett., 2000, 85(2):227~231

[299] Van den Broeck C, Parrondo J M R, Toral R. Noise-induced nonequilibrium phase transition. Phys. Rev. Lett., 1994, 73(25):3395~3398

[300] Van den Broeck C, Parrondo J M R, Toral R. Nonequilibrium phase transitions induced by multiplicative noise. Phys. Rev. E, 1997, 55(4):4084~4094

[301] Zaikin A A, Schimansky-Geier L. Spatial patterns induced by additive noise. Phys. Rev. E, 1998, 58(4):4355~4360

[302] Mangioni S, Deza R, Wio H S. Disordering effects of color in nonequilibrium phase transitions induced by multiplicative noise. Phys. Rev. Lett., 1997, 79(13): 2389~2393

[303] Gao Z, Hu B, Hu G, Stochastic resonance of small-world networks. Phys. Rev. E, 2001, 65:012609-1~012609-4

[304] Kim S, Park S H, Pyo H B. Stochastic resonance in coupled oscillator systems with time delay. Phys. Rev. Lett., 1999, 82(2):1620~1623

[305] Löcher M, Cigna D, Hunt E R. Noise sustained propagation of a signal in coupled bistable electronic elements. Phys. Rev. Lett., 1998, 80(23):5212~5215

[306] Zhang Y, Hu G, Gammaitoni L. Signal transmission in one-way coupled bistable systems: noise effect. Phys. Rev. E, 1998, 58(3):2952~2956

[307] Lindner J F, Chandramouli S, Bulsara A R. Noise enhanced propagation. Phys. Rev. Lett., 1998, 81(23): 5048~5051

[308] Sarmiento A, Reigada R, Romero A H. Enhanced pulse propagation in

nonlinear arrays of oscillators. Phys. Rev. E, 1999, 60(5):5317～5326

[309] Perazzo R, Romanelli L, Deza R. Fault tolerance in noise - enhanced propagation. Phys. Rev. E, 2000, 61(4):R3287～R3290

[310] Löcher M, Chatterjee N, Marchesoni F. Noise sustained propagation: local versus global noise. Phys. Rev. E, 2000, 61(5):4954～4961

[311] Stocks N G. Information transmission in parallel threshold arrays: suprathreshold stochastic resonance. Phys. Rev. E, 2001, 63:041114 - 1～041114 - 9

[312] Reigada R, Sarmiento A, Lindenberg K. Thermal resonance in signal transmission. Phys. Rev. E, 2001, 63:066113 - 1～066113 - 12

[313] Báscones R, García - Ojalvo J, Sancho J M. Pulse propagation sustained by noise in arrays of bistable electronic circuits. Phys. Rev. E, 2002, 65: 061108 - 1～061108 - 5

[314] Zaikin A A, García - Ojalvo J, Schimansky - Geier L. Noise induced propagation in monostable media. Phys. Rev. Lett., 2002, 88(1): 010601 - 1～010601 - 4

[315] Dowling J E. Neurons and networks: an introduction of neuroscience Cambridge, Massachusetts: Harvard Uni. Press, 1992

[316] 欧阳颀.反应扩散系统中的斑图动力学.上海:上海科技教育出版社, 2000

[317] FitzHugh R. Impulses and physiological states in models of nerve membrane. Biophys. J., 1961, 1:445～466

[318] Nagumo J S, Arimoto S, Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axom. Proc., 1962, 50:2061

[319] Gong P, Xu J. Global dynamics and stochastic resonance of the forced fitzhugh - nagumo neuron model. Phys. Rev. E, 2001, 63:031906 - 1～031906 - 10

[320] Hodgkin A L, Huxley A F. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. J Physiol(London), 1952, 117:500 - 544

[321] Field R J, Burger M. Oscillations and traveling waves in chemical systems. New York: Wiley, 1985

[322] Kapral R, Showalter K, eds. Chemical waves and patterns. Dordrecht: Kluwer Academic, 1993

[323] Field R J, Koros E, Noyes R M. Oscillations in chemical systems Ⅱ thorough analysis of temporal oscillations in the bromate - cerium - malonic acid

system. J Am. Chem. Soc, 1972, 94:8649

[324] Belousov B P. Referatov po radiatsionni meditsine. Moscow: Medgiz, 1958

[325] Zaikin A N, Zhabotinsky A M. Concentration wave propagation in two－dimensional liquid－phase self－oscillating system. Nature, 1970, 225:535

[326] Winfree A T. Spiral waves of chemical activity. Science, 1972, 175: 634～636

[327] Kuhnert L, Agladeze K I, Krinsky V I. Image processing using light－sensitive chemical waves. Nature, 1989, 337:244～247

[328] Krug H J, Pohlmann L, Kuhnert L. Analysis of the modified complete oregonator accounting for oxygen sensitivity and photosensitivity of Belousove－Zhabotinsky systems. J Phys. Chem., 1990, 94:4862～4866

[329] Field R J, Noyes R M. Oscillations in chemical systems 4. Limit cycle behavior in a model of a real chemical reaction. J. Chem. Phys., 1973, 60:1877

[330] Tyson J J, Fife P C. Target patterns in a realistic model of the Belousove－Zhabotinskii reaction. J. Chem. Phys., 1980, 73:2224～2237

[331] Kuhnert L. A new optical photochemical memory device in a light－sensitive chemical active medium. Nature, 1986, 319:393～394

[332] Tóth A, Gáspár V, Showalter K. Signal transmission in chemical systems: propagation of chemical waves through capillary. J. Phys. Chem., 1994, 98:522～531

[333] Tyson J J, Keener J P. Singular perturbation theory of traveling waves in excitable media (a review). Physcia D, 1987, 29:215

[334] Keener J P. The dynamics of three－dimension scroll waves in excitable media. Physica D, 1988, 31:269

[335] Fife P C. Understanding the patterns in the BZ reagent. J. Stat. Phys., 1985, 39:687

[336] Galss L, Josephson M E. Resettng and annihilation of reentrant abnormally rapid heartbeat. Phys. Rev. Lett., 1995, 75(10):2059～2062

[337] Nagai Y, Gonzalez H, Shrier A. Paroxysmal starting and stopping of circulating waves in excitable media. Phys. Rev. Lett., 2000, 84:4248～4251

[338] Ouyang Q, Flesselles J M. Transition from spirals to turbulence. Nature, 1996, 379:143

[339] Petrov V, Ouyang Q, Swinney H L. Resonant pattern formation in achemical system. Nature, 1997, 388:655～657

[340] Zheng Z, Cross M. Defect - induced propagation in excitable media. Int. J. Bif. & Chaos, 2003 (in press)

[341] Hu G, Ditzinger T, Ning C Z. Stochastic resonance without external periodic force. Phys. Rev. Lett., 1993, 71:807～810

[342] Sigeti D, Horsthemke W. The twist map, the extended Frenkel Kontorova model and the Devil's staircase. J. Stat. Phys, 1989, 54:1217

[343] Pikovsky A S, Kurths J. Coherence resonance in a noise - driven excitable system. Physica Review Letters, 1997, 78:775～778

[344] Neiman A, Saparin P I, Stone L. Coherence resonance at noisy precursors of bifurcations in nonlinear dynamical systems. Phys. Rev. E, 1997, 56:270～273

[345] Lee S G, Neiman A, Kim S. Coherence resonance in a Hodgkin - Huxley neuron. Phys. Rev. E, 1998, 57:3292～3297

[346] Ohira T, Sato Y. Resonance with noise and delay. Phys. Rev. Lett., 1999, 82:2811～2815

[347] Pradines J R, Osipov G V, Collins J J. Coherence resonance in excitable and oscillatory systems: the essential role of slow and fast dynamics. Phys. Rev. E, 1999, 60:6407～6410

[348] Lindner B, Schimansky - Geier L. Analytical approach to the stochastic FitzHugh - Nagumo system and coherence resonance. Phys. Rev. E, 1999, 60:7270 ～ 7276; Coherence and stochastic resonance in a two - state system. Phys. Rev. E, 2000, 61:6103～6110

[349] Yu Y, Wang W, Wang W. Resonance - enhanced signal detection and transduction in the Hodgkin - Huxley neuronal systems. Phys. Rev. E, 2001, 63:021907

[350] Hu B, Zhou C. Phase synchronization in coupled nonidentical excitable systems and array - enhanced coherence resonance. Phys. Rev. E, 2000, 61: R1001～R1004; Symmetry - breaking on - off intermittency under modulation: Robustness of supersensitivity, resonance, and information gain. Phys. Rev. E, 2000, 62:1983

[351] Egula M C, Mindlin G B. Distribution of interspike times in noise - driven excitable systems. Phys. Rev. E, 2000, 61:6490～6499

[352] Baltanas J P, Casado J M. Bursting behaviour of the FitzHugh - Nagumo neuron model subject to quasi - monochromatic noise. Physica D, 1998, 122:231～240

[353] Makarov V A, Nekorkin V I, Velarde M G. Spiking behavior in a

noise - driven system combining oscillatory and excitatory properties. Phys. Rev. Lett., 2001, 86:3431~3434

[354] Longtin A, Chialvo D R. Stochastic and deterministic resonances for excitable systems. Phys. Rev. Lett., 1998, 81:4012~4015

[355] Kàdàr S, Wang J, Showalter K. Noise - supported travelling waves in sub - excitable media. Nature, 1998, 391:770~772

[356] Sendiña - Nadal I, Muñuzuri A P, Vives D. Wave propagation in a medium with disordered excitability. Phys. Rev. Lett., 1998, 80:5437~5440

[357] Zhou L Q, Jia X, Ouyang Q. Experimental and numerical studies of noise - induced coherent patterns in a subexcitable system. Phys. Rev. Lett., 2002, 88:138301

[358] Wang J, Kàdàr S, Jung P. Noise driven avalanche behavior in subexcitable media. Phys. Rev. Lett., 1999, 82:855~858

[359] Bak P, Tang C, Wiesenfeld K. Self - organized criticality: an explanation of the 1/f noise. Phys. Rev. Lett., 1987, 59:381~384

[360] Bak P, Chen K, Creutz M. Self - organized criticality in the "Game of Life". Nature, 1989, 342:780

[361] Jung P. Thermal waves, criticality and self - organization in excitable media. Phys. Rev. Lett., 1997, 78:1723~1726

[362] Jung P, Mayer - Kress G. Spatiotemporal stochastic resonance in excitable media. Phys. Rev. Lett., 1995, 74:2130~2133

[363] Jung P, Cornell - Bell A, Moss F. Noise Sustained waves in subexcitable media:From chemical waves to brain waves. Chaos, 1998, 8:567

[364] Sanz - Anchelergues A, Zhabotinsky A M, Epstein I R. Turing pattern formation induced by spatially correlated noise. Phys. Rev. E, 2001, 63:056124

[365] Hou Z, Yang L, Zuo X. Noise induced pattern transition and spatiotemporal stochastic resonance. Phys. Rev. Lett., 1998, 81:2854~2857

[366] Barkley D. A model for fast computer simulation of waves in excitable media. Physica D, 1991, 49:61

[367] Alonso S, Sendiña - Nadal I, Pérez - Muñuzuri V. Regular wave propagation out of noise in chemical active media. Phys. Rev. Lett., 2001, 87:078302

[368] Neiman A, Schimansky - Geier L, Cornell - Bell A. Noise - enhanced phase synchronization in excitable media. Phys. Rev. Lett., 1999, 83:4896~

4899

[369] Zhou C, Kurths J, Hu B. Array – enhanced coherence resonance: nontrivial effects of heterogeneity and spatial independence of noise. Phys. Rev. Lett., 2001, 87:098101

[370] Lai Y, Liu Z. Noise – enhanced temporal regularity in coupled chaotic oscillators. Phys. Rev. E, 2001, 64:066202

[371] Zhou C, Kurths J. Spatiotemporal coherence resonance of phase synchronization in weakly coupled chaotic oscillators. Phys. Rev. E, 2002, 65: R040101

[372] 冯端,金国钧.凝聚态物理学新论.上海:上海科技出版社,1992

[373] Yeomans J M. Solid state physics (vol. 41). edited by Ehrenreich H, Turnbull D. New York: Academic, 1988

[374] Kivshar Y, Malomed B. Dynamics of solitons in nearly integrable systems. Rev. Mod. Phys., 1989, 61:763～915

[375] Remoissenet M. Waves called solitons, concepts and experiments. Berlin: Springer – Verlag, 1994

[376] Frenkel J, Kontorova T. On the theory of plastic deformation and twinning. Phys. Z. Sowjetunion, 1938, 13:1

[377] Aubry S. Trajectories of the twist map with minialk action and connection with incommensurate structures. Physics. Report, 1984, 103:12

[378] Selke W. The annni model – theoretical analysis and experimental application. Physics. Report, 1988, 170:213

[379] Floria L, Mazo J. Dissipative dynamics of the Frenkel – Kontorova model. Adv. Phys. 1996, 45:505

[380] Fisher D S. Threshold behavior of charge – density waves pinned by impurities. Phys. Rev. Lett., 1983, 50:1486～1489; Sliding charge – density waves as a dynamic critical phenomenon. Phys. Rev. B, 1985, 31:1396～1427

[381] Coppersmith S. Dynamics of an incommensurate harmonic chain. Phys. Rev. B, 1984, 30:410～412

[382] Coppersmith S, Fisher D. Threshold behavior of a driven incommensurate harmonic chain. Physical Review A, 1988, 38:6338～6350

[383] Sneddon L, Cox K. Oscillatory instability in the dynamics of incommensurate structures. Physical Review Letters, 1987, 58:1903～1905

[384] Sneddon L, Liu S. Renormalization – group theory of the incommensurate pinning transition and threshold dynamics. Phys. Rev. B, 1991, 43:5798～

5804

[385] Floria L, Falo F. Shapiro steps in the steady - state dynamics of incommensurate structures. Phys. Rev. Lett., 1992, 68:2713~2717

[386] Falo F, Floria L, Martinez P. Unlocking mechanism in the ac dynamics of the Frenkel - Konorvoa model. Phys. Rev. B, 1993, 48(10):7434~7437

[387] Mazo J, Falo F, Floria L. Stability of metastable structures in dissipative ac dynamics of the Frenkel - Kontorova model. Phys. Rev. B, 1995, 52(9): 6451~6457

[388] Zant H, Orlando T, Watanabe S, Strogatz S. Kink propagation in a highly discrete system: observation of phase locking to linear waves. Phys. Rev. Lett., 1995,74(1):174~177

[389] Ustinov A, Cirillo M, Malomed B. Fluxon dynamics in one - dimensional Josephson - junction arrays. Phys. Rev. B, 1993, 47(13):8357~8360; Experimental and numerical study of dynamic regimes. Phys. Rev. B, 1995, 51 (5):3081~3091

[390] Watanabe S, Zant H, Strogatz S. Dynamics of circular arrays of Josephson junctions and the discrete sine - Gordon equation. Physica D, 1996, 97: 429

[391] Watanabe S, Strogatz S, Zant H. Whirling modes and parametric instabilities in the discrete sine - Gordon equation: experimental tests in Josephson rings. Phys. Rev. Lett., 1995, 74(3):379~382

[392] Ryu S, Yu W, Stroud D. Dynamics of an underdamped Josephson - junction ladder. Phys. Rev. E, 1996, 53(3):2190~2195

[393] Kim B, Kim S, Lee S. Defect motions and smearing of Shapiro steps in Josephson - junction ladders. Phys. Rev. B, 1995, 51(13):8462~8466

[394] Kim J, Choe W, Kim S, Lee H. Dynamics of Josephson - junction ladders. Phys. Rev. B, 1994, 49(1):459~464

[395] Persson B N J. Sliding friction: principles and applications. Heidelberg:Springer - Verlag, 1998

[396] Persson B N J. Theory and simulation of sliding friction. Phys. Rev. Lett., 1993, 71(8):1212~1215

[397] Krupenkin T N, Taylor P L. Microscopic theory of chain pullout in polymeric liquid crystals. Phys. Rev. B, 1995, 52(9):6400~6410

[398] Weiss M, Elmer F J. Dry friction in the Frenkel - Kontorova - Tomlinson model: static properties. Phys. Rev. B, 1996, 53(11):7539~7549

[399] Elmer F J. Avalanches in the weakly driven Frenkel - Kontorova model. Phys. Rev. E, 1994, 50(6):4470～4487; Self - organized criticality in the weekly driven Frenkel - Kontorova model. Helv. Phys. Acta, 1993, 66:99

[400] Peyrard M, Aubry S. Critical behavior at the transition by breaking of analyticity in the discrete Frenkel - Kontorova model. J. Phys. C, 1983, 16:1593～1608

[401] Meiss J D. Symplectic maps, variational principles and transport. Rev. Mod. Phys., 1992, 64(9):795～848

[402] Aubry S. The twist map, the extended Frenkel - Kontorova model and the devil's staircase. Physica D, 1983, 7:240

[403] Coppersmith S, Fisher D. Pinning transition of the discrete sine - Gordon equation. Phys. Rev. B, 1983, 28(5):2566～2581

[404] Chou W, Griffiths R B. Ground states of one - dimensional systems using effective potentials. Phys. Rev. B, 1986, 34(9):6219～6234

[405] Griffiths R B, Chou W. Effective potentials: a new approach and new results for one - dimensional systems with competing length scales. Phys. Rev. Lett., 1986, 56(18):1929～1931

[406] Biham O, Mukamel D. Global universality in the Frenkel - Kontorova model. Phys. Rev. A, 1989, 39(10):5326～5335

[407] de Seze L, Aubry S. Critical behavior at the transition by breaking of analyticity and application to the Devil's staircase. J. Phys. C, 1984, 17:389～403

[408] Mackay R S. Renormalization in area - preserving maps. Singapore: World Scientific, 1993

[409] Middleton A, Fisher D. Critical behavior of pinned charge - density waves below the threshold for sliding. Phys. Rev. Lett., 1991, 66(1):92～95; Critical behavior of charge - density waves below threshold: numerrical and scaling analysis. Phys. Rev. B, 1993, 47(7):3530～3552

[410] Middleton A A. Asymptotic uniqueness of the sliding state for charge - density waves. Phys. Rev. Lett., 1992, 68(5):670～673

[411] Sneddon L. Sliding dynamics of the incommensurate chain. Phys. Rev. Lett., 1984, 52(1):65～68; Dynamics of incommensurate structures: an exact solution. Phys. Rev. B, 1984, 30(4):2974～2976

[412] Coppersmith S. Overdamped Frenkel - Kontorova model with randomness as a dynamical system: mode locking and derivation of discrete maps. Phys.

Rev. A, 1987, 36(7):3375~3382

[413] Coppersmith S, Littlewood P. Interference phenomena and mode locking in the model of deformable sliding charge - density waves. Phys. Rev. Lett., 1986, 57(15):1927~1930; Pulse - duration memory effect and deformable charge - density waves. Phys. Rev. B, 1987, 36(1):311~317

[414] Tang C, Wiesenfeld K, Bak P. Phase organization. Phys. Rev. Lett., 1987, 58(12):1161~1164

[415] Maginu K. Spatially homogeneous and inhomogeneous oscillations and chaotic motion in the active Josephson junction line. J SIAM J. Appl. Math, 1983, 43:225

[416] Marcus P M, Imry Y. Steady oscillatory stales of a finite Josephson junction. Sol. State Comm., 1980 ,33:345

[417] Maginu K J. Differential equations. 1980, 37:238

[418] Berkov S E, Lifsic A E. Wave motions. Phys. Lett. A, 1984, 106:71

[419] Currie J, Trullinger S, Bishop A. Numerical simulation of sine - Gordon soliton dynamics in the presence of perturbations. Phys. Rev. B, 1977, 15(12):5567~5580

[420] Peyrard M, Kruskal M. Kink dynamics in the highly discrete sine - Gordon. Physica D, 1984, 14:88

[421] Boesch R, Willis C R, El - Batanouny M. Spontaneous emission of radiation from a discrete sine - Gordon kink. Phys. Rev. B, 1989, 40(4):2284~2296

[422] Boesch R, Willis C R. Exact determination of the Peieris - Nabarro frequency. Phys. Rev. B, 1989, 39(1):361~368

[423] Zheng Z, Hu B, Hu G. Resonant steps and spatiotemporal dynamics in the damped dc - driven Frenkel - Kontorova chain. Phys. Rev. B, 1998, 58:5453

[424] Zheng Z. Discrete breathers in lattices of coupled oscillators. Comm. Theor. Phys., 2001, 35:137

[425] Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear Oscillations. New York: Wiley, 1979

[426] Zheng Z, Hu B. Collective topological dynamics in the Frenkel - Kontorova chains. Phys. Rev. E, 2000, 62:4294

[427] Braun O M, Bishop A R, Roder J. Hysteresis in the underdamped driven Frenkel - Kontorova model. Phys. Rev. Lett., 1997, 79(19):3692~

3695

[428] Munakata T. Kink dynamics and kink – pair nucleation in the discrete Frenkel – Kontorova model. Phys. Rev. A, 1992, 45(2):1230～1237

[429] Strunz T, Elmer F J. Driven Frenkel – Kontorova model. Ⅰ. Uniform sliding states and dynamical domains of different particle densities. Phys. Rev. E, 1998, 58(2):1601～1611; Driven Frenkel – Kontorova model. Ⅱ. Chaotic sliding and nonequilibrium melting and freezing. Phys. Rev. E, 1998, 58(2):1612～1620

[430] Dmitriev S V, Miyauchi T, Abe K. Kink – breathers solution in the weakly discrete Frenkel – Kontorova mode. Phys. Rev. E, 2000, 61(5):5880～5885

[431] Braun O M, Hu B, Zeltser A. Driven kink in the Frenkel – Kontorova model. Phys. Rev. E, 200, 62(3):4235～4245

[432] Braun O M. Supersonic and multiple topological excitations in the driven Frenkel – Kontorova model with exponential interaction. Phys. Rev. E, 2000, 62(5):7315～7319

[433] Consoli L, Knops H J F, Fasolino A. Onset of sliding friction in incommensurate systems. Phys. Rev. Lett., 2000, 85(2):302～305

[434] Braun O M, Paliy M V, Röder J. Locked – to – running transition in the two – dimensional underdamped driven Frenkel – Kontorova model. Phys. Rev. E, 2001, 63:036129

[435] Zheng Z. Multistable spatiotemporal dynamics in the driven Frenkel – Kontorova lattice. Comm. Theor. Phys., 2001, 36:37

[436] Takeno S, Homma S J. Self – localized anharmonic rotational models of bases in DNA. Phys. Soc. Jpn., 1990, 59:1890

[437] Wang X Y, Taylor P L. Devil's staircase, critical thickness and propagating fingers in antiferroelectric liquid crystals. Phys. Rev. Lett., 1996, 76(4):640～643

[438] Yokoi C, Tang L, Chou W. Ground state of the one – dimensional chital XY model in a field. Phys. Rev. B, 1988, 37(4):2173～2198

[439] Antoni M, Ruffo S. Clustering and relaxation in Hamiltonian long – range dynamics. Phys. Rev. E, 1995, 52(3):2361～2347

[440] Zheng Z, Hu B, Hu G. Spatiotemporal dynamics of discrete sine – Gordon lattices with sinusoidal couplings. Phys. Rev. E, 1998, 57:1139

[441] Zheng Z. Discrete breathers in lattices of coupled oscillators. Comm.

Theor. Phys., 2001, 35:137

[442] MacKay R S, Aubry S. Proof of existence of breathers for time - reversible of Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators. Nonlinearity, 1994, 7:1623~1643

[443] Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: existence, linear stability and quantization. Physica D, 1997, 103:201

[444] Marín J L. Breathers in nonlinear lattices: existence linear stability and quantization. Intrinsic localized modes in nonlinear lattices. Spain: University of Zaragoza, 1997

[445] Flach S, Willis R C. Discrete breathers. Phys. Rep., 1998, 295:181

[446] Marín J L, Falo F, Martínez P J. Discrete breathers in dissipative lattices. Phys. Rev. E, 2001, 63:066603

[447] Schneider T, Stoll E P, Morf R. Brownian motion of interacting and noninteracting particles subject to a periodic potential and driven by an external field. Phys. Rev. B, 1978, 18(3):1417~1424

[448] Guyer R A, Miller M D. The sine - Gordon chain. II. Nonequilibrium statistical mechanics. Phys. Rev. A, 1978, 17(5):1774~1791

[449] Schneider T, Stoll E. Dynamics of the sine - Gordon chain. Phys. Rev. Lett., 1978, 41(21):1429~1432; Classical statistical mechanics of the sine - Gordon and $\Phi^4$ chains: static properties. Phys. Rev. B, 1980, 22(11):5317~5338

[450] Mazroui M, Boughaleb Y. Interacting Brownian particles in a two dimensional periodic potential. Physica A, 1996, 227:93

[451] Braun O M, Dauxios T, Paliy M V. Dynamical transitions in correlated driven diffusion in a periodic potential. Phys. Rev. Lett., 1997, 78(7):1295~1298

[452] Zheng Z, Hu B, Hu G. Array - induced collective transport in the Brownian motion of coupled nonlinear oscillator systems. Phys. Rev. E, 1998, 58:7085

[453] Besseling R, Niggebrugge R, Kes P H. Transport properties of vortices in easy flow channels: a Frenkel - Kontorova study. Phys. Rev. Lett., 1999, 82(15):3144~3147

[454] Kreuzer H J, eds. Nonequilibrium thermodynamics and its statistical foundations. Oxford: Clarendon Press, 1981

[455] Rich M, Visscher W M. Disordered harmonic chain with self - consis-

tent reservoirs. Phys. Rev. B, 1975, 11(6):2164～2170

[456] Casati G, Ford J, Vivaldi F. One - dimensional classical many - body system having a normal thermal conductivity. Phys. Rev. Lett., 1984. 52(21): 1861～1864

[457] Gillan M J, Holloway R W. Transport in the Frenkel - Kontorova model. Ⅲ. Thermal conductivity. J. Phys. C, 1985, 18:5705～5720

[458] Prosen T, Robnik M. Energy transport and detailed verification of Fourier heat law in a chain of colliding harmonic oscillators. J. Phys. A, 1992, 25, 3449～3472

[459] Lepri S, Livi R, Politi A. Heat conduction in chains of nonlinear oscillators. Phys. Rev. Lett., 1997, 78(10):1896～1899

[460] Hu B, Li B, Zhao H. Heat conduction in one - dimensional chains. Phys. Rev. E, 1998, 57(3):2992～2995

[461] Alonso D, Artuso R, Casati G. Heat conductivity and dynamical instability. Phys. Rev. Lett., 1999, 82(9):1859～1862

[462] Tsironis G. P, Bishop A R, Savin A V. Dependence of thermal conductivity on discrete breathers in lattices. Phys. Rev. E, 1999, 60(6):6610～6613

[463] Prosen T, Campbell D K. Momentum conservation implies anomalous energy transport in 1D classical lattices. Phys. Rev. Lett., 2000, 84:2857; Hu B, Li B, Zhao H. Heat conduction in one - dimensional nonintegrable systems. Phys. Rev. E, 2000, 61(4):3828～3831

[464] Gendelman O V, Savin A V. Normal heat conductivity of the one - dimensional lattice with periodic potential of nearest - neighbor interaction. Phys. Rev. Lett., 2000, 84(11):2381～2384

[465] Li B, Zhao H, Hu B. Can disorder induce a finite thermal conductivity in 1D Lattices?. Phys. Rev. Lett., 2001, 86(1):63～66

[466] Garrido P L, Hurtado P I, Nadrowski B. Simple one - dimensional model of heat conduction which obeys Fourier's Law. Phys. Rev. Lett., 2001, 86(24):5486～5489

[467] Dhar A. Heat conduction in the disordered harmonic chain revisited. Phys. Rev. Lett., 2001, 86(26):5882～5885

[468] Savin A V, Tsironis G. P, Zolotaryuk A V. Heat conduction in one - dimensional systems with hard - point interparticle interactions. Phys. Rev. Lett., 2002, 88(15):154301

[469] L. Yang. Finite heat conduction in a 2D disorder lattice. Phys. Rev.

Lett., 2002, 88(9):094301

[470] Terraneo M, Peyrard M, Casati G. Controlling the energy flow in nonlinear lattices: a model for a thermal rectifier. Phys. Rev. Lett., 2002, 88 (9):094302

[471] Li B, Wang L, Hu B. Finite thermal conductivity in 1D models having zero Lyapunov exponents. Phys. Rev. Lett., 2002, 88(22):223901

[472] Nose S J. A unified formulation of the constant temperature molecular dynamics methods. Chem. Phys., 1984, 81:511; Hoover W G. Canonical dynamics: equilibrium phase－space distributions. Phys. Rev. A, 1985, 31(3): 1695～1697

[473] Smoluchowski M V. Experimenteu nachweisbare, der ublicheb thermodynamics widersprechende molekularphanomene. Phys. Z, 1912, 13:1069

[474] Feynman R P, Leighton R B, Sands M. The Feynman lectures on physics. M.A.:Addison－Wesley,Reading, 1963

[475] Huxley A F. Muscle structure and theories of contraction. Prog. Biophys., 1957, 7:255

[476] Tsong T Y, Astumian R D. Absorption and conversion of electric field energy by membrane bound ATPases. Bioelectrochem. Bioenerg, 1986, 15:457

[477] Westerhoff H V, Tsong T Y, Chock P B. How enzymes can capture and transmit free energy from an oscillating electric field. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1986, 83:4734

[478] de Waele A, Kraan W H, de Bruin Ouboter R. On the dc voltage across a double point contact between two superconductors at zero applied dc current in situations in which the junction is in the resistive region due to the circulating current of flux quantization. Physica (Utrecht), 1967, 37:114

[479] de Waele A, de Bruin Ouboter R. Quantum－interference phenomena in point contacts between two superconductors. Physica (Utrecht), 1969, 41:225

[480] Julicher F, Ajdari A, Prost J. Modeling molecular motors. Rev. Mod. Phys., 1997, 69(4):1269～1291

[481] Astumian R D. Thermodynamics and kinetics of a Brownian motor. Science, 1997, 276:917～922

[482] Reimann P. Brownian motors: noisy transport far from equilibrium. Phys. Rep., 2002, 361:57～265

[483] Parrondo J M R, Espanol P. Criticism of Feynman's analysis of the ratchet as engine. Am.J. Phys., 1996, 64:1125

[484] Magnasco M O, Stolovitzky G. Feynman's ratchet and pawl. J. Stat. Phys., 1998, 93:615

[485] Sekimoto K. Kinetic characterization of heat bath and the energetic of thermal ratchet models. J. Phys. Soc. Jpn., 1997, 66:1234

[486] Houdou T, Takaga F. Irreversible operation in a stalled state of Feynman's ratchet. J. Phys. Soc. Jpn., 1998, 67:2974

[487] Sakaguchi H. Langevin simulation for the Feynman ratchet model. J. Phys. Soc. Jpn., 1998, 67:709;Fluctuation theorem for a Langevin model of the Feynman ratchet. J. Phys. Soc. Jpn., 200, 69:104

[488] Jarzynski C, Mazonka O. Feynman's ratchet and pawl: an exactly solvable model. Phys. Rev. E, 1999, 59:6448

[489] Reimann P. Thermally driven escape with fluctuating potentials: a new type of resonant activation. Phys. Rev. Lett., 1995, 74:4576

[490] Bao J D, Abe Y, Zhuo Y Z. Competition and cooperation between thermal noise and external driving force. Physica A, 2000, 277:127

[491] Talkner P. Stochastic resonance in the semiadiabatic limit. New J. Phys., 1999, 1:4

[492] Plata J. Rocked thermal ratchets: the high – frequency limit. Phys. Rev. E, 1998, 57:5154

[493] Milstein G N, Tretyakov M V. Mean velocity of noise – induced transport in limit of weak periodic forcing. J. Phys. A, 1999, 32:5795

[494] Astumian R D, Bier M. Fluctuation driven ratchets: molecular motor. Phys. Rev. Lett., 1994, 72:1766

[495] Prost J, Chauwin J F, Peliti L. Asymmetric pumping of particles. Phys. Rev. Lett., 1994, 72:2652

[496] Ajdari A. Pumping liquids using asymmetric electrode arrays. Phys. Rev. E, 2000, 61:R45

[497] Tarlie M B, Astumian R D. Optimal modulation of a Brownian ratchet and enhanced sensitivity to a weak external force. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1998, 95:2039

[498] Janossy I. Molecular interpretation of the absorption – induced optical reorientation of nematic liquid crystals. Phys. Rev. E, 1994, 49:2957

[499] Goldobin E, Sterck A, Koelle D. Josephson vortex in a ratchet potential: theory. Phys. Rev. E, 2001, 63:031111

[500] Bug A L R, Berne B J. Shaking – induced transition to a nonequilibri-

um state. Phys. Rev. Lett., 1987, 59:948

[501] Ajdari A, Prost J. Mouvement induit par un potentiel periodique de basse symmetrie: dielectrophorese pulsee. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. Ⅱ, 1992, 315:1635

[502] Chauwin J F, Ajdari A, Prost J. Current reversal in asymmetric pumping. Europhys. Lett., 1995, 32:373

[503] Chen Y, Yan B, Miura R. Asymmetry and direction reversal in fluctuation-induced biased Brownian motion. Phys. Rev. E, 1999, 60:3771

[504] Yan B, Miura R M, Chen Y D. Direction reversal of fluctuation biased Brownian motion on distorted ratchets. J. Thero. Biol., 2001, 210:141

[505] Rousselet J, Salome L, Ajdari A. Directed motion of Brownian particles induced by a periodic asymmetric potential. Nature, 1994, 370:446

[506] Faucheux L P, Libchaber A. Selection of Brownian particles. J. Chem. Soc. Farady Trans., 1995, 91:3163

[507] Faucheux L P, Bourdieu L S, Kaplan P D. Optical thermal ratchet. Phys. Rev. Lett., 1995, 74:1504

[508] Gorre-Talini L, Spatz J P, Silberzan P. Dielectrophoretic ratchets. Chaos, 1998, 8:650

[509] Jansons K M, Lythe G D. Stochastic stokes drift. Phys. Rev. Lett., 1998, 81:3136

[510] Van den Broeck C. Stokes' drift: an exact result. Europhys. Lett., 1999, 46:1

[511] Mesquita O N, Kane S, Gollub J P. Transport by capillary waves: fluctuating Stokes drift. Phys. Rev. A, 1992, 45:3700

[512] Magnasco M O. Forced thermal ratchets. Phys. Rev. Lett., 1993, 71:1477

[513] Bartussek R, Hänggi P, Kissner J G. Periodically rocked thermal ratchets. Europhys. Lett., 1994, 28:459

[514] Cecchi G A, Magnasco M O. Negative resistance and rectification in Brownian transport. Phys. Rev. Lett., 1996, 76:1968

[515] Weiss S, Koelle D, Muller J. Ratchet effect in dc SQUIDs. Europhys. Lett., 2000, 51:499

[516] Zapata I, Luczka J, Sols F. Tunneling center as a source of voltage rectification in Josephson junctions. Phys. Rev. Lett., 1998, 80:829

[517] Schreier M, Reimann P, Hanggi P. Giant enhancement of diffusion

and particle selection in rocked periodic potentials. Europhys. Lett., 1998, 44: 416

[518] Bartussek R, Reimann P, Hanggi P. Precise numerics versus theory for correlation ratchets. Phys. Rev. Lett., 1996, 76:1166

[519] Mielke A. Noise induced transport. Ann. Phys. (Leipzig), 1995, 4: 476

[520] Zapata I, Bartussek R, Sols F. Voltage rectification by a SQUID ratchet. Phys. Rev. Lett., 1996, 77:2292

[521] Landa P S, McClintock P V E. Changes in the dynamical behavior of nonlinear systems induced by noise. Phys. Rep., 2000, 323:1

[522] Yevtushenko O, Flach S, Zolotaryuk Y. Rectification of current in ac - driven nonlinear systems and symmetry properties of the Boltzmann equation. Europhys. Lett., 2001, 54:141

[523] Yan B, Miura R M, Chen Y D. Direction reversal of fluctuation induced biased Brownian motion on distorted ratchets. J. Theor. Biol., 2001, 210: 141

[524] Reimann P. Supersymmetric ratchets. Phys. Rev. Lett., 2001, 86: 4992

[525] Flach S, Yevtushenko O, Zolotaryuk Y. Directed current due to broken time - space symmetry. Phys. Rev. Lett., 2000, 84:2358

[526] Jung P, Kissner J G, Hänggi P. Regular and chaotic transport in asymmetric periodic potentials: inertia ratchets. Phys. Rev. Lett., 1996, 76: 3436

[527] Reimann P, Grifoni M, Hänggi P. Quantum ratchets. Phys. Rev. Lett., 1997, 79:10

[528] Ibarra - Bracamontes L, Romero - Rochin V. Stochastic ratchets with colored thermal noise. Phys. Rev. E, 1997, 56:4048

[529] Marchesoni F. Brownian surfers. Phys. Lett. A, 1998, 237:126

[530] Blanter Ya M, Buttiker M. Rectification of fluctuations in an underdamped ratchet. Phys. Rev. Lett., 1998, 81:4040

[531] Landa P S. Noise - induced transport of Brownian particles with consideration for their mass. Phys. Rev. E, 1998, 58:1325

[532] Mateos J L. Chaotic transport and current reversal in deterministic ratchets. Phys. Rev. Lett., 2000, 84:258

[533] Barbi M, Salerno M. Phase locking effect and current reversals in de-

terministic underdamped ratchets. Phys. Rev. E, 2000, 62:1998

[534] Arizmendi C M, Family F, Salas - Brito A L. Quenched disorder effects on deterministic inertia ratchets. Phys. Rev. E, 2001, 63:061104

[535] Borromeo M, Costantini G, Marchesoni F. Deterministic ratchets: Route to diffusive transport. Phys. Rev. E, 2002, 65:041110

[536] Hondou T, Sawada Y. Dynamical behavior of a dissipative particle in a periodic potential subject to chaotic noise: retrieval of chaotic determinism with broken parity. Phys. Rev. Lett., 1995, 75:3269

[537] Chang C H. Ratchet models using driving forces generated by deterministic chaotic maps. Phys. Rev. E, 2002, 66:015203

[538] Zheng Z, Li X. Biased motion in a symmetric periodic potential by breaking temporal symmetry. Comm. Theor. Phys., 2001, 36:151

[539] Liu F, Li X, Zheng Z. Brownian ratchet driven by a rocking forcing with broken temporal symmetry. Comm. Theor. Phys., 2003, 39:173

[540] Henningsen U, Schliwa M. Reversal in the direction of movement of molecular motor. Nature, 1998, 389:93

[541] Sablin E P, Case R B, Dai S C. Direction determination in the minus - end - directed kinesin motor ncd. Nature, 1998, 395:813

[542] Rice S, Lin A W, Safer D. A structural change in the kinesin motor protein that drives motility. Nature, 1999, 402:778

[543] Vale R D, Milligan R A. The way things move: looking under the hood of molecular proteins. Science, 2000, 288:88

[544] Endow S A, Higuchi H. A mutant of the motor protein kinesin that moves in both directions on microtubules. Nature, 2000, 406:913

[545] Ajdari A. Force free motion in an asymmetric environment: a simple model for structured objects. J. Phys. I, 1994, 4:1577

[546] Derenyi I, Vicsek T. The kinesin walk: a dynamic model with elastically coupled heads. Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A., 1996, 93:6775

[547] Elston T C, Peskin C S. The role of protein flexibility in molecular motor function: coupled diffusion in a tilted periodic potential. SIAM J. Appl. Math., 2000, 60:842

[548] Stryer L. Biochemstry. San Francisco: Freeman, 1995

[549] Falo F, Martinez P J, Mazo J J. Ratchet potential for fluxions in Josephson - junction arrays. Europhys. Lett., 1999, 45:700

[550] Trias E, Mazo J J, Falo F. Depinning of kinks in a Josephson - junc-

tion ratchet array. Phys. Rev. E, 2000, 61:2257

[551] Olson C J, Reichhardt C, Janko B. Collective interaction – driven ratchet for transporting flux quanta. Phys. Rev. Lett., 2001, 87:177002

[552] Reichhardt C, Olson C J. Hastings M B. Rectification and phase locking for particles on symmetric two – dimensional periodic substrates. Phys. Rev. Lett., 2002, 89:024101

[553] Derenyi I, Vicsek T. Cooperative transport of Brownian particles. Phys. Rev. Lett., 1995, 75:374

[554] Ashkin A, Schütze K, Dziedzic J M. Force generation of organelle transport in vivo measured by an infrared laser trap. Nature, 1990, 348:346

[555] Svoboda K, Schmidt C F, Schnapp B J. Direct observation of kinesin stepping by optical trapping interferometry. Nature, 1993, 65:721

[556] Finer J T, Simmons R M, Spudich J A. Single myosin molecule mechanics: piconewton forces and nanometre steps. Nature, 1994, 368:113

[557] Derenyi I, Ajdari A. Collective transport of particles in a "flashing" periodic potential. Phys. Rev. E, 1996, 54:R5

[558] Julicher F, Prost J. Cooperative molecular motors. Phys. Rev. Lett., 1995, 75:2618;Julicher F, Prost J. Spontaneous oscillations of collective molecular motors. Phys. Rev. Lett., 1997, 78:4510

[559] Jaeger H M, Nagel S R, Behringer R P. Granular solids, liquids, and gases. Rev. Mod. Phys., 1996, 68:1259

[560] Douady S, Fauve S, Laroche C. Subharmonic instabilities and defects in a granular layer under vertical vibrations. Europhys. Lett., 1989, 8:621

[561] Park H K, Behringer R P. Surfaces waves in vertically vibrated granular materials. Phys. Rev. Lett., 1993, 71:1832

[562] Knight J B, Jaeger H M, Nagel S R. Vibration – induced size separation in granular media: the convection connection. Phys. Rev. Lett., 1993, 70:3728

[563] Derenyi I, Tegzes P, Vicsek T. Collective transport in locally asymmetric periodic structures. Chaos, 1998, 8:657

[564] Csahok Z, Family F, Vicsek T. Transport of elastically coupled particles in an asymmetric potential. Phys. Rev. E, 1997, 55:5179

[565] Savin A V, Tsironis G P, Zolotaryuk A V. Ratchet and switching effects in stochastic kink dynamics. Phys. Lett. A, 1997, 229:279

[566] Klempp S, Mielke A, Wald C. Noise – induced transport of two cou-

pled particles. Phys. Rev. E, 2001, 63:031914

[567] Igarashi A, Tsukamoto S, Goko H. Transport properties and efficiency of elastically coupled Brownian motors. Phys. Rev. E, 2001, 64:051908

[568] Zheng Z, Hu G, Hu B. Collective direction transport in coupled nonlinear oscillators without external bias. Phys. Rev. Lett., 2001, 86:2273

[569] Li X, Zheng Z. Collective directional transport in symmetric periodic potentials by breaking the coupling symmetry. Comm. Theor. Phys., 2003, 39:549

[570] Porto M, Urbakh M, Klafter J. Atomic scale engines: cars and wheels. Phys. Rev. Lett., 2000, 84:6058

[571] Hu B, Zhu J Y. Driven dynamics: a probable photodriven Frenkel-Kontorova model. Phys. Rev. E, 2001, 65:016202

[572] Zheng Z, Cross M C, Hu G. Collective directed transport of symmetrically coupled lattices in symmetric periodic potentials. Phys. Rev. Lett., 2002, 89:154102

[573] Cilla S, Falo F, Floria L M. Mirror symmetry breaking through an internal degree of freedom leading to directional motion. Phys. Rev. E, 2001, 63:031110

[574] Carapella G, Costabile G. Ratchet effect: demonstration of relativistic fluxon diode. Phys. Rev. Lett., 2001, 87:077002

[575] Salerno M, Zolotaryuk Y. Soliton ratchetlike dynamics by ac forces with harmonic mixing. Phys. Rev. E, 2002, 65:056603

[576] Costantini G, Marchesoni F, Borromeo M. String ratchets: ac driven asymmetric kinks. Phys. Rev. E, 2002, 65:051103

[577] Flach S, Zolotaryuk Y, Miroshnichenko A E. Broken symmetries and directed collective energy transport in spatially extended systems. Phys. Rev. Lett., 2002, 88:184101

[General Information]
书名=耦合非线性系统的时空动力学与合作行为
作者=郑志刚
页数=385
SS号=11288769
DX号=
出版日期=2004年03月第1版
出版社=高等教育出版社